ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1970)

Les propriétés des solutions non négatives d'un système parabolique d'équations

par J. Chabrowski (Katowice)

Considérons le système parabolique d'équations de la forme

$$(1)\quad L^k(u^1, \ldots, u^N) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t,x) u_{x_i x_j}^k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k(t,x) u_{x_i}^k + \sum_{i=1}^{N} c_i^k(t,x) u^i - u_t^k = 0\,,$$

$k = 1, \ldots, N$, dont les coefficients sont définis dans une couche H: $0 < t \leqslant T$, $x \in E_n$ (E_n étant l'espace euclidien à n dimensions). Les propriétés des solutions non négatives d'équations paraboliques (en particulier l'unicité du problème de Cauchy dans la classe des solutions non négatives) ont été traitées dans [1], [4], [9] et [12]. Dans la présente note nous montrons que ces résultats s'étendent aux solutions du système (1).

Nous supposons dans la suite de ce travail que les coefficients du système (1) sont bornés et hölderiens par rapport aux variables (t, x) dans H, ainsi que toutes les dérivées du premier ordre des coefficients $b_i^k(t,x)$ ($k = 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, n$) par rapport aux variables x_j ($j = 1, \ldots, n$) et les dérivées du second ordre des coefficients $a_{ij}^k(t,x)$ ($k = 1, \ldots, N$; $i, j = 1, \ldots, n$) par rapport aux mêmes variables. Nous supposons en outre que les formes quadratiques

$$A^k(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t,x)\xi_i \xi_j\,,$$

$k = 1, \ldots, N$ sont uniformément définies positives, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $a_0 > 0$ tel que $A^k(\xi) \geqslant a_0|\xi|^2$ pour $(t,x) \in H$ et pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, où $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Ce la supposé, il existe une matrice des solutions fondamentales $\{\Gamma_{ij}(t, x; \tau, y)\}$, $i, j = 1, \ldots, N$ du système (1), dont la matrice transposée en tant que fonction du point (τ, y) est la matrice des solutions fondamentales du système adjoint à (1), $(t, x), (\tau, y) \in H$, $\tau < t$, (voir [10], [7], chap. 9, sec. 5). Nous supposerons toujours que

$$c_i^k(t, x) \geqslant 0 \tag{2}$$

pour $(t, x) \in H$ et $i \neq k$ $(i, k = 1, \ldots, N)$. L'auteur a démontré (voir [6], théorème 2.1) que sous les hypothèses (2) tous les éléments $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, y)$ de la matrice des solutions fondamentales sont non négatifs; d'ailleurs tout système du second ordre parabolique au sens de I. Petrovsky, tel que tous les éléments de la matrice fondamentale sont non négatifs, doit être de la forme (1) (voir [6], théorème 2.2). C'est pourquoi nous considérons seulement les properiétés des solutions non négatives du système de la forme (1).

§ 1. Avant de passer à nos théorèmes nous introduisons encore quelques définitions.

Une solution $\{u^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, du système (1) dans H est dite *non négative* lorsque $u^i(t, x) \geqslant 0$ pour $(t, x) \in H$ et $i = 1, \ldots, N$.

Une fonction $f(t, x)$ est dite *régulière par rapport au système* (1) dans un ensemble $G \subset H$, si elle est continue dans G et admet des dérivées $f_{x_i}, f_{x_ix_j}, f_t$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ continues à l'intérieur de G.

Une suite de fonctions $\{u^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ est dite *solution du système* (1) *régulière dans* G, si toute fonction $u^i(t, x)$ est régulière dans G et satisfait à (1) à l'intérieur de G.

THÉORÈME 1. *Si* $\{u^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ *est une solution du système* (1) *non négative et régulière dans* $\overline{H}$, *alors*

$$\int_{E_n} \sum_{i,j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) u^j(\tau, y) dy \leqslant u^i(t, x) \tag{3}$$

pour $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x \in E_n$, $i = 1, \ldots, N$.

Démonstration. Soit $h_R = h_R(x)$ une fonction continue dans E_n telle que $h_R(x) = 1$ pour $|x| \leqslant R$, $h_R(x) = 0$ pour $|x| > 2R$ et $0 \leqslant h_R(x) \leqslant 1$ dans E_n. Posons

$$u_R^i(t, x) = \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) u^j(\tau, y) h_R(y) dy .$$

La suite des fonctions $\{u^i(t, x) - u_R^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ satisfait au système (1) pour $(t, x) \in (\tau, T] \times E_n$ et de plus

$$u^i(\tau, \bar{x}) - \lim_{(t,x)\to(\tau,\bar{x})} u_R^i(t, x) = u^i(\tau, \bar{x}) - h_R(\bar{x}) u^i(\tau, \bar{x}) \geqslant 0$$

pour $\bar{x} \in E_n$, $i = 1, \ldots, N$ (voir [7], chapter 9). Observons que les fonctions $u^i(t, x) - u^i_R(t, x)$ sont bornées inférieurement dans $[\tau, T] \times E_n$, donc il résulte du théorème 1 de [3] que

$$u^i(t, x) \geqslant u^i_R(t, x)$$

pour $(t, x) \in [\tau, T] \times E_n$, $i = 1, \ldots, N$. En vertu du théorème de Lebesgue, en passant à la limite avec $R \to \infty$ nous obtenons les inégalités (3).

Dans la suite il nous conviendra de nous référer à une limitation inférieure de la solution fondamentale $\Gamma_k(t, x; \tau, y)$ de l'équation parabolique

$$(3) \qquad L^k v = \sum_{i,j=1}^{n} a^k_{ij}(t, x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^k_i(t, x) v_{x_i} + c^k_k(t, x) v - v_t = 0$$

établie par P. Besala (voir [1], lemme 2, ou [2]). Fixons un point $\bar{x} \in E_n$ et un nombre $\bar{t} \in (0, T]$. À tout $\varepsilon \in (0, \bar{t})$ on peut faire correspondre des nombres positifs $\Lambda = \Lambda(\bar{t}, \bar{x})$, $\nu = \nu(\bar{t}, \bar{x})$ tels que

$$(4) \qquad \Gamma_k(\bar{t}, \bar{x}; \tau, y) \geqslant \Lambda \exp(-\nu |\bar{x} - y|^2)$$

pour $(\tau, y) \in [0, \bar{t} - \varepsilon] \times E_n$.

Nous rappelons encore les limitations des éléments de la matrice fondamentale du système (1), dont nous faisons usage dans la démonstration du théorème qui suit. On sait ([7], chap. 9) que

$$(5) \qquad \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) \leqslant M(t-\tau)^{-n/2} \exp\left(-\mu \frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right),$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y)\right| \leqslant M(t-\tau)^{-(n+1)/2} \exp\left(-\mu \frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y)\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y)\right| \leqslant M(t-\tau)^{-(n+2)/2} \exp\left(-\mu \frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right)$$

pour (t, x), $(\tau, y) \in H$, $\tau < t$; $l, k = 1, \ldots, n$; $i, j = 1, \ldots, N$; M et μ sont des constantes positives.

Posons

$$\vartheta(s) = (\mu - as)^{1/2}.$$

Il est facile de vérifier que pour chaque $a > 0$ il existe un nombre $\delta = \delta(a)$ tel que

$$(6) \qquad \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) \exp(a|y|^2)$$
$$\leqslant M(t-\tau)^{-n/2} \exp\left[\frac{\mu a}{\vartheta^2(t-\tau)} |x|^2\right] \exp\left[-(t-\tau)^{-1}\left(\vartheta(t-\tau)|y| - \frac{\mu |x|}{\vartheta(t-\tau)}\right)^2\right]$$

pour $t-\tau \leqslant \delta$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$. Le nombre $\delta(a)$ est choisi de façon qu'on ait

$$\vartheta(\delta) = (\mu - a\delta)^{1/2} = \sqrt{\frac{\mu}{2}},$$

c'est-à-dire $\delta = \mu/2a$. Supposons qu'on ait $|x| \leqslant K$, où K est un nombre positif, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $0 < t-\tau \leqslant \delta$. En posant $R = 3K$, l'inégalité $|y| \geqslant R$ entraîne l'inégalité

$$\vartheta(t-\tau)|y| - \frac{\mu|x|}{\vartheta(t-\tau)} \geqslant \sqrt{\frac{\mu}{2}}K,$$

d'où, d'après (6), il résulte que

$$\Gamma_{ij}(t, x; \tau, y)\exp(a|y|^2) \leqslant M(t-\tau)^{-n/2}\exp(2K^2 a)\exp\left(-(t-\tau)^{-1}\frac{\mu}{2}K^2\right). \tag{7}$$

La limitation (6) pour la solution fondamentale de l'équation parabolique a été établie par M. Krzyżański (voir [9], lemme 3).

Théorème 2. *Nous supposons que* $\{u^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ *est une solution du système* (1) *régulière et non négative dans la couche* $\bar{H}$. *Soient* ε, τ *des nombres arbitraires tels que* $0 < \varepsilon < T-\tau$, $\tau \geqslant 0$. *Il existe un nombre* $\delta_1(\varepsilon, \tau) > 0$ *tel qu'on a dans la couche* $(\tau, \delta_1] \times E_n$ *les égalités suivantes*

$$u^i(t, x) = \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) u^j(\tau, y)\, dy, \tag{8}$$

$i = 1, \ldots, N$.

Démonstration. Introduisons les fonctions

$$\tilde{u}^i(t, x) = \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) u^j(\tau, y)\, dy, \tag{9}$$

$i = 1, \ldots, N$. On sait que

$$\Gamma_k(t, x; \tau, y) \leqslant \Gamma_{kk}(t, x; \tau, y), \tag{10}$$

$k = 1, \ldots, N$ (voir [6], théorème 2.3), où $\Gamma_k(t, x; \tau, y)$ est la solution fondamentale de l'équation (3). D'après le théorème 1 nous pouvons écrire les inégalités

$$\int_{E_n} \Gamma_i(t, x; \tau, y) u^i(\tau, y)\, dy \leqslant \tilde{u}^i(t, x) \leqslant u^i(t, x) \tag{11}$$

pour (t, x), $(\tau, x) \in \bar{H}$, $t > \tau$, $i = 1, \ldots, N$. Nous appliquons l'inégalité (4), en posant $\bar{x} = 0$, $\bar{t} = T$ et $0 < \varepsilon < T-\tau$, donc il existe des constantes positives Λ et ν telles que

$$\int_{E_n} \exp(-\nu|y|^2) u^i(s, y)\, dy \leqslant \frac{u^i(T, 0)}{\Lambda} \tag{12}$$

pour $0 \leqslant s \leqslant T-\varepsilon$, $i = 1, \ldots, N$. Il résulte de la dérnière inégalité et de (11) que

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{T-\varepsilon} ds \int_{E_n} \exp(-\nu |y|^2) u^i(s, y) dy < \infty, \\
(13) \qquad &\int_{\tau}^{T-\varepsilon} ds \int_{E_n} \exp(-\nu |y|^2) \widetilde{u}^i(s, y) dy < \infty,
\end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, N$. Posons $a = \nu$ et choisissons un nombre $\delta(\nu)$ de façon que l'inégalité (7) soit satisfaite. Nous allons démontrer que $\{\widetilde{u}^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ constitue une solution du système (1) régulière dans la couche $(\tau \leqslant t \leqslant \delta_1) \times E_n$ et satisfaisant aux conditions initiales

$$\widetilde{u}^i(\tau, x) = u^i(\tau, x) \tag{14}$$

pour $x \in E_n$, $i = 1, \ldots, N$, où $\delta_1 = \min\big(\delta(\nu) + \tau, T - \varepsilon\big)$. Fixons $x \in E_n$ et posons

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^i(t, x) = \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) h_R(y) u^j(\tau, y) dy + \\
+ \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) \big(1 - h_R(y)\big) u^j(\tau, y) dy = J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, N$, où h_R est la fonction définie dans la démonstration du théorème 1. Choisissons R de façon qu'on ait $|x| \leqslant K$, $R = 3K$ (voir l'inégalité (7)). D'une part, en vertu de la propriété de la matrice $\{\Gamma_{ij}(t, x; \tau, y)\}$ (voir [7], chap. 9) nous avons

$$\lim_{t \to \tau} J_1 = h_R(x) u^i(\tau, x) = u^i(\tau, x).$$

D'autre part, d'après les inégalités (7) et (12), à chaque $\eta > 0$ on peut faire correspondre un ϱ suffisamment petit tel que $0 < t - \tau < \varrho$ entraîne $J_2 < \eta$.

En s'appuyant sur les inégalités (7) et (12) on peut facilement montrer que les dérivées $u^i_{x_l x_j}, u^i_{x_l}, u^i_t$ $(i = 1, \ldots, N,\ l, j = 1, \ldots, n)$ se calculent en dérivant sous le signe de l'intégrale (voir [9], démonstration du théorème 1). Il en résulte que $\{\widetilde{u}^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ constitue une solution du système (1) dans la couche $(\tau, \delta_1] \times E_n$ et satisfaisant aux conditions initiales (14). La suite des fonctions $u^i(t, x)$, $i = 1, \ldots, N$ constitue une autre solution du même problème. Ces solutions satisfont aux inégalités (13). D'après le théorème 6 de [7] (chap, 9. sec. 5), le problème de Cauchy admet au plus une solution. On a donc $u^i(t, x) = \widetilde{u}^i(t, x)$, $i = 1, \ldots, N$ dans $[\tau, \delta_1] \times E_n$, c'est-à-dire les identités (8).

THÉORÈME 3. *Soient* $\{u_1^i(t,x)\}$, $\{u_2^i(t,x)\}$, $i=1,\ldots,N$, *des solutions du système* (1) *non négatives et régulières dans* $\bar{H}$, $u_1^i(0,x)=u_2^i(0,x)$ *dans* E_n, $i=1,\ldots,N$. *Alors* $u_1^i(t,x)=u_2^i(t,x)$ *pour* $(t,x)\in\bar{H}$, $i=1,\ldots,N$.

Démonstration. D'après le théorème 1 et (10) nous avons

$$\int_{E_n}\Gamma_i(t,x;\tau,y)u_l^i(\tau,y)dy\leqslant\int_{E_n}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{ij}(t,x;\tau,y)u_l^j(\tau,y)dy\leqslant u_l^i(t,x)$$

pour $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $x\in E_n$, $i=1,\ldots,N$, $l=1,2$. Appliquons l'inégalité (4) (limitation de P. Besala) en prenant $\bar{t}=T$, $\varepsilon=T/2$, $\bar{x}=0$; alors

$$\int_{E_n}u_l^i(\tau,y)\exp(-\tau|y|^2)dy\leqslant\frac{u_l^i(T,0)}{\Lambda}$$

pour $0\leqslant\tau\leqslant T/2$, $l=1,2$. Posons $v^i(t,x)=u_1^i(t,x)-u_2^i(t,x)$, $i=1,\ldots,N$. Les fonctions $v^i(t,x)$ sont des solutions régulières du problème de Cauchy $L^k(v^1,\ldots,v^N)=0$, $v^k(0,x)=0$, $k=1,\ldots,N$. Les dernières inégalités et $|v^i|\leqslant u_1^i+u_2^i$ entraînent

$$\int_0^{T/2}d\tau\int_{E_n}|v^i(\tau,y)|\exp(-\nu|y|^2)dy<\infty,$$

$i=1,\ldots,N$, donc d'après le théorème 6 de [7] (chap. 9, sec. 5) nous avons $v^i(t,x)=0$ dans $[0,T/2]\times E_n$. Enfin nous appliquons la même argumentation dans la couche $[T/2,T]\times E_n$.

§ 2. Nous passons à un procédé permettant d'établir la répresentation d'une solution du système (1) régulière et non négative, sous forme de la somme d'intégrales d'éléments de la matrice fondamentale par rapport aux mesures non négatives.

Dans ce but nous adoptons la définition suivante de la convergence d'une suite de mesures $m_p(E)$, $p=1,\ldots,$ définies sur les ensembles mesurables boréliens de E_n: nous disons que la suite de mesures $\{m_p(E)\}$ converge vers la mesure $m(E)$ si, $f(x)$ étant une fonction continue à support borné, on a

$$\lim_{p\to\infty}\int_E f(x)m_p(dx)=\int_E f(x)m(dx).$$

THÉORÈME 4. *Soit* $\{u^i(t,x)\}$ $(i=1,\ldots,N)$ *une solution du système* (1) *régulière et non négative dans la couche* H. *On a dans la couche* $(0,\delta_2]\times E_n$ (δ_2 *étant convenablement choisi*) *les égalités*

$$u^i(t,x)=\int_{E_n}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{ij}(t,x;0,y)\gamma^j(dy),\tag{15}$$

$i=1,\ldots,N$, *où* γ^j *sont des mesures non négatives.*

Démonstration. Comme dans le théorème précédent nous prouvons l'existence des nombres positifs β et M_1 tels que

$$(16) \qquad \int_{E_n} u^j(\tau, y)\exp(-\beta|y|^2)dy \leqslant \frac{u^j(T, 0)}{M_1}$$

pour $0 < \tau \leqslant T/2$, $j = 1, \ldots, N$. Il est facile de vérifier que pour $\beta' > \beta$ les intégrales (16) sont uniformément convergentes par rapport à $\tau \in (0, T/2]$ (voir [9] lemme 4). Nous pouvons donc supposer que les intégrales (16) sont uniformément convergentes. Nous faisons correspondre, pour tout $s \in (0, T/2]$, à chaque ensemble E (borélien) de E_n les mesures

$$m_s^i(E) = \int_E u^i(s, y)\exp(-\beta|y|^2)dy\,,$$

$i = 1, \ldots, N$. Les mesures $m_s^i(E)$ sont, d'après (16), uniformément bornées par rapport à $s \in (0, T/2]$. Il existe donc, d'après le théorème du choix, une suite $\{s_p\}$ telle que $\lim_{p\to\infty} s_p = 0$ et que les suites $\{m_{s_p}^i(E)\}$ sont convergentes vers des mesures $m^i(E)$ non négatives. Posons $\delta_2 = \min(T/2, \delta_1)$ (δ_1 est la constante intervenant dans la conclusion du théorème 2).

Soit (t, x) un point arbitraire de la couche $(0, \delta_2] \times E_n$. Nous pouvons supposer que $s_p < t$. Introduisons les fonctions

$$W_p^{ij}(y) = \Gamma_{ij}(t, x; s_p, y)\exp(\beta|y|^2)\,,$$

$i, j = 1, \ldots, N$, $p = 1, 2, \ldots$ En vertu de l'inégalité (5) les fonctions $W_p^{ij}(y)$ sont continues et uniformément bornées dans E_n. D'après le théorème 2 et la définition des mesures m_p^i, on a

$$(17) \quad \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} W_p^{ij}(y) m_p^j(dy) = \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x; s_p, y) u^j(s_p, y)dy = u^i(t, x)\,.$$

D'autre part, en vertu de la convergence uniforme des intégrales (16), pour chaque $\eta > 0$ on peut choisir un nombre $R_\eta < 0$ de façon qu'on ait

$$\int_{|k|\geqslant R_\eta} m_{s_p}^i(dy) \leqslant \eta\,.$$

Il résulte du théorème 3 de [9] (sec. 8) que

$$(18) \quad \lim_{p\to\infty} \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} W_p^{ij}(y) m_{s_p}^j(dy) = \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x; 0, y)\exp(\beta|y|^2) m^j(dy)\,.$$

Or, en prenant $[\exp(\beta|x|^2)\cdot m^j] = \gamma_j$, on déduit de (17) et (18) les égalités (15).

Nous faisons usage de la limitation inférieure de la solution fondamentale de l'équation (3) établie dans [8], p. 83.

Dans la couche H l'inégalité

(19) $$|x-y|^2 \leqslant b(t-\tau)\,,$$

où b est un nombre positif, entraîne l'inégalité

(20) $$\Gamma_k(t, x; \tau, y) \geqslant M(b)(t-\tau)^{-n/2}\,,$$

$k = 1, \ldots, N$, $M(b)$ étant une constante positive.

THÉORÈME 5. *Soit* $\{u^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ *une solution du système* (1) *régulière et non négative dans la couche* H. *Si*

(21) $$\lim_{t\to 0+} u^j(t, x) = 0$$

pour $x \neq y^j$, $j = 1, \ldots, N$, y^j *étant des points de* E_n, *on a dans la couche* $(0, \delta_2] \times E_n$ *les égalités*

$$u^i(t, x) = \sum_{j=1}^{N} A_j \cdot \Gamma_{ij}(t, x; 0, y^j)\,,$$

$i = 1, \ldots, N$, A_j *étant des constantes positives.*

Démonstration. D'après le théorème 4 on a dans la couche $(0, \delta_2] \times E_n$ les égalités (15). Nous allons démontrer que les égalités (21) impliquent, pour tout domaine borné D de E_n ne contenant pas le point y^j, l'égalité $\gamma^j(D) = 0$. Dans ce but considérons un point $x \in D$. Soit Q^j le cube

$$|y_i^j - x_i| \leqslant \left(\frac{b}{n}t\right)^{1/2}\,,$$

$i = 1, \ldots, n$. Nous supposons que le nombre t est assez petit pour qu'on ait $Q^j \subset D$. On a pour $y^j \in Q^j$ l'inégalité (19), avec $\tau = 0$, ce qui implique (20). En vertu de (20) et (15) nous avons les inégalités

$$M(b)t^{-n/2}\gamma^j(Q^j) \leqslant \int_{E_n} \Gamma_j(t, x; 0, y)\gamma^j(dy)$$
$$\leqslant \int_{E_n} \sum_{l=1}^{N} \Gamma_{jl}(t, x; 0, y)\gamma^l(dy) \leqslant u^j(t, x)$$

pour $0 < t < \delta_2$, d'où il résulte

(22) $$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma^j(Q^j)}{|Q^j|} = 0\,,$$

$j = 1, \ldots, N$, $|Q^j|$ étant la mesure lebesguienne de Q^j, égale à $(4btn^{-1})^{n/2}$. Il en résulte que la dérivée symétrique rectangulaire de $\gamma^j(E)$ est nulle en tout point x de D. Il est évident que $\gamma^j(E)$ est une fonction continue de E dans D (dans ce sens qu'elle tend vers zéro avec le diamètre de E).

En vertu des théorèmes du n° 51 à la p. 60, du n° 95 à la p. 97 et du n° 62 à la p. 68 de l'ouvrage [12], on a $\gamma^j(D) = 0$. Il en résulte que a $\gamma^j(E) = 0$ si l'ensemble E est borné, borélien et ne contient pas le point y^j. Donc, en vertu de (21), on a

$$u^i(t, x) = \int_{E_n} \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(t, x;\, 0, y)\gamma^j(dy) = \sum_{j=1}^{N} \gamma^j(y^j)\Gamma_{ij}(t, x;\, 0, y^j)\,,$$

$\gamma^j(y^j)$ étant la masse assignée par la mesure $\gamma^j(E)$ au point y^j.

Travaux cités

[1] D. G. Aronson and P. Besala, *Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients*, Coll. Math. 18 (1967), pp. 125-135.

[2] P. Besala, *On a certain property of the fundamental solution of a linear parabolic equation the last coefficient of which is unbounded*, Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys. 11 (4) (1963), pp. 155-158.

[3] — *Limitations of solutions of non-linear parabolic equations in unbounded domains*, Ann. Polon. Math. 18 (1965), pp. 25-47.

[4] W. Bodanko, *Les propriétés des solutions non négatives de l'équation linéaire normale parabolique*, ibidem 20 (1968), pp. 107-117.

[5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques*, XIII, livre VI, Intégration, Paris 1952.

[6] J. Chabrowski, *Les solutions non négatives d'un système parabolique d'équations*, Ann. Polon. Math. 19 (1967), pp. 193-197.

[7] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Englewood Cliffs 1964.

[8] А. М. Ильин, А. С. Калашников и О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка параболического типа*, Усп. Мат. Наук 17, вып. 3 (1962), pp. 3-146.

[9] M. Krzyżański, *Sur les solutions non négatives de l'équation linéaire normale parabolique*, Revue Roumaine Math. Pures et Appliquées 9 (5) (1964), pp. 393-408.

[10] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche Math. 7 (1958), pp. 153-185.

[11] Ch. de la Vallée-Poussin, *Intégrale de Lebesgue*, Paris 1916.

[12] D. Widder, *Positive temperatures on an infinite rod*, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1) (1944), pp. 85-95.

Reçu par la Rédaction le 4. 6. 1968