ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXI (1975)

Sur une famille bi-paramétrique de schémas des différences finies pour l'équation parabolique sans dérivées mixtes

par Marian Malec (Cracovie)

Résumé. Dans la note, on montre que le schéma des différences finies implicite pour une équation parabolique de la forme

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_0} = f\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$$

avec les conditions aux limites

$$u(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{pour } x_i = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$u(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \psi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{pour } x_i = \sigma \ (i = 1, \ldots, n)$$

est convergent.

Le schéma implicite mentionné dépend de deux paramètres et on l'obtient en remplaçant dans l'équation (1) la dérivée par rapport à x_0 par une différence ascendante, les dérivées du premier ordre par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ — par une combinaison linéaire des différences centrales à deux niveaux temporels voisins des coefficients ϱ et $1-\varrho$, et les dérivées du second ordre — par une combinaison linéaire à deux niveaux temporels voisins des coefficients ω et $1-\omega$.

1. L'explication de nombreux precessus relatifs au transfert de masse et de chaleur repose sur la résolution d'une équation partielle du type parabolique (généralement non linéaire) qu'on effectue pour une décomposition donnée de la fonction cherchée aux limites du domaine établi (on parle alors d'une condition à la limite de première espèce). Cependant, l'obtention d'une solution exacte est d'ordinaire impossible. On utilise de préférence les méthodes des différences finies, qui dans le cas des équations différentielles non linéaires, nécessitent la résolution de systèmes d'équations algébriques, en général aussi non linéaires. Il faut noter que dans de nombreux cas, les schémas explicites sont très commodes, car ils conduisent à des systèmes algébriques simples, où dans chaque équation il n'y a qu'une seule inconnue par rapport à laquelle l'équation donnée peut être résolue. Les schémas explicites ont cependant un défaut — leur convergence est garantie si, entre autres, le rapport k/h^2 ne dépasse pas une certaine constante dépendant du second membre de l'équation différentielle. Nous pouvons indiquer des processus physiques concrets [2] pour lesquels un pas spatial réel h admis conduit à un pas temporel k irréellement petit. Pour de tels problèmes les schémas explicites deviennent inutiles et il s'avère nécessaire de chercher d'autres schémas qui, étant convergents, donneraient en même temps une plus grande liberté de choix des pas h et k. Bien qu'ils conduisent à des systèmes algébriques (d'où résultent de plus grandes difficultés de calcul), ils peuvent être utilisés dans des "situations difficiles", c'est-à-dire quand on ne connaît pas de solution exacte et où un schéma explicite ne peut pas être employé.

Dans la présente note, on montre que le schéma implicite (voir (4.3)) pour une équation parabolique de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = f\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) \tag{1.1}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{pour } x_i = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, n), \\ u(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \psi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{pour } x_i = \sigma \ (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.2}$$

est convergent (théorème 1).

Le schéma implicite mentionné dépend de deux paramètres et on l'obtient en remplaçant dans l'équation (1.1) la dérivée par rapport à x_0 par une différence ascendante, les dérivées du premier ordre par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ — par une combinaison linéaire des différences centrales à deux niveaux temporels voisins des coefficients ϱ et $1-\varrho$, et les dérivées du second ordre — par une combinaison linéaire des différences centrales pour la seconde dérivée à deux niveaux temporels voisins des coefficients ω et $1-\omega$.

Notons que si $\varrho = \omega = 0$, le résultat obtenu est identique à celui obtenu dans [1]. Le nôtre généralise aussi celui obtenu dans [2], où l'on considérait les schémas des différences finies dans lesquels $\varrho = \omega$ et où l'une des conditions concernant le second membre de l'équation (1.1) avait la forme

$$0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial u} \leqslant L = \text{const} \tag{1.3}$$

en chaque point de l'hyperparallélépipède analysé, tandis que dans le théorème 1 donné ci-dessous on n'exige que $|\partial f/\partial u| \leqslant L$.

2. Considérons dans l'espace R^{1+n} un ensemble de points nodaux dont les coordonnées sont

$$x_0^{m_0} = m_0 k, \quad x_i^{m_i} = m_i h \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

où $m_0 = 0, 1, \ldots, N_0$, $m_i = 0, 1, \ldots, N$ $(i = 1, \ldots, n)$, $0 < k = \tau/N_0$, $0 < h = \sigma/N$, N_0 et N sont des nombres naturels.

Nous désignerons le point nodal $(x_0^{m_0}, x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n})$ par x^M où $M = (m_0, m) = (m_0, m_1, \ldots, m_n)$. Dans l'ensemble

$$E = [0, \tau] \times [0, \sigma]^n \tag{2.2}$$

nous considérons également les points nodaux générés par les suites d'indices suivantes:

$$\begin{aligned} i(M) &= (m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i+1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \quad (i=0, 1, \ldots, n), \\ -i(M) &= (m_0, m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i-1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \quad (i=1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nous supposons qu'à chaque point nodal $x^M \in E$ on a fait correspondre un nombre v^M et nous introduisons la notation

$$\begin{aligned} v^{MO} &= \frac{1}{k}(v^{O(M)} - v^M), \\ v_\varrho^{Mi} &= \frac{1}{2h}[\varrho(v^{i(O(M))} - v^{-i(O(M))}) + (1-\varrho)(v^{i(M)} - v^{-i(M)})], \\ v_\omega^{Mii} &= \frac{1}{h^2}[\omega(v^{i(O(M))} - 2v^{O(M)} + v^{-i(O(M))}) + (1-\omega)(v^{i(M)} - 2v^M + v^{-i(M)})] \\ &\qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

où ϱ et ω sont les nombres réels quelconques et soit

$$v_\varrho^{MI} = (v_\varrho^{M1}, \ldots, v_\varrho^{Mn}), \qquad v_\omega^{MII} = (v_\omega^{M11}, \ldots, v_\omega^{Mnn}). \tag{2.5}$$

3. Dans tout notre travail nous supposerons que les conditions suivantes sont satisfaites:

1° la fonction scalaire $f(x, u, q, w)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ est de classe C^1 dans l'ensemble $D = E \times R^{1+2n}$ (voir (2.2)) et satisfait dans cet ensemble aux conditions

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leqslant L, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial q_i}\right| \leqslant \Gamma, \quad 0 < g \leqslant \frac{\partial f}{\partial w_i} \leqslant G \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

(L, Γ, g, G sont des nombres);

2° les nombres $\varrho \in [0, 1]$, $\omega \in [0, 1]$ ainsi que les pas h et k sont tels que

$$\frac{\omega g}{h} - \frac{\varrho\Gamma}{2} \geqslant 0, \quad \frac{(1-\omega)g}{h} - \frac{(1-\varrho)\Gamma}{2} \geqslant 0, \quad \frac{2(1-\omega)nG}{h^2} - \frac{1}{k} \leqslant 0; \tag{3.2}$$

3° la fonction scalaire $u(x)$ est de classe C^2 dans l'ensemble E et vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n}\right) \quad \text{pour } x \in \operatorname{Int} E \tag{3.3}$$

et les conditions aux limites

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} u(x) &= \varphi_i(x) \quad \text{pour } x_i = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, n, x \in E), \\ u(x) &= \psi_i(x) \quad \text{pour } x_i = \sigma \ (i = 1, \ldots, n, x \in E). \end{aligned}$$

4. Désignons par u^M la valeur de la solution $u(x)$ du problème différentiel (3.3), (3.4) au point nodal $x^M \in E$ généré par une suite d'indices $M = (m_0, m_1, \ldots, m_n)$. On peut montrer que

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &u^{MO} = f(x^M, u^M, u_\varrho^{MI}, u_\omega^{MII}) + \eta_{\varrho\omega}^M, \\ &\lim_{h\to 0} \varepsilon_{\varrho\omega}(h) = 0, \qquad \varepsilon_{\varrho\omega}(h) = \max_M |\eta_{\varrho\omega}^M| \end{aligned}$$

pour tous les points nodaux $x^M \in \mathrm{Int} E$, et

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} u^M &= \varphi_i(x^M) \quad \text{pour } m_i = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, n), \\ u^M &= \psi_i(x^M) \quad \text{pour } m_i = N \ (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

pour tous les points nodaux $x^M \in E$.

Les grandeurs u^{MO}, u_ϱ^{MI}, u_ω^{MII} sont définies pour u^M comme le sont les grandeurs v^{MO}, v_ϱ^{MI}, v_ω^{MII} pour v^M (voir (2.4), (2.5)).

La formule (4.1) résulte de (3.3) puisque $u(x)$ est une solution de classe C^2 de l'équation (3.3) et le second membre de (3.3) est de classe C^1.

Nous définissons l'approximation v^M de la solution du problème (3.3), (3.4) au point nodal $x^M \in E$ comme il suit:

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} v^{MO} &= f(x^M, v^M, v_\varrho^{MI}, v_\omega^{MII}) && \text{pour } x^M \in \mathrm{Int} E, \\ v^M &= \varphi_i(x^M) && \text{pour } m_i = 0 \ (i = 0, 1, \ldots, n \ \ x^M \in E), \\ v^M &= \varphi_i(x^M) && \text{pour } m_i = N \ \ (i = 1, \ldots, n, \ x^M \in E). \end{aligned}$$

La formule (4.3) détermine une famille bi-paramétrique de schémas des différences finies puisque nous admettons que pour toutes les valeurs ϱ, ω ($\varrho \in (0, 1]$ ou $\omega \in (0, 1]$), m_0 ($m_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$) le système (4.3) possède exactement une seule solution, si tous les nombres v^M sont connus.

5. LEMME 1. *Si les nombres* R^{m_0} ($m_0 = 0, 1, \ldots$) *satisfont aux inégalités*

$$(5.1)\qquad R^{m_0 0} \leqslant K R^{m_0} + \varepsilon \qquad (m_0 = 0, 1, \ldots)$$

et à la condition initiale $R^0 = 0$ *où* $R^{m_0 0} = \dfrac{1}{k}(R^{m_0+1} - R^{m_0})$ ($m_0 = 0, 1, \ldots$), $0 < k = \text{const}$, $0 < K = \text{const}$, *il vient*

$$(5.2)\qquad R^{m_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{K}(e^{Kkm_0} - 1) \qquad (m_0 = 0, 1, \ldots),$$

La démonstration de ce lemme s'opère directement par induction mathématique.

6. LEMME 2. *Si les conditions du section 3 sont satisfaites, les approximations v^M vérifient le système* (4.3), *tandis que les nombres u^M satisfont aux conditions* (4.1) *et* (4.2) *ainsi qu'à*

$$(6.1)\quad r^M = u^M - v^M, \qquad s^{m_0} = \max_m r^M, \qquad z^{m_0} = \min_m r^M, \qquad R^{m_0} = \max_m |r^M|$$

pour des indices $M = (m_0, m) = (m_0, \ldots, m_n)$ tels que $x^M \in E$, alors $s^0 = z^0 = R^0 = 0$ et

$$(6.2)\qquad s^{m_0 0} \leqslant LR^{m_0} + \varepsilon_{\varrho\omega}(h), \qquad z^{m_0 0} \geqslant -LR^{m_0} - \varepsilon_{\varrho\omega}(h)$$

pour $m_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$.

Démonstration. Les conditions $s^0 = z^0 = R^0 = 0$ résultent de (4.2) et (4.3), car $r^M = u^M - v^M = 0$ lorsque $m_0 = 0$.

Nous prouverons la première des inégalités (6.2). Les grandeurs s^{m_0+1} et s^{m_0} sont atteintes en certains points nodaux de l'ensemble E, donc

$$(6.3)\qquad \begin{aligned} s^{m_0+1} &= r^{m_0+1, a} = r^{O(A)}, \\ s^{m_0} &= r^{m_0, b} = r^B, \end{aligned}$$

où $x^A \in E$, $x^B \in E$. De la définition $s^{m_0 0} = \frac{1}{k}(s^{m_0+1} - s^{m_0})$ et de (6.3) il s'ensuit que

$$(6.4)\qquad s^{m_0 0} = \frac{1}{k}(r^{O(A)} - r^A) + \frac{1}{k}(r^A - r^B) = r^{A0} + \frac{1}{k}(r^A - r^B).$$

En tenant maintenant compte des relations (4.1) et (4.3) et en appliquant le théorème de la moyenne, nous obtenons

$$(6.5)\qquad \begin{aligned} s^{m_0 0} &= \eta^A_{\varrho\omega} + f(x^A, u^A, u^{AI}_\varrho, u^{AII}_\omega) - f(x^A, v^A, v^{AI}_\varrho, v^{AII}_\omega) + \frac{1}{k}(r^A - r^B) \\ &= \eta^A_{\varrho\omega} + \frac{\partial f}{\partial u}(-) r^A + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i}(-) \frac{1}{2h}[\varrho(r^{i(O(A))} - r^{-i(O(A))}) + \\ &\quad + (1-\varrho)(r^{i(A)} - r^{-i(A)})] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial w_i}(-) \frac{1}{h^2}[\omega(r^{i(O(A))} - 2r^{O(A)} + \\ &\quad + r^{-i(O(A))}) + (1-\omega)(r^{i(A)} - 2r^A + r^{-i(A)})] + \frac{1}{k}(r^A - r^B) \end{aligned}$$

où les dérivées sont prises en des points convenables $(-)$.

En groupant convenablement les expressions du second membre de l'égalité (6.5) on a

$$
\begin{aligned}
(6.6)\qquad s^{m_0 0} = \eta^{A}_{\varrho\omega} + \frac{\partial f}{\partial u}(-)r^{A} + \\
&+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{\omega}{h}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) + \frac{\varrho}{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}(-)\Big](r^{i(O(A))} - r^{O(A)}) + \\
&+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{\omega}{h}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) - \frac{\varrho}{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}(-)\Big](r^{-i(O(A))} - r^{O(A)}) + \\
&+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1-\omega}{h}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) + \frac{1-\varrho}{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}(-)\Big](r^{i(A)} - r^{B}) + \\
&+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1-\omega}{h}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) - \frac{1-\varrho}{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}(-)\Big](r^{-i(A)} - r^{B}) + \\
&+ \Big[\frac{2(1-\omega)}{h^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) - \frac{1}{k}\Big](r^{B} - r^{A}).
\end{aligned}
$$

Notons que des conditions (3.1) et (3.2) résultent les inégalités

$$
(6.7)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\omega}{h}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) + \frac{\varrho}{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}(-) \geqslant \frac{\omega g}{h} - \frac{\varrho\Gamma}{2} \geqslant 0, \\
&\frac{\omega}{h}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) - \frac{\varrho}{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}(-) \geqslant \frac{\omega g}{h} - \frac{\varrho\Gamma}{2} \geqslant 0, \\
&\frac{1-\omega}{h}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) + \frac{1-\varrho}{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}(-) \geqslant \frac{(1-\omega)g}{h} - \frac{(1-\varrho)\Gamma}{2} \geqslant 0, \\
&\frac{1-\omega}{h}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) - \frac{1-\varrho}{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}(-) \geqslant \frac{(1-\omega)g}{h} - \frac{(1-\varrho)\Gamma}{2} \geqslant 0, \\
&\frac{2(1-\omega)}{h^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial w_i}(-) - \frac{1}{k} \leqslant \frac{2(1-\omega)}{h^2}nG - \frac{1}{k} \leqslant 0,
\end{aligned}
$$

tandis que (6.3) entraîne

$$
(6.8)\qquad
\begin{aligned}
&r^{i(O(A))} - r^{O(A)} \leqslant 0, \quad r^{-i(O(A))} - r^{O(A)} \leqslant 0, \quad r^{i(A)} - r^{B} \leqslant 0, \\
&r^{-i(A)} - r^{B} \leqslant 0, \quad r^{B} - r^{A} \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Compte tenu des inégalités (6.7) et (6.8) nous obtenons dans (6.6),

$$s^{m_0 0} \leqslant \eta^{A}_{\varrho\omega} + \frac{\partial f}{\partial u}(-) r^{A} \leqslant L|r^{A}| + \varepsilon_{\varrho\omega}(h) \tag{6.9}$$

(voir (4.1)). Mais $|r^{A}| \leqslant R^{m_0}$ (voir (6.1)), donc

$$s^{m_0 0} \leqslant L \cdot R^{m_0} + \varepsilon_{\varrho\omega}(h) \qquad (m_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1). \tag{6.10}$$

La démonstration de la première des inégalités (6.2) est ainsi terminée. La démonstration de la seconde inégalité (6.2) est tout à fait analogue.

Le lemme 2 est donc prouvé en entier.

7. LEMME 3. *Si les nombres R^{m_0} sont definis par la formule* (6.1) *et les hypothèses du lemme* 2 *sont satisfaites, alors*

$$R^{m_0 0} \leqslant L \cdot R^{m_0} + \varepsilon_{\varrho\omega}(h) \qquad (m_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1) \tag{7.1}$$

et $R^0 = 0$, où $\varepsilon_{\varrho\omega}(h)$ est défini par la formule (4.1).

Démonstration. La condition $R^0 = 0$ est satisfaite en vertu du lemme 2.

Afin de montrer (7.1) notons que $R^{m_0} = \max(s^{m_0}, -z^{m_0})$ pour $m_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$. Donc, en vertu du lemme 2 on a

$$R^{m_0 0} \leqslant \max(s^{m_0 0}, -z^{m_0 0}) \leqslant L \cdot R^{m_0} + \varepsilon_{\varrho\omega}(h) \qquad (m_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1) \tag{7.2}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 3.

8. THÉORÈME 1. *Si les conditions du lemme* 2 (*section* 6) *sont satisfaites,*

1° *l'erreur de la méthode des différences finies* (4.3) *peut être estimée comme il suit:*

$$|r^{M}| \leqslant \frac{\varepsilon_{\varrho\omega}(h)}{L}(e^{Lkm_0} - 1) \qquad (m_0 = 0, 1, \ldots, N_0) \tag{8.1}$$

dans tous les points nodaux de l'ensemble E,

2° *la méthode des différences finies* (4.3) *est convergente, c'est-à-dire*

$$\lim_{h \to 0} r^{M} = 0. \tag{8.2}$$

Démonstration. Comme (8.2) résulte de (8.1), il suffit de montrer (8.1).

Des lemmes 3 et 1 on obtient

$$R^{m_0} \leqslant \frac{\varepsilon_{\varrho\omega}(h)}{L}(e^{Lkm_0} - 1) \qquad (m_0 = 0, 1 \ldots, N_0). \tag{8.3}$$

Mais il résulte de la définition (6.1) que $|r^{M}| \leqslant R^{m_0}$, donc

$$|r^{M}| \leqslant \frac{\varepsilon_{\varrho\omega}(h)}{L}(e^{Lkm_0} - 1) \qquad (m_0 = 0, 1, \ldots, N_0), \tag{8.4}$$

Ainsi la démonstration du théorème 1 est achevée.

Travaux cités

[1] Z. Kowalski, *A difference method for a non-linear parabolic differential equation without mixed derivatives*, Ann. Polon. Math. 20 (1968), p. 167–177.

[2] M. Malec, *Sur une famille de schémas des différences finies pour une équation différentielle partielle sans dérivées mixtes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astronom. et phys. 21 (1973), p. 833–842.

Reçu par la Rédaction le 17. 4. 1973