ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXI (1976)

Sur la méthode des différences finies pour un système d'équations différentielles non linéaires paraboliques sans dérivées mixtes avec une condition aux limites du type de Neumann

par Marian Malec (Kraków)

Résumé. Dans la note on considère le schéma explicite des différences finies pour un système du type parabolique

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i\left(t, x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial x_p}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_p^2}\right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

les dérivées dans la direction normale au bord de l'ensemble analysé étant des fonctions voulues des variables $t, x_1, \ldots, x_p$. On obtient le schéma explicite mentionné en remplaçant dans le système différentiel les dérivées par rapport à t par les différences ascendantes et les autres dérivées par les différences centrales respectives. On a montré que de tels schémas de différences sont convergents et on a estimé l'erreur de la méthode proposée.

1. Dans la présente note nous considérons le schéma explicite des différences finies pour un système du type parabolique

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i\left(t, x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial x_p}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_p^2}\right) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

les dérivées dans la direction normale au bord de l'ensemble analysé E (voir (2.1)) étant des fonctions voulues des variables t et x (voir (2.4)). On obtient le schéma explicite mentionné en remplaçant dans le système (1.1) les dérivées par rapport à t par les différences ascendantes et les autres dérivées par des différences centrales respectives. On a montré que de tels schémas de différences finies sont convergents et on a estimé l'erreur de la méthode proposée (théorème 1).

Il est à noter qu'un pareil résultat a été déjà obtenu par Malec ([1]), mais seulement pour le cas tout particulier où $n = 1$. Le résultat obtenu

([1]) M. Malec, *Sur la méthode des différences finies pour une équation différentielle partielle non-linéaire parabolique sans dérivées mixtes avec la condition aux limites du type de Neumann*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1974), p. 495–501.

dans la présente étude est donc une généralisation de celui présenté dans le travail cité.

2. Dans toute cette note nous admettons que

1° les fonctions scalaires $f_i(t, x, u, q, w)$, $i = 1, \ldots, n$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_p)$, $w = (w_1, \ldots, w_p)$ sont de classe C^1 dans l'ensemble $D = E \times R^{n+2p}$ où

$$E = \{(t, x)\colon\ t \in [0, \tau],\ x \in [0, \sigma]^p,\ \tau > 0,\ \sigma > 0\}; \tag{2.1}$$

2° il existe des constantes L, Γ, g, G telles que les inégalités

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_\lambda}\right| \leqslant L, \qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right| \leqslant \Gamma, \qquad 0 < g \leqslant \frac{\partial f_i}{\partial w_j} \leqslant G \tag{2.2}$$

sont vérifiées pour $(t, x, u, q, w) \in D$ $(i = 1, \ldots, n,\ \lambda = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots \ldots, p)$;

3° les fonctions scalaires $u_i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont de classe C^2 dans l'ensemble et E vérifient le système

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i\left(t, x, u, \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial x_p}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_p^2}\right) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

ainsi que les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u_i(0, x) &= \varphi_{i0}(x), && x_j \in (0, \sigma), \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \varphi_{ij}(t, x), && x_j = 0, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p. \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \psi_{ij}(t, x), && x_j = \sigma, \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Considérons dans l'ensemble E un système de points nodaux dont les coordonnées sont égales à

$$t^\mu = \mu \cdot k, \qquad x_j^\nu = \nu \cdot h \tag{3.1}$$

où $\mu = 0, 1, \ldots, N_1$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, p$, $0 < k = \tau/N_1$, $0 < h = \sigma/N$, N_1 et N sont des nombres naturels.

Désignons la suite des indices $(\mu, m_1, \ldots, m_p)$ du point nodal (3.1) par

$$M = (\mu, m) \qquad \text{où } m = (m_1, \ldots, m_p) \tag{3.2}$$

et les coordonnées du point nodal (3.1) par

$$(t^\mu, x^m) \qquad \text{où } x^m = (x_1^{m_1}, \ldots, x_p^{m_p}). \tag{3.3}$$

Introduisons les ensembles des multi-indices suivants

$$Z = \{M = (\mu, m)\colon\ 0 \leqslant \mu \leqslant N_1,\ 0 \leqslant m_j \leqslant N\ (j = 1, \ldots, p)\}, \tag{3.4}$$

$$Z^+ = \{M = (\mu, m)\colon\ 0 \leqslant \mu \leqslant N_1,\ -1 \leqslant m_j \leqslant N+1\,(j = 1, \ldots, p)\}, \tag{3.5}$$

où m_j $(j = 1, \ldots, p)$ et μ sont les nombres entiers.

Nous envisagerons également les nodaux générés par les suites des indices suivantes

$$j(M) = \big(\mu, j(m)\big), \qquad -j(M) = \big(\mu,\ -j(m)\big), \qquad +M = (\mu+1, m) \tag{3.6}$$

où

$$\begin{aligned} j(m) &= (m_1, \ldots, m_{j-1}, m_j+1, m_{j+1}, \ldots, m_p) \\ -j(m) &= (m_1, \ldots, m_{j-1}, m_j-1, m_{j+1}, \ldots, m_p) \end{aligned} \qquad (j = 1, \ldots, p). \tag{3.7}$$

Supposons ensuite qu'à chaque point nodal (3.1) généré par le multi-indice $M \in Z$ corresponde un système de nombres v_i^M $(i = 1, \ldots, n)$ et admettons que

$$\begin{aligned} v_i^{-j(M)} &= v_i^{j(M)} - 2h\varphi_{ij}(t^\mu, x^m) &&\text{pour } \mu = 0, 1, \ldots, N_1 \text{ et } m_j = 0, \\ v_i^{j(M)} &= v_i^{-j(M)} + 2h\psi_{ij}(t^\mu,\ x^m) &&\text{pour } \mu = 0, 1, \ldots, N_1 \text{ et } m_j = N \\ & && (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $v^M = (v_1^M, \ldots, v_n^M)$. Il est à remarquer qu'en vertu de (3.8) les grandeurs v^M sont définies pour tous les éléments M de l'ensemble Z^+.

On introduit les notations suivantes

$$v_i^{M-} = \frac{1}{k}\,(v_i^{+M} - v_i^M), \tag{3.9}$$

$$v_i^{Mj} = \frac{1}{2h}\,(v_i^{j(M)} - v_i^{-j(M)}), \qquad v_i^{Mjj} = \frac{1}{h^2}\,(v_i^{j(M)} - 2v_i^M + v_i^{-j(M)}), \tag{3.10}$$

$$v_i^{MI} = (v_i^{M1}, \ldots, v_i^{Mp}), \qquad v_i^{MII} = (v_i^{M11},\ \ldots, v_i^{Mpp}). \tag{3.11}$$

Dans la suite nous supposerons que les nombres v_i^M $(i = 1, \ldots, n,$ $M \in Z^+)$ satisfont non seulement aux égalités (3.8), mais aussi à la condition

$$v_i^M = \varphi_{i0}(x^m) \quad \text{pour } M = (0, m) \text{ et } M \in Z \tag{3.12}$$

ainsi qu'aux équations aux différences finies

$$v_i^{M-} = f_i(t^\mu, x^m, v^M, v_i^{MI}, v_i^{MII}) \quad (\mu = 0, 1, \ldots, N_1-1,\ M \in Z). \tag{3.13}$$

4. Désignons par $u^M = (u_1^M, \ldots, u_n^M)$ la valeur de la solution $u(t, x) = \big(u_1(t, x), \ldots, u_n(t, x)\big)$ du problème (2.3), (2.4) au point nodal $(t^\mu, x^m) \in E$

et posons

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
u_i^{-j(M)} &= u_i^{j(M)} - 2h\varphi_{ij}(t^\mu, x^m), \qquad m_j = 0,\\
u_i^{j(M)} &= u_i^{-j(M)} + 2h\psi_{ij}(t^\mu, x^m), \qquad m_j = N\\
&\qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p,\ M \in Z).
\end{aligned}
$$

Donc les grandeurs u^M sont définies pour tout $M \in Z^+$ et satisfont aux conditions aux limites (voir (2.4))

$$
(4.2)\qquad
\begin{aligned}
u_i^M &= \varphi_{i0}(x^m), \qquad \mu = 0,\\
u_i^{Mj} &= \varphi_{ij}(t^\mu, x^m), \qquad m_j = 0,\\
u_i^{Mj} &= \psi_{ij}(t^\mu, x^m), \qquad m_j = N,\\
&\qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p,\ M \in Z)
\end{aligned}
$$

LEMME 1. *Si les hypothèses du section 2 sont satisfaites et les pas h et k vérifient les inégalités*

$$
(4.3)\qquad \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0, \qquad \frac{2pG}{h^2} - \frac{1}{k} \leqslant 0,
$$

il vient

$$
(4.4)\qquad u_i^{M-} = f_i(t^\mu, x^m, u^M, u_i^{MI}, u_i^{MII}) + \eta_i^M,
$$

pour $i = 1, \ldots, n,\ \mu = 0, 1, \ldots, N_1 - 1,\ M \in Z$ *et*

$$
(4.5)\qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h, k) = 0 \qquad \text{où } \varepsilon(h, k) = \max_i \varepsilon_i(h, k),\ \varepsilon_i(h, k) = \max_M |\eta_i^M|.
$$

Démonstration. Comme les termes du second membre de (2.3) sont de classe C^1 et la solution $u(t, x)$ est de classe C^2, les formules (4.4) et (4.5) sont évidentes pour ceux des multi-indices $M = (\mu, m) \in Z$ pour lesquels $1 \leqslant m_j \leqslant N-1$ $(j = 1, \ldots, p)$.

Supposons que pour un certain j: $1 \leqslant j \leqslant p$ on ait $m_j = 0$. Alors, en partant de (4.2) et (2.4) on arrive à

$$
(4.6)\qquad u_i^{Mj} = \varphi_{ij}(t^\mu, x^m) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t^\mu, x^m), \qquad m_j = 0.
$$

En utilisant la formule de Taylor nous pouvons écrire

$$
(4.7)\qquad u_i(P) = u_i(Q) + x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(Q) + \frac{1}{2} x_j^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}(Q) + o(x_j^2)
$$

où $P = (t, x_1, \ldots, x_p)$, $Q = (t, x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_p)$.

Des relations (4.6) et (4.7) on obtient

$$
(4.8)\qquad \left[\frac{2}{x_j^2}\big(u_i(P) - u_i(Q)\big) - \frac{2}{x_j}\varphi_{ij}(Q)\right] - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}(Q) = \frac{2}{x_j^2} o(x_j^2) \to 0
$$

si $x_j \to 0$, ou encore

$$(4.9) \qquad \frac{1}{h^2}[u_i^{j(M)} - 2u_i^M + u_i^{-j(M)}] - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}(t^\mu, x^m) \to 0$$

si $m_j = 0$ et $h \to 0$.

Maintenant on constate aisément que les relations (4.6), (4.9) et (4.3) impliquent les formules (4.4) et (4.5) puisque les fonctions f_i sont de classe C^1.

On prouve d'une façon tout à fait analogue que les relations (4.4) et (4.5) sont également valables si pour un j: $1 \leqslant j \leqslant p$ on a $m_j = N$.

5. LEMME 2. *Si les nombres R^μ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ satisfont aux inégalités aux différences finies*

$$(5.1) \qquad R^{\mu-} \leqslant K \cdot R^\mu + \varepsilon \qquad (\mu = 0, 1, \ldots)$$

et à la condition $R^0 = 0$ où $R^{\mu-} = \frac{1}{k}(R^{\mu+1} - R^\mu)$ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ et $0 < k$ $= \text{const}$, $0 < K = \text{const}$, $0 \leqslant \varepsilon$, *alors*

$$(5.2) \qquad R^\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{K}(e^{Kk\mu} - 1) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots).$$

Le lemme 2 est facile à démontrer par récurrence.

6. LEMME 3. *Si les hypothèses du lemme 1 sont satisfaites, les nombres v_i^M sont définis par (3.8), (3.12), (3.13) et les nombres u_i^M vérifient les relations (4.1), (4.2) et (4.4) ainsi que*

$$(6.1) \qquad r_i^M = u_i^M - v_i^M, \qquad s_i = \max_m r_i^M, \qquad z_i = \min_m r_i^M$$

$$\text{pour } M = (\mu, m) \in Z \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

alors $s_i^0 = z_i^0 = 0$ et

$$(6.2) \qquad s_i^{\mu-} \leqslant L \sum_{j=1}^n |r_j^{A(i)}| + \varepsilon_i(h, k), \qquad z_i^{\mu-} \geqslant -L \sum_{j=1}^n |r_j^{C(i)}| - \varepsilon_i(h, k)$$

pour $i = 1, \ldots, n$, $\mu = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ où $\varepsilon_i(h, k)$ est défini par la formule (4.5), $A(i)$ et $C(i)$ sont des multi-indices de l'ensemble Z.

Démonstration. Les conditions $s_i^0 = z_i^0 = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ résultent directement de la définition (6.1) ainsi que de (3.12) et (4.2).

Nous prouverons la première des inégalités (6.2). Supposons que

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} s_i^{\mu+1} &= r_i^{+A(i)}, \qquad A(i) = (\mu, a(i)) \in Z, \\ s_i^\mu &= r_i^{B(i)}, \qquad B(i) \in Z. \end{aligned}$$

De la définition $s_i^{\mu -} = \frac{1}{k}(s_i^{\mu+1} - s_i^{\mu})$ ainsi qu'à partir de (6.3) nous avons

$$s_i^{\mu -} = \frac{1}{k}(r_i^{+A(i)} - r_i^{A(i)}) + \frac{1}{k}(r_i^{A(i)} - r_i^{B(i)}). \tag{6.4}$$

Il résulte de (4.4), (3.13) et de la définition (3.9) que

$$\begin{aligned} s_i^{\mu -} &= (u_i^{A(i)-} - v_i^{A(i)-}) + \frac{1}{k}(r_i^{A(i)} - r_i^{B(i)}) \\ &= \eta_i^{A(i)} + f_i(t^{\mu}, x^{a(i)}, u^{A(i)}, u_i^{A(i)I}, u_i^{A(i)II}) - \\ &\qquad - f_i(t^{\mu}, x^{a(i)}, v^{A(i)}, v_i^{A(i)I}, v_i^{A(i)II}) + \frac{1}{k}(r_i^{A(i)} - r_i^{B(i)}). \end{aligned} \tag{6.5}$$

En appliquent le théorème de la moyenne au second membre de (6.5) et en groupant convenablement les termes nous arriverons à

$$\begin{aligned} s_i^{\mu -} &= \eta_i^{A(i)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(-) r_j^{A(i)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(-)\frac{1}{h^2} + \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(-)\frac{1}{2h}\right](r_i^{j(A(i))} - r_i^{B(i)}) + \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(-)\frac{1}{h^2} - \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(-)\frac{1}{2h}\right]\cdot(r_i^{-j(A(i))} - r_i^{B(i)}) + \\ &+ \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial w_j}(-)\frac{2}{h^2} - \frac{1}{k}\right)(r_i^{B(i)} - r_i^{A(i)}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

où les dérivées sont prises en des points convenables $(-)$.

Notons que de l'inégalité (4.3) il découle

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(-)\frac{1}{h^2} + \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(-)\frac{1}{2h} \geqslant \frac{g}{h^2} - \frac{\Gamma}{2h} = \frac{1}{h}\left(\frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2}\right) \geqslant 0, \\ &\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(-)\frac{1}{h^2} - \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(-)\frac{1}{2h} \geqslant \frac{g}{h^2} - \frac{\Gamma}{2h} = \frac{1}{h}\left(\frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2}\right) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6.7}$$

alors que (6.3), (3.8), (4.1) entraînent

$$r_i^{j(A(i))} - r_i^{B(i)} \leqslant 0, \qquad r_i^{-j(A(i))} - r_i^{B(i)} \leqslant 0, \qquad r_i^{B(i)} - r_i^{A(i)} \geqslant 0. \tag{6.8}$$

Donc

$$s_i^{\mu -} \leqslant \eta_i^{A(i)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(-) r_j^{A(i)} \leqslant L \sum_{j=1}^{n} |r_j^{A(i)}| + \varepsilon_i(h) \tag{6.9}$$

(voir (2.2), (4.3) et (4.5)).

La démonstration de la seconde inégalité (6.2) se fait d'une façon tout à fait analogue.

La démonstration du lemme 3 est achevée.

7. Lemme 4. *Si les hypothèses du lemme* 3 *sont satisfaites, alors*

$$(7.1)\qquad (\max_m |r_i^M|)^- \leqslant \max(s_i^{\mu -}, -z_i^{\mu -}) \quad \textit{pour } M\in Z \textit{ et } i = 1, \ldots, n$$

(*voir* (3.4)).

Démonstration. Il n'est pas difficile de montrer que

$$(7.2)\qquad \max_m |r_i^M| = \max_m\big(\max(r_i^M, -r_i^M)\big) = \max\big(\max_m r_i^M, \max_m(-r_i^M)\big)$$
$$= \max(s_i^\mu, -\min_m r_i^M) = \max(s_i^\mu, -z_i^\mu).$$

De (7.2) résulte que

$$(7.3)\qquad (\max_m |r_i^M|)^- = \big(\max(s_i^\mu, -z_i^\mu)\big)^- \leqslant \max(s_i^{\mu -}, -z_i^{\mu -}).$$

De cette façon la démonstration du lemme 4 est terminée.

8. Lemme 5. *Si les hypothèses du lemme* 3 *sont satisfaites et*

$$(8.1)\qquad R^\mu = \max_i \max_m |r_i^M| \quad \textit{pour } M\in Z$$

alors $R^0 = 0$ *et*

$$(8.2)\qquad R^{\mu -} \leqslant nLR^\mu + \varepsilon(h, k) \quad (\mu = 0, 1, \ldots, N_1-1)$$

où $\varepsilon(h, k)$ *est défini par le formule* (4.5).

Démonstration. La condition $R^0 = 0$ est évidente (voir (3.12) et (4.2)).

Il s'agit de démontrer (8.2). A partir de (8.1) et du lemme 4 il s'ensuit que

$$(8.3)\qquad R^{\mu -} = \max_i(\max_m |r_i^M|)^- \leqslant \max_i\big(\max(s_i^{\mu -}, -z_i^{\mu -})\big)$$

Mais les nombres $s_i^{\mu -}$ et $z_i^{\mu -}$ vérifient les inégalités (6.2), donc

$$(8.4)\qquad R^{\mu -} \leqslant \max_i \Big[\max\Big(L\sum_{j=1}^n |r_j^{A(i)}| + \varepsilon_i(h), L\sum_{j=1}^n |r_j^{C(i)}| + \varepsilon_i(h)\Big)\Big]$$
$$\leqslant nLR^\mu + \varepsilon(h) \quad \text{pour } \mu = 0, 1, \ldots, N_1-1$$

(voir (8.1) et (4.5)) ce qui achève la démonstration du lemme 5.

9. Théorème 1. *Si les hypothèses du lemme* 3 (*section* 6) *sont satisfaites, alors*

1° *l'erreur de la méthode des différences finies* (3.12), (3.13) *peut être estimée de la façon suivante*

$$(9.1)\qquad |r_i^M| \leqslant \frac{\varepsilon(h, k)}{nL}\,(e^{Lkn\mu}-1) \qquad (i=1,\ldots,n,\ M\in Z)$$

(*voir* (3.4)) *où* $\varepsilon(h, k)$ *est défini par la formule* (4.5);

2° *la méthode des différences finies* (3.12), (3.13) *est convergente, c'est-à-dire*

$$(9.2)\qquad \lim_{h\to 0} r_i^M = 0 \qquad (i=1,\ldots,n,\ M\in Z).$$

Démonstration. Comme (9.2) résulte de (9.1) il suffit alors de montrer (9.1).

On obtient des lemmes 5 et 2

$$(9.3)\qquad R^\mu \leqslant \frac{\varepsilon(h, k)}{nL}\,(e^{Lkn\mu}-1) \qquad (\mu=0,1,\ldots,N_1).$$

Mais de la définition (8.1) découle $|r_i^M| \leqslant R^\mu$ $(i=1,\ldots,n,\ M\in Z)$, donc

$$(9.4)\qquad |r_i^M| \leqslant \frac{\varepsilon(h, k)}{nL}\,(e^{Lkn\mu}-1) \qquad (i=1,\ldots,n,\ M\in Z).$$

Ainsi, la démonstration du théorème 1 est achevée.

Reçu par la Rédaction le 13. 3. 1973