

V. FABIÁN (Praha), W. KRYSICKI (Łódź), H. STEINHAUS (Wrocław)

TRZY GŁOSY DYSKUSYJNE ⁽¹⁾

V. FABIÁN (Praha)

UWAGA O PRACY W. KRYSICKIEGO „O POŁĄCZONYM ZAGADNIENIU BAYESA I BERNOULLIEGO” ⁽²⁾

Celem tej uwagi jest pokazać błędność wyników zawartych w wymienionej pracy W. Krywickiego. Autor uwagi jest przekonany, iż owa praca jest przykładem typowym, który pokazuje, że nie jest wskazane dziś rozwiązywać zagadnienia statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa na tle niedostatecznie ścisłych pojęć intuicyjnych, jak było zazwyczaj 50 lat temu. Za analogiczny przykład może służyć też Ex. 2 w pracy B. Epsteina w *Annals of Mathematical Statistics* 25 (1954), str. 767.

Przyjmijmy zwykły układ przestrzeni, ciała borelowskiego i prawdopodobieństwa (X, φ, μ) i rozważmy zmienne losowe π, f_i ($i=1, 2, \dots, n+N$) przy czym niech zmienna π ma rozkład jednostajny w przedziale $(0, 1)$, a zmienne f_i rozkład dwupunktowy ($f_i = 0$ lub 1) i niech prawdopodobieństwa warunkowe będą

$$\mu_{\pi=p}[f_i^{-1}(1)] = p \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n+N,$$

gdzie symbolem $\mu_W(A)$ oznaczamy prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem W . Następnie zakładamy jeszcze, że jest

$$\mu_{\pi=p} \left[\bigcap_{i=1}^{n+N} f_i^{-1}(A_i) \right] = \prod_{i=1}^{n+N} \mu_{\pi=p}[f_i^{-1}(A_i)]$$

dla wszystkich $A \in \mathcal{C}\{0, 1\}$.

W ustępie pierwszym swej pracy W. Krywicki pisze: „Załóżmy, że w ciągu n jednakowych i niezależnych doświadczeń, o stałym, lecz nieznanym prawdopodobieństwie p ($p \neq 0, p \neq 1$) zajęcia w poszczególnym do-

⁽¹⁾ Oglaszając pod tym zbiorczym tytułem trzy oddzielne prace pragniemy podkreślić, że każdy z Autorów ponosi odpowiedzialność naukową za swój pogląd. Dyskusję w tej sprawie uważamy za zamkniętą. (*Redakcja*).

⁽²⁾ *Zastosowania Matematyki* 2 (1955), str. 172-178.

świadczeniu, zdarzenie sprzyjające zaszło a razy... Wyznaczymy teraz prawdopodobieństwo, że w N nowych takich samych doświadczeniach dane zdarzenie zajdzie β razy”.

Słowem „w takich samych doświadczeniach”, które zresztą powtarzają się w obu streszczeniach, nie można chyba nadać innego sensu niż ten, że chodzi o doświadczenia niezależne, w których prawdopodobieństwo rozważanego zjawiska będzie znowu p . Chodzi więc o to, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo

$$\mu_{\pi=p} \sum_{i=1}^n f_i = a \left[\sum_{i=n+1}^{n+N} f_i = \beta \right].$$

To jest jednak oczywiście równe prawdopodobieństwu

$$\mu_{\pi=p} \left[\sum_{i=n+1}^{n+N} f_i = \beta \right],$$

a więc równe

$$\binom{N}{\beta} p^{\beta} (1-p)^{N-\beta},$$

a nie wyrazowi (I) na str. 173 pracy. Prawdopodobieństwo (I), które wyraża się w symbolach tutaj przyjętych wzorem

$$\mu_{\sum_{i=1}^n f_i=a} \left[\sum_{i=n+1}^{n+N} f_i = \beta \right],$$

nie daje odpowiedzi na zadane w pracy pytanie. Prawdopodobieństwo bowiem, że „w N takich samych doświadczeniach dane zdarzenie zajdzie β razy”, czyli w terminach zagadnienia Poincarégo prawdopodobieństwo wygranej pierwszego szachisty w grze $(n+m+1)$ -szej, nie zależy od wyników poprzednich doświadczeń; tego prawdopodobieństwa nie można określić według danych wyników; można je tylko ocenić.

Praca wpłynęła 14. 5. 1955

W. KRYSICKI (Łódź)

REPLIKA

Odpowiadając na *Uwagę...* V. Fabiána dotyczącą mej pracy *O połączonym zagadnieniu Bayesa i Bernoulliego* pozwolę sobie przede wszystkim zacytować w całości ustęp tej pracy, którego fragment tylko początkowy i końcowy przytoczył V. Fabián:

„Załóżmy, że w ciągu n jednakowych i niezależnych doświadczeń, o stałym lecz nieznanym prawdopodobieństwie p ($p \neq 0, p \neq 1$) zajścia w poszczególnym doświadczeniu, zdarzenie sprzyjające zaszło a razy. Wówczas gęstość prawdopodobieństwa *a posteriori* $P_a(p)$, przy założeniu, że gęstość prawdopodobieństwa *a priori* jest stała, wyrazi się wzorem Bayesa

$$(1) \quad P_a(p) = \frac{p^a(1-p)^{n-a}}{\int_0^1 s^a(1-s)^{n-a} ds},$$

czyli

$$P_a(p) = \frac{(n+1)!}{a!(n-a)!} p^a(1-p)^{n-a}.$$

Wyznamy teraz prawdopodobieństwo, że w N nowych takich samych doświadczeniach dane zdarzenie zajdzie β razy”.

Jak widać z przytoczonego tekstu i *Uwagi...* V. Fabiána, nieporozumienie polega na niezrozumieniu łącznego sensu trzech cytowanych zdań. Pierwsze dwa zdania zawierają założenia, co jest widoczne ze słów: „Załóżmy...” w pierwszym zdaniu oraz „... przy założeniu...” w drugim zdaniu, a trzecie zdanie zapowiada cel dalszych rozważań: „Wyznamy teraz...”. Znaczenie wyrazu *teraz* po dwóch zdaniach zawierających założenia jest zupełnie jasne i zrozumiałe, wyraz *teraz* nabiera tutaj sensu: *przyjawszy poprzednie założenia*.

Zarzut V. Fabiána oparty jest na wnioskach wysnutych z mego pierwszego i trzeciego z cytowanych zdań z całkowitym pominięciem drugiego zdania, w którym przyjąłem założenie o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa *a priori*, czyli tzw. postulat Bayesa. Dalszy ciąg rozważań V. Fabiána jest całkowitym potwierdzeniem moich domysłów o przyczynie nieporozumienia. Tak więc prawdopodobieństwo wyrażone wzorem

$$(I) \quad P[N, \beta; n, a] = \frac{(n+1)! N!(a+\beta)!(n+N-a-\beta)!}{a!(n-a)!\beta!(N-\beta)!(n+N+1)!}$$

daje odpowiedź na zadane w pracy pytanie, przy podanych założeniach.

Nie uważam, żeby symbolika użyta przez V. Fabiána lepiej oddawała treść postawionego zagadnienia niż moje sformułowanie w trzech zdaniach, tak np. nie jest zupełnie jasne, dlaczego symbol

$$\mu \sum_{i=1}^n f_i = a \left[\sum_{i=n+1}^{n+N} f_i = \beta \right]$$

ma zawierać w sobie założenie równomierności rozkładu prawdopodobieństwa *a priori*.

Zaznaczyć jeszcze muszę, że w obu streszczeniach o których wspomina V. Fabián (*Zastosowania Matematyki* 2 (1955), str. 178), powiedziano wyraźnie o przyjęciu równomierności rozkładu *p*.

Praca wpłynęła 18. 12. 1955

H. STEINHAUS (Wrocław)

NA MARGINESIE POLEMIKI

Praca W. Krysińskiego *O połączonym zagadnieniu Bayesa i Bernoulliego* (*Zastosowania Matematyki*, 2 (1955), str. 172-178) spotkała się z krytyką czeskiego matematyka V. Fabiána, a ta krytyka wywołała odpowiedź autora. Redakcja nie chce narzucać swojego zdania o tej kontrowersji tym czytelnikom *Zastosowań Matematyki*, którzy mają własne, ale pozwoliła mi napisać kilka słów wyjaśniających, z myślą o tych, którzy nie są specjalistami teorii prawdopodobieństw.

Wyobraźmy sobie automat, w którym ukryta wskazówka obiega tarczę podzieloną na 100 równych kątów, ze znaczną, ale stałą prędkością. Automat jest tak urządzony, że pierwsze pociśnięcie guzika wprawia wskazówkę w ruch, drugie zatrzymuje ją i powoduje kolejne pojawienie się sygnałów świetlnych co sekundę; sygnały są czerwone lub zielone i następują przypadkowo i niezależnie od siebie (jak kolory w kolejnych rzutach kulki na ruletkę), ale frekwencja czerwonych świateł jest równa $p\%$, przy czym p jest kątem wskazanym na tarczy przez nieruchomą wskazówkę — rozumiemy to tak, że w granicy (dla czasu obserwacji przedłużającego się nieograniczenie) stosunek liczby czerwonych błysków do wszystkich jest $p:100$. My jednak naciskamy trzeci raz guzik, przez co zatrzymujemy automat; zanotowaliśmy, że było n błysków, z czego a czerwonych i $n-a$ zielonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po otwarciu prądu stwierdzimy wśród pierwszych N sygnałów nowej serii b czerwonych?

Gdy przerwiemy prąd po N sygnałach, aparat wróci do stanu początkowego. Całe doświadczenie, składające się z dwóch aktów, możemy powtarzać dowolnie wiele razy; w każdej dwuaktówce będzie n błysków w pierwszym i N w drugim akcie. Możemy przekreślić w zapiskach te dwuaktówki, które wykazały w I akcie inną liczbę czerwonych świateł niż a , a pozostawić tylko te, które wykazały a ; wśród zachowanych będzie (znowu w nieskończenie długim czasie) pewna frakcja dwuaktówek wykazujących b czerwonych błysków w II akcie; jaka jest ta frakcja?

Otóż drugie pytanie jest tylko innym wyrażeniem treści pierwszego pytania: „frakcja” w drugim jest równa „prawdopodobieństwu” w pierwszym.

Pozostawiamy czytelnikowi sąd o tym, czy łatwiej doszukać się tej treści w sformułowaniu autora pracy, czy też w terminologii krytyka.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 2. 2. 1956

V. ФАБИАН (Прага) В. КРЫСИЦКИЙ (Лодзь) Г. ШТАЙНХАУЗ (Вроцлав)

ТРИ ДИСКУСИОННЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

РЕЗЮМЕ

Редакцией представляются три дискуссионные статьи полученные после опубликования статьи В. Крысицкого, *О совместном проблеме Бейеса и Бернулли*, *Zastosowania Matematyki* 2 (1955), стр. 172-178.

1. В. Фабиан обсуждает ошибку замеченную в статье В. Крысицкого, которая возникла вследствие неточных, интуитивных понятий в теории вероятностей.

2. В. Крысицкий исправляет упущение в рассуждениях В. Фабиана, который пропустил некоторые предположения обсуждаемой статьи.

3. Г. Штайнхауз конструирует модель, соответствующую вопросу автора, не рассуждая сформулировал ли автор данный вопрос удовлетворительно ясно и должен ли был критик ориентироваться в намерении автора.

V. FABIÁN (Praha), W. KRYSICKI (Łódź), H. STEINHAUS (Wrocław)

THREE VOICES IN DISCUSSION

SUMMARY

The editors present three papers obtained after the publication of W. Krysiński's paper, *On the joint problem of Bayes and Bernoulli*, *Zastosowania Matematyki* 2 (1955), p. 172-178.

1. V. Fabián discusses an error which he has noticed in W. Krysiński's paper. The error is due to the use of inaccurate, intuitive notions in the theory of probability.

2. W. Krysiński rectifies an omission in V. Fabián's argument — an omission consisting in disregarding a certain part of the assumptions made in the work in question.

3. H. Steinhaus constructs a model which corresponds to W. Krysiński's problem, disregarding the question whether the author has formulated the problem in a sufficiently unambiguous way and whether the critic should have recognized the author's intentions.