ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Das Iterationsverfahren bei natürlichen Eigenwertproblemen

von W. DÜCK (Berlin)

In früheren Mitteilungen [1], [2] [1] wurde die von Kamke verwendete Beschreibungsweise von Eigenwertaufgaben auf natürliche Eigenwertprobleme ausgedehnt. Es ist von grundlegender Bedeutung, Verfahren zur numerischen Lösung natürlicher Eigenwertprobleme anzugeben. Obwohl solche Lösungsverfahren der von Lehmann entwickelten Eigenwerttheorie entspringen, soll hier im Anschluß an die Untersuchungen in [1], [2] das Iterationsverfahren für natürliche Eigenwertprobleme entwickelt werden. Neben dem bereits beschriebenen Ritz-Galerkinschen Verfahren [3] steht uns damit ein zweites Näherungsverfahren zur Lösung natürlicher Eigenwertprobleme zur Verfügung. Mit der Untersuchung des Iterationsverfahrens wird zugleich die Ausdehnung der Kamkeschen Eigenwerttheorie auf natürliche Eigenwertprobleme abgeschlossen.

1. Formulierung des Iterationsverfahrens, Schwarzsche Konstanten und Quotienten. Vorgelegt sei wie in [1] das natürliche Eigenwertproblem

$$My-\lambda Ny=0\,,$$
$$W_j(y)=0\,,\qquad j=1,\dots,k\,,$$
$$R_j^M(y)=\lambda R_j^N(y)\,,\qquad j=1,\dots,2m-k\,.$$

Ausgehend von einer beliebigen streng zulässigen Funktion $v_0(x)$, für die $(v_0,v_0)_N\neq 0$ gilt, wird eine Folge $\{v_n(x)\}$ von Funktionen aus $\bar{Z}$ nach der Iterationsvorschrift

$$Mv_n=Nv_{n-1}\,,\tag{1}$$
$$W_j(v_n)=0\,,\qquad j=1,\dots,k\,,$$
$$R_j^M(v_n)=R_j^N(v_{n-1})\,,\qquad j=1,\dots,2m-k\tag{2}$$

konstruiert. Setzen wir das Eigenwertproblem als eigentlich definit in $\bar{Z}$ voraus, kann $\lambda=0$ kein Eigenwert sein. $v_n(x)$ gehört zu $\bar{Z}$ und ist, wie

[1] Die in [1], [2] angegebenen Voraussetzungen, Bezeichnungen und Sätze werden als bekannt angenommen.

in Satz 1 gezeigt wird, eine streng zulässige Funktion, für die nicht gleichzeitig $Nv_n \equiv 0$ und $R_j^N(v_n) = 0$ für alle j gilt.

Die Ausnutzung dieser erst in Satz 1 bewiesenen Aussagen führt uns zu der Erkenntnis, daß die obige Randwertaufgabe für alle $n = 1, 2, \ldots$ eindeutig lösbar ist.

Mit Hilfe der Iterationsfolge $\{v_n(x)\}$ definieren wir Schwarzsche Konstanten

$$a_k = (v_i, v_{k-i})_N, \qquad 0 \leqslant i \leqslant k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Die Zahlen a_k sind von der Wahl des i innerhalb der angegebenen Grenzen unabhängig; denn es gilt wegen (1), (2) und den in [1] angegebenen grundlegenden Verknüpfungen für die natürlichen Produktbildungen

$$\begin{aligned}
a_k &= [v_i, v_{k-i}] - \mathfrak{R}^N(v_{k-i})\,\mathfrak{x}(v_i)\,,\\
&= \langle v_i, v_{k-i+1}\rangle - \mathfrak{R}^N(v_{k-i})\,\mathfrak{x}(v_i)\,,\\
&= (v_i, v_{k-i+1})_M + \{\mathfrak{R}^M(v_{k-i+1}) - \mathfrak{R}^N(v_{k-i})\}\,\mathfrak{x}(v_i)\,,\\
&= (v_{k-i+1}, v_i)_M\,,\\
&= \langle v_{k-i+1}, v_i\rangle - \mathfrak{R}^M(v_i)\,\mathfrak{x}(v_{k-i+1})\,,\\
&= [v_{k-i+1}, v_{i-1}] - \mathfrak{R}^M(v_i)\,\mathfrak{x}(v_{k-i+1})\,,\\
&= (v_{k-i+1}, v_{i-1})_N - \{\mathfrak{R}^M(v_i) - \mathfrak{R}^N(v_{i-1})\}\,\mathfrak{x}(v_{k-i+1})\,,\\
&= (v_{i-1}, v_{k-i+1})_N\,.
\end{aligned}$$

Damit können wir für die Schwarzschen Konstanten

$$a_{2n} = (v_n, v_n)_N\,, \tag{4}$$

$$a_{2n+1} = (v_n, v_{n+1})_N\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

schreiben. Dem obigen entnehmen wir auch die Gültigkeit der Darstellungen

$$a_{2n} = (v_n, v_{n+1})_M\,, \tag{6}$$

$$a_{2n+1} = (v_{n+1}, v_{n+1})_M\,. \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Satz 1. *Die Funktionen $v_1(x), v_2(x), \ldots$ der Iterationsfolge einer in $\bar{Z}$ eigentlich definiten Aufgabe verschwinden im Grundintervall nicht identisch und es kann nicht gleichzeitig $Nv_i \equiv 0$ und $R_j^N(v_i) = 0$ für alle j und $i = 1, 2, \ldots$ gelten.*

Beweis. Wäre $v_1(x) \equiv 0$, müßte wegen (1), (2) $Nv_0 \equiv 0$ und $R_j^N(v_0) = 0$ für alle j sein. Das würde zu

$$(v_0, v_0)_N = [v_0, v_0] - \mathfrak{R}^N(v_0)\,\mathfrak{x}(v_0) = 0$$

führen, was unserer Annahme $(v_0, v_0)_N \neq 0$ widerspricht. $v_1(x)$ ist damit eine streng zulässige Funktion. Wäre weiterhin $Nv_1 \equiv 0$ und $R_j^N(v_1) = 0$ für alle j, ergäbe sich wegen (5)

$$a_1 = (v_0, v_1)_N = \langle v_0, v_1\rangle - \mathfrak{R}^N(v_1)\,\mathfrak{x}(v_0) = 0\,.$$

Das steht zu (7) und der eigentlichen Definitheit des Problems im Widerspruch. Dann folgt auch die Behauptung für alle n.

SATZ 2. *Ist das natürliche Eigenwertproblem eigentlich definit in $\bar{Z}$, sind die Schwarzschen Konstanten mit ungeradem Index positiv. Ist das Problem sogar volldefinit in $\bar{Z}$, sind sämtliche Schwarzschen Konstanten positiv.*

Der Beweis ergibt sich aus (4), (7) und der eigentlichen Definitheit bzw. Volldefinitheit.

Die Schwarzschen Quotienten einer in $\bar{Z}$ eigentlich definiten Aufgabe werden durch die Gleichung

$$\bar{\mu}_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

definiert. Ist die Aufgabe sogar volldefinit in $\bar{Z}$, berechnet man besser die Schwarzschen Quotienten

$$\mu_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

SATZ 3. *Ist das Eigenwertproblem eigentlich definit in $\bar{Z}$, sind die Schwarzschen Quotienten $\bar{\mu}_n$ positiv und nehmen monoton ab. Bei in $\bar{Z}$ volldefiniten Aufgaben gilt diese Aussage sogar für die Schwarzschen Quotienten μ_n.*

Beweis. Die Positivheit der Schwarzschen Quotienten folgt aus Satz 2 und (8), (9). Wegen der Schwarzschen Ungleichung ist weiter bei volldefiniten Aufgaben

$$\{a_{2n}\}^2 = \{(v_n, v_{n+1})_M\}^2 \leqslant (v_n, v_n)_M (v_{n+1}, v_{n+1})_M = a_{2n-1} a_{2n+1},$$
$$\{a_{2n+1}\}^2 = \{(v_n, v_{n+1})_N\}^2 \leqslant (v_n, v_n)_N (v_{n+1}, v_{n+1})_N = a_{2n} a_{2n+2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt $\mu_{2n+1} \leqslant \mu_{2n}$, $\mu_{2n+2} \leqslant \mu_{2n+1}$ und die Monotonie der Folge $\{\mu_n\}$. Ebenso ergibt sich mit der eigentlichen Definitheit der Aufgabe

$$\{a_{2n+1}\}^2 = \{(v_n, v_{n+2})_M\}^2 \leqslant (v_n, v_n)_M (v_{n+2}, v_{n+2})_M = a_{2n-1} a_{2n+3}$$

und damit $\bar{\mu}_{n+1} \leqslant \bar{\mu}_n$.

2. Beziehungen zwischen den Fourier-Koeffizienten. Im Gegensatz zu [1], [2] denken wir uns die Eigenwerte der Größe ihrer Beträge nach geordnet

$$0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$$

Mehrfache Eigenwerte werden entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Nach [1] existieren unendlich viele Eigenwerte, bei volldefiniten Aufgaben sogar nur positive Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenfunktionen $y_i(x)$ sollen im folgenden stets entsprechend der Gleichung

$$(10)\qquad (y_i, y_j)_N = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j \\ 1 & \text{für} \quad i = j, \quad \operatorname{sgn}\lambda_i > 0, \\ -1 & \text{für} \quad i = j, \quad \operatorname{sgn}\lambda_i < 0, \end{cases}$$

orthonormiert sein. Für beliebige streng zulässige Funktionen $v(x)$ gilt die Gleichung

$$(11)\qquad (v, y_i)_M - \lambda_i(v, y_i)_N = 0 .$$

Definieren wir die Fourier-Koeffizienten $c_i^{(n)}$ der Iterationsfunktion $v_i(x)$ im Sinne von [2] durch die Gleichung

$$(12)\qquad c_i^{(n)} = \varepsilon_i(v_n, y_i)_N, \qquad \varepsilon_i = \operatorname{sgn}\lambda_i ,$$

finden wir wegen (1), (2), (11), (12) und aus [1] bekannten Beziehungen für die natürlichen Produktbildungen

$$\begin{aligned} c_i^{(n)} &= \frac{1}{|\lambda_i|}(v_n, y_i)_M = \frac{1}{|\lambda_i|}(y_i, v_n)_M = \frac{1}{|\lambda_i|}\langle y_i, v_n\rangle - \frac{1}{|\lambda_i|}\mathfrak{R}^M(v_n)\mathfrak{x}(y_i) \\ &= \frac{1}{|\lambda_i|}[y_i, v_{n-1}] - \frac{1}{|\lambda_i|}\mathfrak{R}^M(v_n)\mathfrak{x}(y_i) \\ &= \frac{1}{|\lambda_i|}(y_i, v_{n-1})_N - \frac{1}{|\lambda_i|}\{\mathfrak{R}^M(v_n) - \mathfrak{R}^N(v_{n-1})\}\mathfrak{x}(y_i) \\ &= \frac{1}{|\lambda_i|}(y_i, v_{n-1})_N = \frac{1}{\lambda_i}c_i^{(n-1)} . \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Fourier-Koeffizienten der Ausgangsfunktion $v_0(x)$ mit c_i, gilt die Gleichung

$$(13)\qquad c_i^{(n)} = \frac{1}{\lambda_i}c_i^{(n-1)} = \frac{1}{\lambda_i^n}c_i ,$$

die uns die Folgerung gestattet:

SATZ 4. *Ist die Ausgangsfunktion $v_0(x)$ der Iterationsfolge orthogonal zu den $r-1$ ersten Eigenfunktionen $y_1(x), \ldots, y_{r-1}(x)$*

$$(14)\qquad c_i = \varepsilon_i(v_0, y_i)_N = 0, \qquad i = 1, \ldots, r-1 ,$$

sind alle Funktionen der Iterationsfolge zu diesen Eigenfunktionen orthogonal. Wenn $v_0(x)$ zur r-ten Eigenfunktion $y_r(x)$ nicht orthogonal ist

$$(15)\qquad c_r = \varepsilon_r(v_0, y_r)_N \neq 0 ,$$

sind auch alle übrigen Iterationsfunktionen zu $y_r(x)$ nicht orthogonal.

3. Konvergenz der Folge der Schwarzschen Quotienten. Für in $\bar{Z}$ eigentlich definite Aufgaben gilt nach [2] die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung, die für die Iterationsfunktionen $v_0(x)$, $v_n(x)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i c_i c_i^{(n)} = (v_0, v_n)_N$$

lautet (²). Wählen wir die Ausgangsfunktion so, daß (14), (15) gilt, können wir die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung in der Form

$$\sum_{i=r}^{\infty} \varepsilon_i c_i c_i^{(n)} = (v_0, v_n)_N$$

schreiben. Daraus folgt wegen (3), (13)

$$a_n = (v_0, v_n)_N = \sum_{i=r}^{\infty} \varepsilon_i \frac{c_i^2}{|\lambda_i|^n}, \qquad a_{2n+1} = (v_0, v_{2n+1})_N = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{|\lambda_i|^{2n+1}}.$$

Bilden wir μ_{n+1} nur für volldefinite Aufgaben, finden wir

$$\mu_{n+1} = \lambda_r \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty} c_i^2 \left[\dfrac{\lambda_r}{\lambda_i}\right]^n}{\sum\limits_{i=r}^{\infty} c_i^2 \left[\dfrac{\lambda_r}{\lambda_i}\right]^{n+1}}, \qquad \bar{\mu}_{n+1} = \lambda_r^2 \frac{\sum\limits_{i=r}^{\infty} c_i^2 \left[\dfrac{|\lambda_r|}{|\lambda_i|}\right]^{2n-1}}{\sum\limits_{i=r}^{\infty} c_i^2 \left[\dfrac{|\lambda_r|}{|\lambda_i|}\right]^{2n+1}}.$$

Daraus ergibt sich die Konvergenz der Folge der Schwarzschen Quotienten.

Satz 5. *Genügt die Ausgangsfunktion der Iterationsfolge den Beziehungen* (14), (15), *konvergiert bei in $\bar{Z}$ eigentlich definiten Aufgaben die Folge der Schwarzschen Quotienten $\{\bar{\mu}_n\}$ gegen das Quadrat des r-ten Eigenwertes λ_r. Ist das Problem sogar volldefinit in $\bar{Z}$, konvergiert auch die Folge der Schwarzschen Quotienten $\{\mu_n\}$, und zwar gegen den r-ten Eigenwert λ_r.*

Im allgemeinen wird die Ausgangsfunktion $v_0(x)$ nicht zur ersten Eigenfunktion orthogonal sein. Dann konvergiert die Folge $\{\bar{\mu}_n\}$ gegen das Quadrat des betragsmäßig kleinsten Eigenwertes und die Folge $\{\mu_n\}$ gegen den kleinsten Eigenwert.

4. Konvergenz der Iterationsfunktionen. In [2] wurde gezeigt, daß sich jede streng zulässige Funktion $u(x)$ in eine Fourier-Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln läßt, wenn das Eigenwertproblem eigentlich definit in $\bar{Z}$ ist (³)

$$u(x) = \sum_i b_i y_i(x) + d_0(x).$$

(²) In [2] wurde die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung unter der Voraussetzung der eigentlichen Definitheit in Z bewiesen. Man erkennt aber, daß sie auch für Funktionen aus $\bar{Z}$ für in $\bar{Z}$ eigentlich definite Aufgaben richtig ist. Das gilt auch für die unten verwendeten Entwicklungssätze.

(³) Beachte die Bemerkung in Fußnote (²).

b_i bezeichnet die Fourier-Koeffizienten der streng zulässigen Funktion $u(x)$, $d_0(x)$ eine in Z^* gelegene Nullfunktion. Ist die Aufgabe im Sinne von [2] abgeschlossen oder im verallgemeinerten Sinne definit, verschwindet die Nullfunktion identisch. Wir wollen zeigen, daß wir für iterierte Funktionen auf diese zusätzlichen Voraussetzungen verzichten können.

Satz 6. *Die Nullfunktion in der Fourier-Entwicklung nach Eigenfunktionen einer in $\bar{Z}$ eigentlich definiten Aufgabe verschwindet für die iterierten Funktionen $v_1(x), v_2(x), \ldots$ identisch.*

Beweis (Siehe auch [4]). Wegen (5), (7), der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung und (13) finden wir

$$(16) \qquad (v_{n+1}, v_{n+1})_M = (v_n, v_{n+1})_N = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i c_i^{(n)} c_i^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \{c_i^{(n+1)}\}^2 .$$

Schreiben wir

$$w_p(x) = v_{n+1}(x) - \sum_{i=1}^{p} c_i^{(n+1)} y_i(x) ,$$

läßt sich mit (10), (11), (12) die Gültigkeit der Gleichung

$$(w_p, w_p)_M = (v_{n+1}, v_{n+1})_M - \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \{c_i^{(n+1)}\}^2$$

bestätigen, aus der mit (16)

$$\lim_{p\to\infty} (w_p, w_p)_M = 0$$

gefolgert werden kann. Wegen der Schwarzschen Ungleichung ist dann auch für beliebige $v \in \bar{Z}$

$$\lim_{p\to\infty} (w_p, v)_M = 0 .$$

Bezeichnet $d_0^{(n+1)}(x)$ die Nullfunktion in der Entwicklung von $v_{n+1}(x)$, gilt damit

$$\langle d_0^{(n+1)}, v\rangle - \mathfrak{R}^M(v)\,\mathfrak{x}(d_0^{(n+1)}) = 0 .$$

Die Willkür von $v(x)$ führt zum identischen Verschwinden von $d_0^{(n+1)}(x)$.

Mit (14), (15) gilt damit für $v_{n+1}(x)$ der Entwicklungssatz

$$(17) \qquad v_{n+1}(x) = \sum_{i=r}^{\infty} c_i^{(n+1)} y_i(x) , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ist

$$|\lambda_r| = |\lambda_{r+1}| = \ldots = |\lambda_{r+p-1}| < |\lambda_{r+p}| ,$$

können wir für (17), zusammen mit (13),

$$v_{n+1}(x) = \frac{1}{\lambda_r^{n+1}}\left\{c_r y_r(x) + \ldots + c_{r+p-1} y_{r+p-1}(x) + c_{r+p}\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+p}}\right)^{n+1} y_{r+p}(x) + \ldots\right\}$$

schreiben. Daraus ergibt sich die gesuchte Konvergenz der Iterationsfolge.

SATZ 7. *Die Aufgabe sei eigentlich definit in* $\bar{Z}$. *Die Ausgangsfunktion der Iterationsfolge möge* (14), (15) *genügen. Dann konvergiert die Iterationsfolge* $\{v_{n+1}(x)\}$ *gegen ein Linearaggregat der Eigenfunktionen* $y_r(x), \ldots$ $\ldots, y_{r+p-1}(x)$. p *bezeichnet die Vielfachheit des Eigenwertes* λ_r.

5. Abschließende Bemerkungen. Die angeführten Überlegungen zeigen, wie zwangsläufig sich die von Kamke entwickelte Eigenwerttheorie auf natürliche Eigenwertprobleme ausdehnen läßt. Es dürfte klar sein, daß auch weitere für Aufgaben mit Kamkeschen-Randbedingungen bekannte Sätze auf natürliche Eigenwertprobleme übertragen werden können. So ist es z.B. möglich, Einschließungssätze, Verfahren zur Bestimmung der höheren Eigenwerte und Aussagen über das inhomogene natürliche Eigenwertproblem anzugeben. Das ist so offensichtlich, daß ein Eingehen darauf nicht gerechtfertigt erscheint. Wir beschließen daher die Entwicklung der Kamkeschen Eigenwerttheorie für natürliche Eigenwertprobleme.

6. Beispiel. Wir betrachten das natürliche Eigenwertproblem

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0\,,$$
$$y(1) = 0, \qquad y'(0) = -\lambda y(0)\,.$$

Die Iterationsvorschrift lautet:

$$v_n''(x) = -v_{n-1}(x)\,,$$
$$v_n(1) = 0\,,$$
$$v_n'(0) = -v_{n-1}(0)\,.$$

In [1] ermittelten wir die natürlichen Produktbildungen. Die Schwarzschen Konstanten bestimmen sich aus den Gleichungen

$$a_{2n} = \int_0^1 \{v_n(x)\}^2 dx + \{v_n(0)\}^2 = \int_0^1 v_n'(x)\, v_{n+1}'(x)\, dx\,,$$

$$a_{2n+1} = \int_0^1 v_n(x)\, v_{n+1}(x)\, dx + v_n(0)\, v_{n+1}(0) = \int_0^1 \{v_{n+1}'(x)\}^2 dx\,.$$

Es ist leicht zu bestätigen, daß die Aufgabe volldefinit in $\bar{Z}$ ist.

Ausgehend von der Funktion

$$v_0(x) = 120(x-1),$$

die offenbar zu $\bar{Z}$ gehört, bestimmen wir die Iterierten

$$v_1(x) = 20(-x^3+3x^2+6x-8),$$
$$v_2(x) = x^5-5x^4-20x^3+80x^2+160x-216.$$

Wegen der Volldefinitheit der Aufgabe werden die Schwarzschen Quotienten μ_{n+1} berechnet. Wir finden:

$$\mu_1 = 0{,}74074, \quad \mu_2 = 0{,}74021, \quad \mu_3 = 0{,}740176, \quad \mu_4 = 0{,}740174.$$

Die Anwendung des Einschließungssatzes von Krylov und Bogoliubov würde nach den einzelnen Schritten zu folgenden Einschließungen führen:

$$0{,}720 \leqslant \lambda_1 \leqslant 0{,}761,$$
$$0{,}735 \leqslant \lambda_1 \leqslant 0{,}746,$$
$$0{,}739 \leqslant \lambda_1 \leqslant 0{,}742.$$

Literaturverzeichnis

[1] W. Dück, *Variationsprinzipien bei natürlichen Eigenwertproblemen,* Ann. Polon. Math. 17 (1965), S. 89-115.

[2] — *Entwicklung nach Eigenfunktionen natürlicher Eigenwertprobleme,* Ann. Polon. Math. 18 (1966), S. 263-269.

[3] — *Das Verfahren von Ritz-Galerkin bei natürlichen Eigenwertproblemen,* Ann. Polon. Math. 18 (1966), S. 257-262.

[4] H. Schubert, *Über die Entwicklung zulässiger Funktionen nach den Eigenfunktionen bei definiten, selbstadjungierten Eigenwertaufgaben,* Heidelberg 1948.

Reçu par la Rédaction le 3. 9. 1964