ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXX (1975)

# Inéquations portant sur des systèmes linéaires de type parabolique et applications à la recherche de classes d'unicité

par J. Chabrowski (Katowice) et G. Reynaud (Marseille)

**Résumé.** Soit $u$ la solution d'un système linéaire d'inéquations de type parabolique dans un domaine $\Omega \times (0, T)$. On démontre que l'intégrale $\int_{\Omega} \Phi^2(t, x) u(t, x)^2 dx$ est une fonction décroissante de $t$, où $\Phi$ est une fonction poids de la forme

$$\exp\left\{-m\left[\int_{-1}^{|x|} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right\},$$

$A$ est une fonction continue, strictement positive définie dans $[-1, \infty)$, telle que la fonction $s \exp\left[-M \int_{-1}^{s} \frac{dt}{\sqrt{A(t)}}\right]$ est bornée pour certain $M$. Comme conséquence on obtient l'unicité du premier problème de Fourier pour les domaines cylindriques non bornés.

**Notations et hypothèses.** Soient $\Omega$ un ouvert de l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$, $T$ un réel positif, $S$ le cylindre $\Omega \times [0, T]$. Nous notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\boldsymbol{R}^n$, $|x|$ la quantité $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ et $t$ un élément de $[0, T]$.

La boule ouverte de centre l'origine de rayon $\varrho$ dans $\boldsymbol{R}^n$ sera notée $B_\varrho$, $S_\varrho$ sera la sphère de centre l'origine, de rayon $\varrho$, dans $\boldsymbol{R}^n$.

Nous noterons par: $\omega_\varrho$ l'ensemble $B_\varrho \cap \Omega$, $\sigma_\varrho$ l'ensemble $S_\varrho \cap \Omega$, $\Gamma$ la frontière de $\Omega$.

Si $f$ est une fonction différentiable définie dans $S$, nous noterons par $D_i f$ la dérivée partielle de la fonction $f$ par rapport à la variable $x_i$, $D_t f$ la dérivée partielle de la fonction $f$ par rapport à la variable $t$.

Soient $u = (u_1, \ldots, u_N)$ et $v = (v_1, \ldots, v_N)$ des applications définies dans $S$ à valeur dans $\boldsymbol{R}^N$; nous noterons par: $uv$ la fonction définie par $uv = u_1 v_1 + \ldots + u_N v_N$, $D_i u$ l'application définie dans $S$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^N$, par $D_i u = (D_i u_1, \ldots, D_i u_N)$, $D_t u$ l'application définie dans $S$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^N$, par $D_t u = (D_t u_1, \ldots, D_t u_N)$.

Dans toute la suite, $L$ désignera un opérateur linéaire de type parabolique défini par:

$$Lu = \sum_{ijk} D_i [a_{ijk}^p D_j u_k] - \sum_k D_t a_{p,k} u_k$$

où $u$ est une application de $S$ dans $\boldsymbol{R}^N$ vérifiant certaines propriétés et où les coefficients vérifient les propriétés suivantes:

(a) les $a_{ijk}^p$ appartiennent à $C^1(S)$;

(b) il existe une fonction $F$ appartenant à $C(S)$, telle que, pour tout $\xi = (\xi_i^p)$, $\beta = (\beta_i^p)$ appartenant à $\boldsymbol{R}^{n\times N}$, on ait:

$$\sum_{ijkp} a_{ijk}^p \xi_i^p \beta_j^k \leqslant \lambda F \sum_{i,p} (\xi_j^p)^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{ijkp} a_{ijk}^p \beta_i^p \beta_j^k$$

et ceci pour tout $\lambda$ réel strictement positif;

(c) $|D_j a_{ijk}^p| \leqslant F_1$ où $F_1$ appartient à $C(S)$;

(d) pour tout $i, j, p, k$, on a: $a_{ijk}^p = a_{ijp}^k$;

(e) les coefficients $a_{p,k}$ sont localement lipschitziens dans $S$ et vérifient pour tout $\beta = (\beta_p)$ appartenant à $\boldsymbol{R}^N$,

$$0 \leqslant G\beta^2 \leqslant \sum_{p,k} a_{p,k}\beta_p\beta_k \leqslant G_1\beta^2; \qquad \sum_{pk} D_t(a_{pk})\beta_p\beta_k \geqslant -Hu^2,$$

où $G$, $G_1$ et $H$ appartiennent $C(S)$.

**Introduction.** Dans ce travail, nous avons généralisé une partie des résultats de [3]. Nous introduisons une fonction définie sur $[-1, +\infty[$ que nous noterons toujours par $A$, et qui permettra de généraliser les fonctions poids $\varphi$ qui interviennent dans [3]. Par exemple: dans [3]

$$\varphi_{m,\beta,\tau}(x, t) = \exp -\frac{m(1+|x|)^{2-\lambda}}{\beta-(t-\tau)},$$

alors qu'ici nous définissons la fonction poids $\varphi_{A,m,\beta,\varphi}$ par,

$$\varphi_{A,m,\beta,\tau}(x, t) = \exp\left\{-\frac{m}{\beta-(t-\tau)}\left(\int_{-1}^{|x|}\frac{du}{\sqrt{A(u)}}\right)^2\right\}.$$

Nous verrons que les résultats obtenus alors englobent ceux de [3] en choisissant convenablement la fonction $A$. Il nous semble que le fait le plus important est que la fonction $A$ peut posséder des ,,bosses'' sans que la classe d'unicité soit changée; exemple: soit l'opérateur:

$$Lu = D_x([1+x^2h(x)]D_xu) - D_tu$$

où $h(x)$ est une fonction positive continue vérifiant les propriétés suivantes:

(1) $\max h(x) = 1$,

(2) pour tout entier $n$, $h(x) = 0$ pour $x$ appartenant à $[n, (n+1)/2]$.

Si on applique les résultats de [3], on a un théorème d'unicité pour un tel opérateur dans la classe des fonctions $u$ vérifiant:

$$ue^{-m_1 \operatorname{Log} x} < K,$$

alors qu'ici nous démontrons qu'il y a unicité pour $u$ vérifiant:

$$u \exp - m_1 \left( \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 h(x)}} \right)^2 < K,$$

c'est-à-dire une classe beaucoup plus grande à savoir la classe des fonctions $u$ vérifiant

$$ue^{-2m_1 x^2} < k \quad (m_1 \text{ et } k \text{ constantes positives}).$$

**1.** Définition 1. Nous dirons que l'application $u$ définie dans $S$ à valeur dans $\boldsymbol{R}^N$ appartient à $[C^{1,2}(S)]^N$ si $u$ appartient à $[C^1(S)]^N$ et si pour tout couple $(i, j)$, $D_i[D_j u]$ est une application continue dans $S$.

Définition 2. Soit $\psi$ une fonction définie dans $\boldsymbol{R}^n \times [0, T]$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+$; on note $K_\psi$ l'ensemble des applications $v$ appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$, vérifiant les propriétés suivantes,

(1) $v(x, t) = 0$ pour $(x, t)$ appartenant à $\Gamma \times [0, T]$,

(2) $\psi v_p$ appartient à $L^2(S)$ pour tout $p$.

Nous dirons que $v$ est solution du problème I, si $v$ vérifie:
pour tout $r$ supérieur ou égal à $r_0$ ($r_0$ constante positive donnée) et pour tout $t$ appartenant à $[0, T]$

$$\int_{\omega_r} -2vLv\,dx \leqslant \int_{\omega_r} \Big[C_1 v^2 + u \sum_{i,j,k,p} a_{ijk}^{p} D_i v_p D_j v_k\Big] dx$$

où $C_1$ appartient à $C(S)$ et $u$ est une constante positive ou nulle inférieure à 2.

Définition 3. Soit $A$ une fonction continue, strictement positive définie sur le segment $[-1, +\infty[$.

On notera par: $\mathscr{A}$ la fonction définie par

$$s \to \mathscr{A}(s) = \int_{-1}^{s} \frac{du}{\sqrt{A(u)}},$$

$\psi_A$ la fonction définie dans $\boldsymbol{R}^n \times [0, T]$ par

$$(x, t) \to \psi_A(x, t) = \exp - m_1 [\mathscr{A}(|x|)]^2,$$

$\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ la fonction définie dans $\boldsymbol{R}^n \times [\tau, \tau + \beta/2]$ par

$$(x, t) \to \varphi_{A,m,\beta,\tau}(x, t) = \exp - m \frac{[\mathscr{A}(|y|)]^2}{\beta - (t - \tau)}$$

où $m_1$, $m$, $\beta$ sont des constantes positives, $\tau$ un réel, et $|y| = \max(|x|, r_0)$ $(\beta < 1)$.

DÉFINITION 4. Nous dirons que $A$ vérifie l'hypothèse I ($\mathrm{H_I}$) si $s\exp -M_1[\mathscr{A}(s)]^2 \leqslant K_1$, pour $s \geqslant 0$, où $M_1$ et $K_1$ sont constantes positives.

Il en résulte que $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} = \infty$.

DÉFINITION 5. La fonction $A$ étant donnée, nous dirons que les coefficients $HC_1\,GG_1\,FF_1$ vérifient l'hypothèse $\mathrm{II}_A$ ($\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$) si:

$$G_1(x,t) \leqslant K_1 \exp m_0[\mathscr{A}(|x|)]^2, \tag{1}$$

$$\frac{H(x,t)+C_1(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1[\mathscr{A}(|x|)]^2, \tag{2}$$

$$\frac{F(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1 A(|x|), \tag{3}$$

$$\frac{F_1(x,t)}{G(x,t)} \leqslant K_1 \exp m_0[\mathscr{A}(|x|)]^2, \tag{4}$$

où $m_0$ est une constante positive.

THÉORÈME I. *Soit $A$ donnée vérifiant $\mathrm{H_I}$; on suppose que les coefficients $G, G_1, F, F_1, H, C_1$ vérifient $\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$.*

*Soit $v$ appartenant à $K_{\varphi_A}$, $v$ solution du problème I, alors il existe deux constantes positives $\beta_1$ et $\beta_2$ indépendantes de $\tau$ telles que si $m \leqslant \beta_1$ et $m/\beta \geqslant \beta_2$, on ait:*

(1) $\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{p,k} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} a_{p,k} v_p v_k\,dx$ *est une fonction décroissante de $t$,*

*pour $t$ appartenant à $[\tau, \tau+\beta/2] \cap [0, T]$ et ceci pour tout $\tau$,*

(2) $\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{p,k} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau}(x,\tau_1) a_{p,k} v_p v_k\,dx$ *est finie pour tout $t \in\, ]0, T]$*

*et tout $\tau_1$ vérifiant $0 < \tau_1 - \tau < \beta/2$,*

(3) $\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}(x,\tau_1) \sum\limits_{i,j,k,p} a^p_{ijk} D_i v_p D_j v_k$ *appartient à $L^1(\Omega \times [\tau_2, T])$*

*où $\tau_2 > 0$ et $0 < \tau_1 - \tau < \beta/2$.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème se fera en quatre étapes:

Etape 1. Nous rappelons un résultat intermédiaire obtenu dans [3]. Soit $\varphi$ une fonction définie dans $\boldsymbol{R}_+ \times [t_1, t_2]$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+$, où $t_1, t_2$

vérifient $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, vérifiant,

(1) $\varphi$ est lipschitzienne dans tout borné de $\boldsymbol{R}_+ \times [t_1, t_2]$,

(2) $\varphi(|x|, t) = \varphi(r_0, t)$ pour tout $|x| \leqslant r_0$,

(3) les fonctions $t \to \varphi(|x|, t)$ et $|x| \to \varphi(|x|, t)$ sont décroissantes,

(4) $\varphi$ est solution presque partout de l'inégalité suivante,

$$-\varphi\varphi_t G - \varphi^2[H + C_1] - \frac{32}{2-\mu} F\varphi_{|x|}^2 \geqslant 0,$$

où $\varphi_{|x|}$ représente la dérivée partielle de la fonction $\varphi$ par rapport à la variable $|x|$, et $\varphi_t$ la dérivée partielle par rapport à la variable $t$.

Si $v$ est solution du problème I, alors $v$ vérifie l'inégalité suivante:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r}\Big[-\varphi\varphi_t G v^2 + \frac{2-\mu}{2}\varphi^2 \sum_{ijkp} a_{i,j,k}^p D_j v_p D_j v_k\Big]\,dx\,dt \tag{5}$$
$$\leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_r}\sum_{ijkp} 2\varphi^2 v_p a_{i,j,k}^p D_j v_k \cdot \frac{x_j}{|x|}\,ds\,dt + \Big[\int_{\omega_r}\sum_{pk}\varphi^2 a_{p,k} v_p v_k\,dx\Big]_{t=\tau_1} -$$
$$-\Big[\int_{\omega_r}\sum_{p,k}\varphi^2 a_{p,k} v_p v_k\,dx\Big]_{t=\tau_2}$$

où $(\tau_1, \tau_2)$ vérifie $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$. On démontre ce résultat en considérant l'identité:

$$-2\varphi^2 vLv \equiv -\sum_{i,j,k,p} 2\varphi^2 v D_i[a_{ijk}^p D_j v_k] + \sum_{pk}\varphi^2 v D_t a_{pk} v_k.$$

On obtient par des calculs élémentaires,

$$-2\varphi^2 vLv \geqslant -\sum_{ijkp} D_i[2\varphi^2 v_p a_{ijk}^p D_i v_k] + \sum_{pk} D_t[\varphi^2 a_{pk} v_p v_k] +$$
$$+[-2\varphi\varphi_t G - \varphi^2 H - 4\lambda\varphi_{|x|}^2 F]v^2 + 2\varphi^2\Big[1 - \frac{2}{\lambda} - \frac{\mu}{2}\Big]\sum_{ijkp} a_{ijk}^p D_i v_p D_j v_k,$$

où $\lambda$ est un réel positif; si on prend $\lambda = 8/2-\mu$, et si on intégre l'inégalité précédente sur $\omega_r \times [\tau_1, \tau_2]$, $t_1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_2$ et, en utilisant la méthode énoncée dans [3] nous obtenons le résultat.

Eatpe 2. Montrons que $\varphi = \varphi_{A,m,\beta,\tau}$ vérifient les conditions demandées précédemment, pourvu que $m$ et $\beta$ vérifient $m \leqslant 2-\mu/256K_1$, $m/\beta \geqslant 2K_1$. En effet 1, 2, 3, sont bien vérifiées, il reste à vérifier (4).

Remplaçons $\varphi$ par $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ dans le premier membre de (4): si $|x| < r_0$, on a, en utilisant l'hypothèse $\mathrm{II}_A$,

$$\frac{m[\mathscr{A}(r_0)]^2}{[\beta-(t-\tau)]^2} - K_1[\mathscr{A}(|x|)] \geqslant \Big[\frac{m}{\beta^2} - K_1\Big][\mathscr{A}(r_0)]^2,$$

quantité qui est positive si $m/\beta \geqslant K_1$ (par hypothese $\beta < 1$); si $|x| > r_0$, on obtient,

$$\left[\frac{m}{[\beta-(t-\tau)]^2} - K_1 - \frac{128m^2K_1}{(2-\mu)[\beta-(t-\tau)]^2}\right][\mathscr{A}(r)]^2,$$

quantité qui est positive si $m/\beta \geqslant 2K_1$ et $m < 2-\mu/256K_1$.

Donc si $m/\beta \geqslant 2K_1$ et $m < 2-\mu/256K_1$, $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ vérifie (1), (2), (3), (4), donc (5) est verifiée si on remplace $\varphi$ par $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$.

Etape 3. Montrons que si $v$ appartient à $K_{\varphi_A}$, si $m/\beta \geqslant \max(3M_1+m_1, M_1+2m_0+m_1, m_0+3M_1+m_1)$, alors $\varphi_{A,m,\beta,\tau}$ et $v$ vérifient:

(6) *Pour tout $(\tau_1, \tau_2)$ $(\tau \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant \tau+\beta/2)$, il existe une suite $r_m$ tendant vers l'infini et une suite $R_m$ tendant vers zéro, telles que,*

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{ijkp} 2\varphi^2_{A,m,\beta,\tau} \frac{x_i}{|x|} a^p_{ijk} v_p D_j v_k \, dS\, dt \leqslant R_m.$$

Pour démontrer ce résultat considérons l'intégrale,

$$I(r) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{ijkp} 2\varphi^2_{A,m,\beta,\tau} x_i a^p_{ijk} v_p D_j v_k \, dx\, dt,$$

où $\tau_1, \tau_2$ vérifient $\tau \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant \tau+\beta/2$, $r > r_0$.

On a:

$$I(r) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{ijkp} D_j[\varphi^2_{A,m,\beta,\tau} x_i a^p_{ijk} v_p v_k]\, dx\, dt -$$

$$- \int_{\tau_2}^{\tau_1} \int_{\omega_r} \sum_{ijkp} \left[\delta_{ij} - \frac{4m}{\beta-(t-\tau)} \mathscr{A}(|x|) \frac{1}{\sqrt{A(|x|)}} \frac{x_i x_j}{|x|}\right] \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} a^p_{ijk} v_p v_k \, dx\, dt -$$

$$- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} \sum_{ijkp} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} x_i v_p v_k D_j a^p_{ijk} \, dx\, dt = B_1 + B_2 + B_3,$$

où $\delta_{ij}$ est le symbole de Kronecker.

Etudions chaque terme du deuxieme membre de l'égalité précédente. Considerons $B_2$;

Si $\sqrt{A(x)} > n^2 \dfrac{8m}{\beta} \mathscr{A}(|x|)\cdot|x|$ en un point de $\boldsymbol{R}^n \times [\tau_1, \tau_2]$, alors nous avons:

$$\sum_{ijkp} \left[\delta_{ij} - \frac{4m}{\beta-(t-\tau)} \mathscr{A}(|x|) \frac{1}{\sqrt{A(x)}} \frac{x_i x_j}{|x|}\right] a^p_{ijk} v_p v_k$$

$$\geqslant \sum_{ijkp} \left[\delta_{ij} - \frac{1}{n^2} \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right] a^p_{ijk} v_p v_k.$$

Introduisons les formes quadratiques

$$\mathscr{F}_1 = \sum_{ij} d_{ij}\lambda_i\lambda_j \quad \text{où } d_{ij} = \sum_{pk} a^p_{ijk} v_p v_k,$$

$$\mathscr{F}_2 = \sum_{ij}\left[\delta_{ij} - \frac{1}{n^2}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right]\mu_i\mu_j.$$

En vertu de l'hypothèse (b), la forme $\mathscr{F}_1$ est positive. De plus,

$$\mathscr{F}_2 = |\mu|^2 - \sum_{ij}\frac{1}{n^2}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\mu_i\mu_j \geqslant 0,$$

est aussi une forme quadratique positive. Alors, il est bien connu que:

$$\sum_{ij} d_{ij}\left[\delta_{ij} - \frac{1}{n^2}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right] \geqslant 0, \qquad \text{c'est-à-dire,}$$

$$\sum_{ijkp}\left[\delta_{ij} - \frac{1}{n^2}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right] a^p_{ijk} v_p v_k \geqslant 0.$$

Si $\sqrt{A(x)} \leqslant n^2 \dfrac{8m}{\beta}\mathscr{A}(|x|)\cdot|x|$, en un point de $\boldsymbol{R}^n \times [\tau_1, \tau_2]$, alors nous avons:

$$-\sum_{ijkp}\left[\delta_{ij} - \frac{4m}{\beta-(t-\tau)}\mathscr{A}(|x|)\frac{1}{\sqrt{A(|x|)}}\frac{x_i x_j}{|x|}\right] a^p_{ijk} v_p v_k$$

$$\leqslant \frac{32m}{\beta} K_1^2 \mathscr{A}(|x|)\sqrt{A(|x|)}\exp\left[m_0[\mathscr{A}(|x|)]^2\right]\cdot|x|\,|v|^2$$

$$\leqslant \frac{256}{\beta^2} m^2 n^2 K_1^2 [\mathscr{A}(|x|)]^2 |x|^2 |v|^2 \exp m_0 [\mathscr{A}(|x|)]^2.$$

Donc, dans tous les cas, nous avons:

$$B_2 \leqslant \frac{256}{\beta^2} m^2 n^2 K_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} [\mathscr{A}(|x|)]^2 |x|^2 \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} v^2 \exp m_0 [\mathscr{A}(|x|)]^2\, dx\, dt.$$

En utilisant l'hypothèse $\mathrm{H}_1$, nous avons:

$$B_2 \leqslant \frac{256}{\beta^2} m^2 n^2 K_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} [\mathscr{A}(|x|)]^2 \exp - M_1[\mathscr{A}(|x|)]^2\cdot|x|^2 \times$$

$$\times \exp - 2M_1[\mathscr{A}(|x|)]^2\cdot\exp\left(-\frac{2m}{\beta-(t-\tau)} + 3M_1\right)[\mathscr{A}(|x|)]^2\cdot v^2\, dx\, dt.$$

Remarquons que si $\mathrm{H}_1$ est vraie, $[\mathscr{A}(|x|)]^2\exp - M_1[\mathscr{A}(|x|)]^2$ tend vers zéro quand $|x|$ tend vers l'infini et que $|x|^2\exp - 2M_1[\mathscr{A}(|x|)]^2 \leqslant K_1^2$; comme $v$ appartient à $K_{\varphi_A}$, si $m/\beta \geqslant 3M_1 + m_1$, nous aurons $B_2 \leqslant R_1$, $R_1$ constante positive.

Considérons $B_3$,

$$B_3 \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\omega_r} K_1^2 n^2 N^2 |x| \exp\{-M_1[\mathscr{A}(|x|)]^2\} \exp\left\{\left[-\frac{2m}{\beta-(t-\tau)} + M_1 + + 2m_0\right][\mathscr{A}(|x|)]^2\right\} v^2 dx\, dt.$$

Donc si $m/\beta \geqslant M_1 + 2m_0 + m_1$, nous avons:

$$B_3 \leqslant R_2\; R_2 \quad \text{constante positive.}$$

Nous avons donc, si $m/\beta \geqslant \max(3M_1 + m_1,\ M_1 + 2m_0 + m_1)$,

$$I(r) \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} \sum_{ijkp} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} a^p_{ijk} \frac{x_i x_j}{|x|} v_p v_k ds\, dt + R_1 + R_2,$$

car d'après les hypothèses faites, nous pouvons appliquer le lemme A (voir § 5).

Considérons l'intégrale

$$B_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} \sum_{ijkp} \varphi^2_{A,m,\beta,\tau} a^p_{ijk} \frac{x_i x_j}{|x|} v_p v_k ds\, dt,$$

nous avons,

$$B_1 \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} 4K_1^2 A(r)\,|x| \exp\left\{\left[-\frac{2m}{\beta-(t-\tau)} + m_0\right][\mathscr{A}(|x|)]^2\right\} v^2 ds\, dt$$

$$\leqslant 4K_1^2 \exp\left\{\left[-\frac{2m}{\beta} + m_0\right][\mathscr{A}(r)]^2\right\} rA(r) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} v^2 ds\, dt = J(r).$$

Soit $r_1 > 0$ donné et supposons que pour tout $r \geqslant r_1$, $J(r) \geqslant R_3$ ($R_3$ constante positive donnée) nous avons donc, pour tout $r \geqslant r_1$:

$$\frac{R_3}{A(r)} \leqslant 4rK_1^2 \exp\left\{-M_1(\mathscr{A}(r))^2\right\} \cdot \exp\left\{\left(-\frac{2m}{\beta} + + m_0 + M_1\right)[\mathscr{A}(r)]^2\right\} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} v^2 ds\, dt,$$

d'où:

$$\frac{\sqrt{R_3}}{\sqrt{A(r)}} \leqslant 2K_1^2 \exp\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{2m}{\beta} + m_0 + M_1\right)(\mathscr{A}(r))^2\right\} \sqrt{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} v^2 ds\, dt}.$$

Intégrons cette inégalité sur $[r_1, \varrho]$ $(\varrho \geqslant r_1)$ et utilisons l'inégalité de Hölder, nous avons,

$$\int_{r_1}^{\varrho} \frac{\sqrt{R_3}}{\sqrt{A(s)}}\, ds \leqslant 2K_1^2 \Big[\int_{r_1}^{\varrho} \exp\{-2M_1[\mathscr{A}(s)]^2\} ds\Big]^{1/2} \times$$
$$\times \Big[\int_{r_1}^{\varrho} \Big(\exp\Big\{\Big(-\frac{2m}{\beta}+m_0+3M_1\Big)[\mathscr{A}(r)]^2\Big\} \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_r} v^2\, ds\, dt\Big)\, dr\Big]^{1/2}.$$

Si on suppose que $m/\beta \geqslant m_0+3M_1+m_1$, en utilisant $\mathrm{H}_1$ et le fait que $v$ appartient à $K_{\psi_A}$, nous avons:

$$\int_{r_1}^{\varrho} \frac{\sqrt{R_3}}{\sqrt{A(s)}}\, ds \leqslant 2K_1^3 \Big(\int_{r_1}^{\varrho} \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho\Big)^{1/2} \Big[\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_\varrho} \exp\{-m_1[\mathscr{A}(|x|)]^2\} v^2\, dx\, dt\Big]^{1/2} \leqslant R_4,$$

où $R_4$ est une constante positive indépendante de $\varrho$; ce qui est impossible, car quand $\varrho$ tend vers l'infini, le premier membre de l'inégalité tend vers l'infini.

Donc il existe une suite $r_m$ tendant vers l'infini, telle que si $m/\beta \geqslant \max(3M_1+m_1,\ M_1+2m_0+m_1,\ m_0+3M_1+m_1)$, alors nous avons, $I(r_m) \leqslant R$ ($R$ constante positive indépendante de $m$).

Montrons que pour tout $r_m$, il existe $r'_m \geqslant r_m$ tel que

$$I_1(r'_m) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_{r'_m}} \sum_{i,j,k,p} 2\varphi^2_{A,m,\beta,\tau} x_i a^p_{ijk} v_p D_j v_k\, ds\, dt \leqslant R.$$

En effet, si ceci était faux, alors, pour tout $r_p > r_m$, on aurait, $I(r_p) > I(r_m) + (r_p - r_m)R$ qui tendrait vers l'infini quand $r_p$ tendrait vers l'infini, ce qui est impossible.

Ce qui démontre (6) (la suite $r_m$ de (6) est égale à $r'_m$ et $R_m = R/r'_m$).

Etape 4. Supposons que:

$$\frac{m}{\beta} \geqslant \max[2K_1,\ 3M_1+m_1,\ M_1+2m_0+m_1,\ m_0+3M_1+m_1] = \beta_2,$$

et

$$m \leqslant \frac{2-\mu}{256K_1} = \beta_1.$$

Alors nous pouvons utiliser l'inégalité (5) dans laquelle nous posons $r = r_m$ et faire tendre $m$ vers l'infini. Les résultats du théorème I découlent immédiatement de cette inégalité (voir aussi [3], thèoréme 2.1.1).

**2. Cas** $N = 1$. Nous dirons que $v$ est solution du problème II, si $v$ vérifie: $-2vLv \leqslant C_1 v^2 + \mu \sum_{ij} a_{ii} D_i v D_j v$, pour tout $(x, t)$ appartenant à

$\Omega\times[0,\tau]$ où $C_1$ appartient à $C(S)$ et $\mu$ est une constante positive ou nulle, inférieure à 2.

DÉFINITION 6. Soit $v$ une fonction définie dans $S$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}$, nous définissons deux nouvelles fonctions $v_+$ et $v_-$ par:

$$v_+(x,t) = \max[0, v(x,t)],$$

$$v_-(x,t) = \max[0, -v(x,t)].$$

DÉFINITION 7. Soit $\psi$ une fonction définie dans $\boldsymbol{R}^n\times[0,T]$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+$, on note $K_{+\psi}$ (respectivement $K_{-\psi}$) l'ensemble des applications appartenant à $C^{1,2}(S)$ vérifiant les propriétés suivantes:

(1) $v_+(x,t)=0$ (respectivement $v_-(x,t)=0$) pour $(x,t)$ appartenant $\Gamma\times[0,T]$,

(2) $\psi v_+$ (respectivement $\psi v_-$) appartient à $L^2(S)$.

THÉORÈME II. *Soient: $A$ donnée vérifiant* $\mathrm{H}_1$, *on suppose que les coefficients $H$, $C_1$, $G$, $G_1$, $F$, $F_1$ vérifiant* $\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$, *$v$ appartenant à $K_{+\psi_A}$, $v$ solution du problème* II, *alors il existe deux constantes positives $\beta_1$ et $\beta_2$ indépendantes de $\tau$, telles que si $m\leqslant\beta_1$ et $m/\beta\geqslant\beta_2$, on ait:*

(1) $\int\limits_\Omega \varphi^2_{A,m,\beta,\tau}av_+^2\,dx$ *fonction décroissante de $t$, pour $t$ appartenant à* $\left[\tau,\tau+\dfrac{\beta}{2}\right]\cap[0,T]$ *et ceci pour tout $\tau$,*

(2) $\int\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}(x,\tau_1)av_+^2\,dx$ *finie pour tout $t\in\,]0,T]$ et tout $\tau_1$ vérifiant* $0<\tau_1-\tau<\beta/2$,

(3) $\varphi^2_{A,m,\beta,\tau}(x,\tau_1)\sum\limits_{i,j}a_{ij}D_jv_+D_jv_+$ *appartenant à* $L^1(\Omega\times[\tau_2,T])$, *où* $\tau_2>0$ *et* $0<\tau_1-\tau<\beta/2$.

Démonstration. A l'aide du lemme B, § 5, nous avons un résultat intermédiaire qui remplace l'étapel dans la démonstration du théorème 1, à savoir: si $\varphi$ vérifie $1-2-3-4$, si $v$ est solution du problème II, alors $v_+$ (respectivement $v_-$) vérifie l'inégalité suivante:

$$(5')\qquad \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\omega_r}\left[-\varphi\varphi_tGv_+^2+\frac{2-\mu}{2}\varphi^2\sum_{ij}a_{ij}D_iv_+D_jv_+\right]dx\,dt$$
$$\leqslant\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\sigma_r}\sum_{ij}2\varphi^2v_+a_{ij}\frac{x_i}{|x|}D_jv\,ds\,dt+\left[\int\limits_{\omega_r}\varphi^2av_+^2\,dx\right]_{t=\tau_1}-\left[\int\limits_{\omega_r}\varphi^2av_+^2\,dx\right]_{t=\tau_2}$$

qui remplace l'inégalité (5). La suite de la démonstration est identique à la démonstration précédente, sauf que la propriété (6) sera remplacée par (6′)

(6) pour tout $\tau_1, \tau_2$ ($\tau \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant \tau + \beta/2$), il existe une suite $r_m$ tendant vers l'infini et une suite $R_m$ tendant vers zéro, telles que,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_m}} \sum_{ij} 2\varphi^2 v_+ a_{ij} \frac{x_i}{|x|} D_j v \, ds \, dt \leqslant R_m,$$

qui se démontre d'une manière analogue à (6).

**3. Applications.**

Théorèmes d'unicité. *Considérons le système du type parabolique suivant:*

$$L_1 v \equiv Lv + \sum_{ik} b_{ik}^p D_i v_k + c_k^p v_k \equiv Lv + Bv + Cv.$$

*On dira que $v$ est solution du problème* III, *si*

$$v(x, 0) = 0,$$
$$v(x, t) = 0 \quad \text{pour } (x, t) \text{ appartenant à } \Gamma \times [0, T],$$
$$L_1 v = 0.$$

Hypothèse III. *Les $b_{ik}^p$ et $c_k^p$ appartiennent à $C(S)$ et vérifient: pour tout $r \geqslant r_0$ ($r_0$ constante positive fixée), pour tout $t$ appartenant à $[0, T]$,*

$$\int_{\omega_r} 2v[Bv + Cv] dx \leqslant \int_{\omega_r} \Big[ C_1 v^2 + \mu \sum_{ijkp} a_{ijk}^p D_i v_p D_j v_k \Big] dx$$

*où $C_1$ appartient à $C(S)$ et $\mu$ est une constante positive ou nulle inférieure à 2.*

Théorème III. *Soient: $A$ donnée vérifiant* $\mathrm{H}_1$, *les coefficients $H$, $C_1$, $F$, $F_1$, $G$, $G_1$ vérifiant* $\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$ *et $B$ et $C$ vérifiant* $\mathrm{H}_{\mathrm{III}}$, *$v$ appartenant à $K_{\varphi_A}$, $v$ solution du problème* III, *alors $v$ est identiquement nulle dans $S$.*

La démonstration est identique à celle du théorème 3.1.1 de [3]. Cas $N = 1$.

Hypothèse IV. *Les $b_i$ et $c$ appartiennent à $C(S)$ et vérifient:*

$$2v(Bv + Cv) \leqslant C_1 v^2 + \mu \sum_{ij} a_{ij} D_i v D_j v$$

*ou $C_1$ appartient à $C(S)$ et $\mu$ est une constante positive ou nulle inférieure à 2.*

Théorème IV (principe de maximum). *Soient: $A$ donnée vérifiant* $\mathrm{H}_1$, *les coefficiants $b_i$ et $c$ vérifiant l'hypothèse* IV, *les coefficients $H$, $C_1$, $F$, $F_1$, $G$, $G_1$ verifiant* $\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$, *soient $u_1$ et $u_2$ appartenant à $K_{\varphi_A}$, solutions de l'équation $L_1 u = 0$, si*

$$u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t) \quad \text{pour } (x, t) \text{ appartenant à } \Gamma \times [0, T] \text{ et}$$
$$u_1(x, 0) \leqslant u_2(x, 0) \quad \text{pour } x \text{ appartenant à } \Omega,$$

*alors $u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t)$ pour $(x, t)$ appartenant à $S$.*

Démonstration. Si nous posons $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, alors $v_+(x,0) = 0$ et $v_+(x,t) = 0$ pour $(x,t)$ appartenant à $\Gamma\times[0,T]$. Il suffit d'appliquer le théorème II pour démontrer ce théorème.

**4. Résultat optimaux.** Nous démontrons ici que dans un certain sens il n'est pas possible d'améliorer les résultats précédents. Nous donnons une solution du problème III, non identiquement nulle, où les coéfficients $H$, $C_1$, $F$, $F_1$, $G$, $G_1$ vérifient $\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$, la fonction $u$ solution du problème III, vérifie:

$u$ appartient à $K_{\psi_{A,\varepsilon}}$, où $\psi_{A,\varepsilon}$ est définie par:

$$\psi_{A,\varepsilon} = \exp - [\mathscr{A}(|x|)]^{2+\varepsilon}.$$

Soit $A(s)$ une fonction vérifiant $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}$, soit $\Omega = \boldsymbol{R}$ et considérons l'équation aux dérivées partielles:

$$L_2 u \equiv D_x(\sqrt{A}\,,\, D_x u) - D_t \frac{u}{\sqrt{A}} = 0.$$

On suppose que $\dot{A}$ vérifie certaines propriétés de telle sorte que $F, F_1, G, G_1, H, C_1$ vérifient $\mathrm{H}_{\mathrm{II}_A}$.

Nous cherchons la solution $u$ du problème III sous forme de série; formellement nous posons:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) f^{(m)}(t),$$

où $a_m$ sont des fonctions de la variable $x$ et $f^{(m)}(t)$ est la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fonction de $t$.

En identifiant, nous avons:

$$\sum_m f^{(m)}(t) D_x\big(\sqrt{A(|x|)}\, D_x a_m(x)\big) - \frac{1}{\sqrt{A(|x|)}} \sum_m a_m(x) f^{(m+1)}(t) = 0.$$

D'où $\sqrt{A}\cdot D_x a_0 = k$

$$D_x(\sqrt{A}\, D_x a_{m+1}) = \frac{1}{\sqrt{A}}\, a_m.$$

Et si $\mathscr{B}(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{A}}$, nous avons:

$$a_0 = k\mathscr{B}(x),$$

$$a_m = \frac{k}{(2m+1)!}\, [\mathscr{B}(x)]^{2m+1}.$$

Soit $f$ une fonction indéfiniment dérivable, non identiquement nulle qui s'annule ainsi que toutes ses dérivées pour $t = 0$ et qui vérifie

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant M_1 m^{(1+\delta)m} \quad (\delta \text{ nombre strictement positif}).$$

(De telles fonctions existent: voir [2].)

On a alors:

$$|a_m f^{(m)}| \leqslant M_1 k \frac{m^{\delta m}[\mathscr{B}(x)]^{2m+1}}{m!}.$$

En utilisant la formule de Stirling, on a:

$$|a_m f^{(m)}| \leqslant M\mathscr{B}(x)\left(\frac{[\mathscr{B}(x)]^2}{m^{1-\delta}}\right)^m \quad M \text{ constante positive indépendante de } m.$$

Donc $\sum_m a_m f^{(m)}$ est une série uniformément convergente sur tout borné de $\boldsymbol{R}\times[0, T]$. On peut démontrer facilement que les séries obtenues en dérivant terme à terme sont elles aussi uniformément convergentes sur tout borne de $\boldsymbol{R}\times[0, T]$, c'est-à-dire que $u = \sum_m a_m f^{(m)}(t)$ appartient à $C^{1,2}(S)$. De plus, $u \leqslant N\mathscr{B}(x)\exp[\mathscr{B}(x)]^{2/(1-\delta)}$ voir [2].

Donc pour $\delta$ assez petit vérifiant $2/(1-\delta) < 2+\varepsilon/2$, on montre facilement que $u$ appartient à $K_{\psi_{A,\varepsilon}}$.

**5. Remarque.** Une partie das résultats de [3] s'obtient facilement en choisissant correctement la fonction $A$.

(1) Si $A(s) = (2+s)^\lambda$, $0 \leqslant \lambda < 2$, nous obtenons les résultats des théorèmes 2.1.1, 2.2.1, 3.1.1, 3.2.1, de [3].

(2) Si $A(s) = (3+s)^2[\mathrm{Log}(3+s)]^\nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, nous obtenons les résultats des théorèmes 2.1.2, 2.2.2, 3.1.2, 3.2.2 de [3].

Nous citons (sans démonstration) les lemmes dont nous avons fait usage dans les théorèmes précédents

LEMME A. *Soit $f$ une fonction définie dans $\overline{\Omega}\times[t_1, t_2]$, lipschitzienne sur tout borné de $\overline{\Omega}\times[t_1, t_2]$ et nulle sur $\Gamma\times[t_1, t_2]$. Alors nous avons, pour tout $t$ appartenant à $[t_1, t_2]$*

$$\int_{\omega_r} D_i f\,dx = \int_{\sigma_r} f\frac{x_i}{r}\,ds.$$

LEMME B. *Soit $\Omega$ un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, soit $f$ une fonction appartenant à $C^1(\overline{\Omega})$ et nulle sur $\Gamma\times[t_1, t_2]$, soit $f_+(x) = \max(f(x), 0)$.*

On a les résultats suivants:

(1) la fonction $f_+$ admet presque partout dans $\Omega$ des dérivées partielles et si on appelle $\Omega_1$ l'ensemble des points $x$ de $\Omega$ tel que $f(x) > 0$ et $\Omega_2$

l'ensemble des points $x$ de $\Omega$ où $f(x) \leqslant 0$, on a:

les restrictions à $\Omega_1$ de $D_i f_+$ et $D_i f$ sont égales,

la restriction à $\Omega_2$ de $D_i f_+$ est nulle presque partout,

(2) la fonction $f_+$ est lipschitzienne sur tout borné de $\overline{\Omega}$.

**Bibliographie**


[1] J. Chabrowski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné*, Ann. Polon. Math. 22 (1969), p. 27–35.

[2] I. M. Gelfand et G. E. Chilov, *Les distributions*, Collection Universitaire de Mathémetiques. Edit. Dunod.

[3] G. Reynaud, *Quelques résultats sur les solutions de systèmes d'inéquations de type parabolique*, Thèses-Université d'Aix-Marseille, N° C.N.R.S.: A.O. 6791.

[4] — Notes aux C.R. Acad. Sci. Paris, 271, série A, 1970, p. 835–274, série A, 1972, p. 636–274, série A 1972, p. 777.



UNIVERSITÉ SILÉSIENNE, KATOWICE
U.E.R., MATHÉMATIQUE – INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE MARSEILLE – LUMINY


*Reçu par la Rédaction le 27. 9. 1972*