ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1962)

W. SZWARC (Wrocław)

ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE

1. Wstęp. F. L. Hitchcock [13] w r. 1941 sformułował następujące zagadnienie: Mamy m dostawców oferujących pewien określony towar w ilościach $a_1, \ldots, a_m$ oraz n odbiorców potrzebujących tego towaru w ilościach $b_1, \ldots, b_n$. Zakłada się, że suma popytów odbiorców równa się sumie podaży dostawców. Dane są liczby c_{ij} oznaczające koszty przewozu jednostki towaru od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy. Należy znaleźć takie liczby $x_{ij} \geqslant 0$, gdzie x_{ij} oznacza ilość przewiezionego towaru od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy, żeby ogólny koszt transportu towaru niezbędnego do pokrycia istniejącego popytu był najmniejszy.

Problem ten nosi nazwę *zagadnienia transportowego*. W r. 1942 L. Kantorowicz [14] formułuje zagadnienie ogólniejsze o translokacji mas ciągłych. W r. 1947 T. C. Koopmans [15] zajmuje się tym zagadnieniem niezależnie. Jednakże dopiero rok 1951 zapoczątkował intensywny rozwój metod nadających się do praktycznego rozwiązania tego ważnego pod względem ekonomicznym zagadnienia. Nastąpiło to w związku z powstaniem nowej gałęzi matematyki — programowania liniowego. Dotychczas ukazało się ponad sto prac poświęconych zagadnieniu transportowemu, głównie autorów amerykańskich.

G. B. Dantzig [5], [4] podał w r. 1951 rozwiązanie oparte na metodzie sympleksowej z programowania liniowego i ekonomicznej teorii przepływów. M. M. Flood [8] zajmował się w r. 1953 matematycznymi aspektami tego zagadnienia korzystając z teorii grafów i podał metodę rozwiązania mniej przydatną dla celów praktycznych. W latach 1953-1955 powstają różne praktyczne ulepszenia metody Dantziga. Do nich zaliczyć należy metodę „Stepping Stone" A. Charnesa i W. W. Coopera [3] z r. 1953. Została ona ulepszona przez A. Hendersona i R. Schlaifera [12] w r. 1954.

R. O. Ferguson [7] przedstawił w r. 1955 tak zwaną „Modified Distribution Method". W r. 1955 A. Gleyzal [11] opublikował metodę rozwiązania dla wersji całkowitej (koszty, podaże i popyty są liczbami całkowitymi). Metoda ta jest dosyć zawiła. F. Nožička [20]

podał w r. 1956 jeszcze jedną metodę rozwiązania. W r. 1958 ten sam autor wraz z J. Bílý'm i M. Fiedlerem [2] rozwiązał to zagadnienie metodą opartą na teorii grafów.

W r. 1955 powstały różne specjalne metody rozwiązania zagadnienia przydziału pracy (patrz np. [18]) (the personnel assignment problem), które jest szczególnym przypadkiem zagadnienia transportowego (każda podaż jest równa 1, każdy popyt jest liczbą całkowitą). Oczywiście każda metoda rozwiązania zagadnienia transportowego rozwiązuje zagadnienie przydziału pracy. P. S. Dwyer [6] podał jednakże w r. 1955 rozwiązanie zagadnienia transportowego oparte na metodzie rozwiązania zagadnienia przydziału pracy. L. R. Ford i D. R. Fulkerson [9] rozwiązali w r. 1956 zagadnienie transportowe traktując je jako szczególny przypadek przepływu w sieciach. W tym samym roku ukazał się artykuł W. Sadowskiego [22] poświęcony również temu zagadnieniu. Należy wspomnieć o bardzo efektywnej, przybliżonej metodzie rozwiązania, podanej przez W. R. Vogla [19] z r. 1955.

Najbardziej rozpowszechniona na Zachodzie jest metoda Dantziga wraz z ulepszeniami oraz przybliżona metoda Vogla ([19], str. 43-54). Od roku 1952 datuje się rozwój maszyn elektronowych rozwiązujących ogólne zagadnienia programowania liniowego jak również maszyn elektronowych, specjalnie przystosowanych do zagadnienia transportowego. Znanych jest obecnie ponad 10 typów maszyn elektronowych rozwiązujących zagadnienie transportowe. Największa z nich to chyba typ 1103 (Rand Corporation), która rozwiązuje przypadki dla $m+n \leqslant 8000$. Prawie wszystkie te maszyny pracują metodą Dantziga lub „Stepping Stone".

J. Perkal i J. Battek [21] zaprojektowali w r. 1957 model maszyny mechanicznej i elektrycznej rozwiązującej zagadnienie transportowe, gdy podaże i popyty są liczbami całkowitymi. J. Stringer i K. B. Haley [23] podają zaprojektowany przez E. R. Crossmana model mechanicznej maszyny rozwiązującej zagadnienie transportowe.

Ponieważ: 1° programowanie na maszynie, szczególnie elektronowej, jest kosztowne, 2° w praktyce spotykamy się z przypadkami, gdy ilość dostawców i odbiorców nie jest zbyt duża — przeto szybkie, nadające się do ręcznych rachunków metody rozwiązania zagadnienia transportowego nabierają szczególnego znaczenia.

W niniejszej pracy przedstawiona zostanie przystosowana do ręcznych rachunków metoda, która wydaje się autorowi znacznie efektywniejsza od wszystkich dotychczasowych tego rodzaju metod rozwiązania zagadnienia transportowego. Algorytm tutaj podany może się wydawać formalnie identycznym z metodą sympleksową Dantziga. Jeśli zacząć od tego samego rozwiązania wyjściowego obie metody prowadzą do rozwiązania tą samą ilością kroków i przez te same rozwiązania pośrednie.

Praktyczna wyższość przedstawionej tu metody polega na łatwości kolejnych przejść i na modyfikacji metody znajdowania rozwiązania początkowego.

2. Formalizacja zagadnienia, własności rozwiązania. Zagadnienie transportowe da się sformalizować następująco: Dany jest układ (C, M), gdzie $C = \{c_{ij}\}$ jest prostokątną macierzą rzędu $m \times n$ o elementach rzeczywistych, którą nazywać będziemy *macierzą kosztów*, $M = (a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ jest układem $m+n$ liczb dodatnich i takich, że $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Każdą macierz prostokątną $X = \{x_{ij}\}$ rzędu $m \times n$, gdzie wszystkie x_{ij} są $\geqslant 0$ oraz spełniają warunki:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \text{dla każdego} \quad i = 1, \ldots, m, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{dla każdego} \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.1}$$

nazywać będziemy *macierzą przepływów*. Należy znaleźć taką macierz przepływów $X = \{x_{ij}\}$, żeby funkcja

$$z_X(C, M) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = z_X \tag{2.2}$$

osiągnęła wartość najmniejszą. Macierz taką nazywamy *macierzą optymalną*, a funkcję $z_X(C, M)$ — *funkcją kosztów*. Zagadnienie transportowe z układem (C, M) nazywać będziemy krótko *zagadnieniem* (C, M).

Z powyższego sformułowania zagadnienia wynikają następujące wnioski.

WNIOSEK 2.1. *Istnieje co najmniej jedna macierz przepływów zagadnienia transportowego* (C, M).

Na przykład macierz $X = \{x_{ij}\}$, gdzie $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{A}$, $A = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, jest macierzą przepływów. Elementy x_{ij} są dodatnie i spełniają warunki (2.1).

WNIOSEK 2.2. *Funkcja kosztów* z_X *osiąga na zbiorze macierzy przepływów skończoną wartość największą i najmniejszą.*

Wynika to stąd, że z_X jest funkcją liniową, a więc ciągłą oraz z warunków, jakie spełnia każda macierz przepływów X. Funkcja ciągła zaś przyjmuje w obszarze ograniczonym i domkniętym skończoną wartość największą i najmniejszą.

WNIOSEK 2.3. *Jeżeli* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ($X_l = \{x_{ij}^{(l)}\}$ *dla* $l = 1, \ldots, k$) *są macierzami optymalnymi zagadnienia* (C, M) (1), *to macierz* $X = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l X_l$ *jest również macierzą optymalną* ($\lambda_l \geqslant 0$, $\sum_{l=1}^{k} \lambda_l = 1$).

Sprawdzamy, że $x_{ij} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l x_{ij}^{(l)} \geqslant 0$ dla każdego i oraz j.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \lambda_l x_{ij}^{(l)} = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(l)} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l a_i = a_i \sum_{l=1}^{k} \lambda_l = a_i$$

dla każdego i. Podobnie

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{dla każdego} \quad j.$$

Macierz $X = \{x_{ij}\}$ jest więc macierzą przepływów. Macierze $X_1, \ldots, X_l$ są optymalne, więc $z_{X_1} = z_{X_2} = \ldots = z_{X_k} = z$. Z równości $z_X = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l z_{X_l} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l z = z$ wynika, że X jest również macierzą optymalną.

DEFINICJA 2.1. Dwie macierze $C = \{c_{ij}\}$ i $C' = \{c'_{ij}\}$ rzędu $m \times n$ nazywamy *równoważnymi*, jeśli istnieje układ stałych $u_1, u_2, \ldots, u_m$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takich, że $c'_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

WNIOSEK 2.4. *Na to, by macierz przepływów* $\bar{X} = \{\bar{x}_{ij}\}$ *była macierzą optymalną zagadnienia* (C, M), *gdzie wszystkie* c_{ij} *są nieujemne, wystarcza, by dla każdego* $c_{ij} > 0$ *odpowiednie* $\bar{x}_{ij} = 0$.

Jeżeli $\bar{X}$ spełnia warunek wniosku 2.4, a X jest dowolną macierzą przepływów zagadnienia (C, M), to $z_{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \bar{x}_{ij} = 0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = z_X$. $\bar{X}$ jest więc macierzą optymalną.

WNIOSEK 2.5. *Jeżeli macierze* C *i* C' *są równoważne, to optymalna macierz zagadnienia* (C, M) *jest zarazem optymalną macierzą zagadnienia* (C', M).

Wystarczy w tym celu wykazać, że dla dowolnej macierzy przepływów X, $z_X(C', M) = z_X(C, M) + K$, gdzie K jest liczbą stałą.

$$z_X(C', M) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + u_i + v_j) x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j,$$

$$z_X(C', M) = z_X + K, \quad \text{gdzie} \quad K = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j.$$

(1) W dalszym ciągu obowiązywać będzie ten sam układ (C, M), chyba że zaznaczono inaczej.

Uwaga 2.1. Funkcję kosztów $z_X(C, M) = z_X$ można przepisać w postaci

$$z_X = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-u_i-v_j+u_i+v_j)x_{ij} = \sum_i\sum_j d_{ij}x_{ij}+K,$$

gdzie $K = \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j$, $d_{ij} = c_{ij}-u_i-v_j$, przy czym u_i oraz v_j są dowolnymi stałymi. Jeśli wszystkie d_{ij} są $\geqslant 0$, to $z_X \geqslant K$ dla każdej macierzy przepływów X. Z dalszych rozważań wyniknie, że zawsze istnieje macierz $D = \{d_{ij}\} = \{c_{ij}-u_i-v_j\}$ równoważna macierzy kosztów C, o wyrazach $d_{ij} \geqslant 0$ i taka, że $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\bar{x}_{ij} = 0$ dla każdej macierzy optymalnej $\bar{X} = \{\bar{x}_{ij}\}$. Uwzględniając ponadto, że w równaniu $z_X = \sum_i\sum_j d_{ij}x_{ij}+K$, a $\sum_i\sum_j d_{ij}x_{ij}$ jest $\geqslant 0$ otrzymamy

$$z_{\bar{X}} = \min_X z_X = \max_{u_i, v_j} K,$$

gdzie X przebiega zbiór wszystkich macierzy przepływów zagadnienia (C, M) a u_i i v_j są dowolnymi liczbami spełniającymi warunek $u_i+v_j \leqslant c_{ij}$.

WNIOSEK 2.6. *Jeżeli $\bar{X} = \{\bar{x}_{ij}\}$ jest macierzą optymalną zagadnienia (C, M), to dla dowolnego $k > 0$ $k\bar{X} = \{k\bar{x}_{ij}\}$ jest macierzą optymalną zagadnienia (C, kM), a $kM = (ka_1, \ldots, ka_m;\ kb_1, \ldots, kb_n)$.*

Podaję również dwa ogólne wnioski, które zostaną udowodnione w dalszym tekście.

WNIOSEK 2.7. *Do każdej macierzy przepływów X można dobrać macierz przepływów $\hat{X}$, zawierającą co najwyżej $m+n-1$ elementów dodatnich i taką, że*

$$z_X \geqslant z_{\hat{X}}.$$

WNIOSEK 2.8. *Jeżeli w zagadnieniu (C, M) elementami M są liczby naturalne, to istnieje przynajmniej jedna macierz optymalna o elementach całkowitych.*

3. Uogólnione warianty zagadnienia transportowego.

3.1. Popyt nie równa się podaży. Rozpatrzmy następujące zagadnienie. Dana jest macierz prostokątna $C = \{c_{ij}\}$ rzędu $m \times n$ o elementach rzeczywistych i układ liczb dodatnich $(a_1, \ldots, a_m;\ b_1, \ldots, b_n)$, przy czym $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Należy znaleźć macierz prostokątną $X = \{x_{ij}\}$ rzędu $m \times n$, której elementy spełniają następujące relacje:

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{dla każdego } i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad \text{dla każdego } i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{dla każdego } j,$$

i dla których funkcja

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

osiąga wartość najmniejszą.

Zagadnienie powyższe da się sprowadzić do zagadnienia transportowego (C^1, M^1), gdzie

$$M^1 = (a_1, \ldots, a_m, a_{m+1};\ b_1, \ldots, b_n), \qquad a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad C^1 = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie 0 jest wektorem $(0, \ldots, 0)$ o n składowych. Macierz przepływów X zagadnienia (C^1, M^1) jest rzędu $(m+1) \times n$. Podobnie postępuje się w przypadku, gdy $\sum_i a_i < \sum_j b_j$.

3.2. Dostawcy i odbiorcy występują w grupach. Dana jest macierz $C = \{c_{ij}\}$ rzędu $m \times n$ oraz układ $p+q$ liczb $N = (S_1, \ldots, S_p;\ T_1, \ldots, T_q)$. Należy znaleźć układ liczb $x_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, spełniających równania

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} \sum_{i \in I_u} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= S_u \quad \text{dla} \quad u = 1, \ldots, p, \\ \sum_{j \in J_v} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= T_v \quad \text{dla} \quad v = 1, \ldots, q \end{aligned}$$

i taki, że funkcja

$$(3.2) \qquad z' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{u=1}^{p} \sum_{v=1}^{q} \sum_{\substack{i \in I_u \\ j \in J_v}} c_{ij} x_{ij}$$

osiąga minimum. Niech układ liczb $\bar{x}_{ij}$ będzie rozwiązaniem postawionego zagadnienia. Dla każdej ustalonej pary (u, v):

$$\sum_{\substack{i \in I_u \\ j \in J_v}} \bar{x}_{ij} = k_{uv}, \qquad \text{gdzie } k_{uv} \text{ jest stałą nieujemną.}$$

Zachodzą dwa przypadki:

1. $k_{uv} = 0$. Wówczas wszystkie $\bar{x}_{ij} = 0$ $(i \in I_u,\ j \in J_v)$.

2. $k_{uv} > 0$.

Niech $\min\limits_{\substack{i \in I_u \\ j \in J_v}} c_{ij} = c_{rs}$. Łatwo zauważyć, że dla

$$\begin{cases} x_{ij} = k_{uv}, & \text{gdy} \quad (i,j) = (r,s), \\ x_{ij} = 0, & \text{gdy} \quad (i,j) \neq (r,s), \quad \text{gdzie} \quad i \in I_u,\ j \in J_v, \end{cases}$$

funkcja $\sum\limits_{\substack{i \in I_u \\ j \in J_v}} c_{ij} x_{ij}$ osiągnie wartość najmniejszą dla każdego I_u i J_v. Wynika stąd, że postawione w niniejszym paragrafie zagadnienie można sprowadzić do zagadnienia transportowego (C^*, N), gdzie $C^* = \{c^*_{uv}\}$ jest macierzą rzędu $p \times q$, $c^*_{uv} = \min\limits_{\substack{i \in I_u \\ j \in J_v}} c_{ij}$, a $N = (S_1, \ldots, S_p;\ T_1, \ldots, T_q)$.

4. Graf. Dana jest macierz $W = \{w_{ij}\}$ rzędu $m \times n$. W dalszym ciągu będziemy zawsze ograniczali się do macierzy tego rzędu; gdy rząd macierzy będzie inny, zaznaczymy to specjalnie.

Niech Φ będzie zbiorem wszystkich punktów (i,j) dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Elementy zbioru Φ oznaczymy przez p_k, $1 \leqslant k \leqslant mn$. Dowolny podzbiór Ω zbioru Φ będziemy nazywali *zbiorem węzłów*. Punkt $p_k \in \Omega$ nazywa się *węzłem*, a w_{ij} $\big((i,j) \in \Omega\big)$ — *elementem węzłowym* macierzy W ze względu na zbiór Ω.

Linią nazywamy dowolny wiersz lub kolumnę macierzy prostokątnej. Mówimy, że dwa punkty (i_1, j_1), (i_2, j_2) *leżą na jednej linii*, jeśli mają jedną współrzędną równą ($i_1 = i_2$ lub $j_1 = j_2$).

Dwa węzły nazywamy *sąsiednimi*, jeśli leżą na jednej linii i jeśli między nimi nie ma innych węzłów. Odcinek łączący dwa sąsiednie węzły p_{k_1}, p_{k_2} nazywamy *połączeniem* i oznaczamy przez $p_{k_1}p_{k_2}$. Umawiamy się, że $p_{k_1}p_{k_2} = p_{k_2}p_{k_1}$.

Grafem G_Ω nazywamy zbiór węzłów Ω oraz zbiór wszystkich połączeń zbioru Ω. Graf $G_{\Omega'}$ nazywamy *podgrafem* grafu G_Ω, jeśli $\Omega' \subset \Omega$.

Przez *drogę* $p_1 - p_k$ rozumieć będziemy ciąg połączeń $p_1p_2, p_2p_3, \ldots$ $\ldots, p_{k-1}p_k$, gdzie węzłami sąsiednimi są jedynie węzły p_r, p_{r+1} dla $1 \leqslant r \leqslant$ $\leqslant k-1$ (ewentualnie węzły p_2 i p_k mogą być sąsiednie, jeśli $p_1 = p_k$).

Dana jest dowolna droga $p_1 - p_k$ i taka, że $p_1 = p_k$. Umawiamy się, że przez *cykl* rozumieć będziemy albo drogę $p_1 - p_k$, albo też graf G_Γ, gdzie Γ jest zbiorem węzłów tej drogi. Węzeł nazywamy *narożnym*, jeśli jest połączony z dwoma węzłami znajdującymi się na różnych liniach. Graf G_Ω jest *spójny*, jeśli do każdej pary jego węzłów istnieje droga łącząca te węzły. W szczególności graf zawierający jeden tylko węzeł jest spójny.

Krotnością węzła p grafu G_Ω nazywamy ilość połączeń przechodzących przez ten węzeł. Węzły o krotności 0 nazywamy *węzłami izolowanymi*. Największa krotność węzłów grafu G_Ω jest 4. Jeśli graf G_Ω jest cyklem, to wszystkie jego węzły mają krotność 2.

Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 4.1 ([17], str. 18). *Graf spójny, którego każdy węzeł ma krotność 2 jest cyklem.*

Cyklem prostym nazywamy cykl, którego każdy węzeł jest węzłem narożnym. Jest oczywiste, że ilość węzłów cyklu prostego jest parzysta, gdyż jeśli na jakiejś linii znajdują się węzły cyklu prostego, to jest ich dokładnie dwa. Zdanie „graf zawiera cykl" oznaczać będzie, że graf zawiera podgraf, który jest cyklem.

TWIERDZENIE 4.2. *Graf G_Ω zawiera cykl wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera cykl prosty.*

Dowód. Dostateczność warunku jest oczywista, każdy bowiem cykl prosty jest cyklem. Wykażemy teraz jego konieczność. Niech graf zawiera cykl. Usuwamy z cyklu dowolny nienarożny węzeł p, wprowadzając jednocześnie nowe połączenie między węzłami sąsiednimi usuniętego węzła (połączenia wiążące punkt p zostały wraz z p usunięte). Powstały graf będzie nadal zawierał cykl. Postępowanie to kontynuujemy do chwili otrzymania takiego cyklu, że każdy jego węzeł jest węzłem narożnym. Cykl ten będzie cyklem prostym.

LEMAT 4.1. *Jeżeli na każdej linii albo nie ma żadnego węzła niepustego zbioru Ω, albo na niej leżą dwa węzły zbioru Ω, to graf G_Ω zawiera cykl.*

Dowód. Niech $p_1 \in \Omega$. Utwórzmy ciąg połączeń $p_1p_2, p_2p_3, \ldots$, gdzie nieparzyste elementy ciągu oznaczają połączenie poziome (dwóch punktów w jednym wierszu) a parzyste elementy — połączenia pionowe (dwóch punktów w jednej kolumnie). W myśl założenia lematu ciąg ten można kontynuować nieograniczenie. Ponieważ macierz ma tylko $m \times n$ elementów w ciągu połączeń, niektóre węzły muszą się powtarzać, a to oznacza istnienie cyklu.

TWIERDZENIE 4.3. *Jeśli Ω jest zbiorem $m+n$ węzłów, to graf G_Ω zawiera cykl.*

Dowód. Skreślamy z macierzy W linię zawierającą co najwyżej jeden element węzłowy W ze względu na zbiór Ω (krótko, element węzłowy macierzy W). Otrzymamy nową macierz rzędu $(m-1) \times n$ lub $m \times (n-1)$ w zależności od tego, czy skreśliliśmy wiersz czy też kolumnę macierzy W. Proces ten kontynuujemy do chwili uzyskania macierzy zawierającej w każdej linii przynajmniej dwa elementy węzłowe macierzy W. Przypuśćmy, że w wyniku kolejnych skreśleń udało nam się otrzymać macierz

rzędu $1\times k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ lub $k\times 1$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$. Zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku nastąpiło dokładnie $m+n-1-k$ skreśleń. Usunęliśmy więc najwyżej $m+n-1-k$ elementów. Zostało w takim razie co najmniej $k+1$ elementów w macierzy k-elementowej, co jest niemożliwe. Znaczy to, że w wyniku skreśleń możemy otrzymać macierz rzędu $l\times k$ $(2 \leqslant l \leqslant m,\ 2 \leqslant k \leqslant n)$, której każda linia zawiera przynajmniej 2 elementy węzłowe W. Niech E będzie zbiorem elementów węzłowych macierzy W, należących do macierzy rzędu $l\times k$, a $\Omega' \subset \Omega$ — zbiorem współrzędnych E. Na podstawie lematu 4.1, $G_{\Omega'} \subset G_{\Omega}$ zawiera cykl, a więc i G_{Ω} zawiera cykl.

TWIERDZENIE 4.4. *Dany jest spójny, nie zawierający cykli, graf G_{Ω} o r węzłach. Liczba wszystkich linii przechodzących przynajmniej przez jeden węzeł grafu G_{Ω} wynosi $r+1$.*

Dowód. Przede wszystkim zauważmy, że usuwając z dowolnego grafu spójnego, który nie ma cykli, jego dowolny węzeł końcowy (graf taki zawiera przynajmniej dwa węzły końcowe) otrzymamy graf, który będzie nadal spójny i bez cykli. Widać stąd, że dowolny, nie zawierający cykli, spójny graf G_{Ω} da się zbudować przez wielokrotne powtarzanie następującego postępowania. Do dowolnego podgrafu spójnego i bez cykli $G_{\Omega'}$ dołączamy taki węzeł p, należący do zbioru $\Omega-\Omega'$, żeby p był węzłem końcowym nowoutworzonego grafu $G_{\Omega'} \subset G_{\Omega}$. Twierdzenie jest prawdziwe dla $r=1$. Załóżmy jego prawdziwość dla $r=s$. Wykażemy, że twierdzenie zachodzi dla $r=s+1$. Rozpatrzmy dowolny graf spójny $G_{\Omega_{s+1}}$ bez cykli o $s+1$ węzłach. Istnieje taki graf spójny i bez cykli G_{Ω_s} o węzłach $p_1, p_2, \ldots, p_s$, że $G_{\Omega_{s+1}}$ powstał z G_{Ω_s} przez dołączenie do niego węzła $p_{s+1} \notin \Omega_s$. Z założenia, twierdzenie jest prawdziwe dla G_{Ω_s}. Ze względu na spójność grafu $G_{\Omega_{s+1}}$, p_{s+1} znajduje się przynajmniej na jednej z linii przechodzących przez $p_1, \ldots, p_s$. Niech to będzie linia L. Rozpatrzmy linię prostopadłą do L i przechodzącą przez p_{s+1}. Na linii tej nie może leżeć żaden z węzłów $p_1, \ldots, p_s$, graf $G_{\Omega_{s+1}}$ bowiem zawierałby wtedy cykl wbrew założeniu. Wobec tego przy przejściu od G_{Ω_s} do $G_{\Omega_{s+1}}$ liczba linii przechodzących przez węzły grafu wzrośnie o jeden, podobnie jak liczba węzłów. Twierdzenie zostało więc udowodnione.

5. Baza, baza dopuszczalna

DEFINICJA 5.1. $(m+n-1)$-elementowy podzbiór B zbioru Φ (²) nazywamy *bazą*, jeżeli graf G_B nie zawiera cykli.

DEFINICJA 5.2. Bazę B nazywamy *dopuszczalną*, jeśli istnieje przynajmniej jedna macierz przepływów $X=\{x_{ij}\}$ taka, że dla każdego $(i,j)\in B$ $x_{ij}=0$. Mówimy wtedy, że X zawiera bazę dopuszczalną B.

(²) Patrz strona 155.

TWIERDZENIE 5.1. *Jeżeli B jest bazą, to graf G_B jest spójny.*

Dowód. Niech G_B nie będzie spójny. Wtedy graf G_B zawiera dwa rozłączne podgrafy G_1 i G_2 (nie mające wspólnych węzłów ani wspólnych połączeń), z których przynajmniej jeden jest spójny. Niech to będzie podgraf G_1 o r węzłach, $1 \leqslant r \leqslant m+n-2$, i $r-1$ połączeniach (ze względu na to, że graf jest spójny i bez cykli, patrz [17], str. 51). Liczba wszystkich linii przechodzących przez węzły grafu G_1 wynosi $r+1$ (twierdzenie 4.4), przy czym na liniach tych nie leżą węzły grafu G_2. Skreślamy wobec tego z macierzy X wszystkie te linie. Otrzymamy nową $(m-s)\times$ $\times(n-r+s-1)$ elementową macierz $(0 \leqslant s \leqslant r+1)$, przy czym każdemu węzłowi G_2 odpowiada element węzłowy macierzy X ze względu na bazę B, należący do nowej macierzy. W myśl twierdzenia 4.3 graf G_2 zawiera cykl, gdyż ilość węzłów G_2 równa się $m+n-1-r = (m-s)+$ $+(n-r+s-1)$. Jest to sprzeczne z założeniem, że graf G_B jest bez cykli, co dowodzi prawdziwości twierdzenia, że G_B jest grafem spójnym.

TWIERDZENIE 5.2. *Jeśli B jest bazą i $p = (r, s) \notin B$, to graf G_{B+p} zawiera dokładnie jeden cykl.*

Dowód. W myśl twierdzenia 4.3 graf G_{B+p} zawiera przynajmniej jeden cykl. Na mocy twierdzenia z teorii grafów, dotyczącego indeksu spójności grafów spójnych ([17], str. 53, tw. 13)

$$\mu = a_1 - a_0 + 1,$$

gdzie a_1, a_0 i μ są odpowiednio liczbami połączeń, węzłów i cykli grafu spójnego. W naszym przypadku $a_1 = a_0 = m+n$. μ wynosi więc 1, a to znaczy, że G_{B+p} zawiera dokładnie jeden cykl.

TWIERDZENIE 5.3. *Jeżeli usuniemy z $(m+n)$-węzłowego grafu spójnego G_Ω, zawierającego dokładnie jeden cykl prosty, węzeł p należący do cyklu, to nowoutworzony graf $G_{\Omega-p}$ będzie spójny i bez cykli.*

Dowód. Z teorii grafów wiadomo ([17], str. 53), że jeżeli z grafu spójnego o jednym cyklu usuniemy zarówno węzeł do tego cyklu należący, jak również odpowiednie połączenia przez ten węzeł przechodzące, to nowopowstały graf nie będzie zawierał cykli ($u = 0$). Ponieważ w naszym przypadku usunęliśmy jeden węzeł i dwa połączenia G_Ω, otrzymany graf $G_{\Omega-p}$ zawiera $m+n-1$ węzłów i $m+n-2$ połączenia. Graf $G_{\Omega-p}$ nie zawiera więc cykli. Wynika z tego, że $\Omega-p$ jest bazą i na mocy twierdzenia 5.1 graf $G_{\Omega-p}$ jest spójny.

TWIERDZENIE 5.4. *Jeżeli B jest bazą a $p \notin B$, to węzeł p należy do cyklu prostego grafu G_{B+p}.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 4.3 graf G_{B+p} zawiera cykl. Przypuśćmy, że p nie należy do cyklu prostego grafu G_{B+p}. Usunięcie p z grafu nie wpłynie na istnienie cyklu. Oznacza to, że G_B zawiera cykl prosty

(a więc cykl), co jest sprzeczne z definicją bazy. Węzeł p należy więc do cyklu prostego grafu G_{B+p}.

TWIERDZENIE 5.5. *Do każdej ustalonej bazy B istnieje co najwyżej jedna macierz przepływów $X = \{x_{ij}\}$ taka, że dla każdego $(i, j) \notin B$ $x_{ij} = 0$.*

Dowód. Podamy postępowanie, które pozwoli nam wyznaczyć macierz $Y = \{y_{ij}\}$ rzędu $m \times n$, której elementy spełniają (2.1). Przyjmujemy, że $y_{ij} = 0$, dla każdego $(i, j) \notin B$. Należy więc wyznaczyć $m+n-1$ węzłowych elementów macierzy Y ze względu na bazę B. Weźmy pod uwagę dowolny węzeł końcowy (i_1, j_1) grafu G_B, który jest na przykład jedyny w j_1-ej kolumnie. Przyjmujemy wtedy, że $y_{i_1 j_1} = b_{j_1}$. Usuwając węzeł (i_1, j_1) z grafu G_B otrzymujemy nowy graf $G_{B-(i_1, j_1)}$, który jest spójny i bez cykli. Ażeby wyznaczyć $y_{i_2 j_2}$, gdzie (i_2, j_2) jest dowolnym węzłem końcowym grafu $G_{B-(i_1, j_1)}$ należy powtórzyć opisane wyżej postępowanie dla grafu $G_{B-(i_1, j_1)}$ z układem $M^1 = (a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1} - b_{j_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{j_1-1}, b_{j_1+1}, \ldots, b_n)$. Łatwo zauważyć, że jednoznacznie zostanie wyznaczony zbiór elementów ciągu $y_{i_1 j_1}, \ldots, y_{i_{m+n-1} j_{m+n-1}}$. Usuńmy z G_B wszystkie węzły końcowe. Otrzymany graf G_{B_1} będzie nadal spójny i bez cykli. Postępowanie to kontynuujemy do chwili uzyskania grafu G_{B_u} o jednym węźle względnie dwóch węzłach sąsiednich, otrzymując w sposób jednoznaczny ciąg spójnych, nie zawierających cykli, grafów $G_B, G_{B_1}, \ldots, G_{B_u}$. Każdy węzeł należący do B jest węzłem końcowym dokładnie jednego elementu ciągu. Wykażemy, że istnieje co najwyżej jedna macierz $Y = \{y_{ij}\}$ o następujących własnościach: a) elementy Y spełniają (2.1), b) $y_{ij} = 0$ dla każdego $(i, j) \notin B$. Przypuśćmy, że macierze $Y_1 = \{y_{ij}^{(1)}\}$ i $Y_2 = \{y_{ij}^{(2)}\}$, $Y_1 \neq Y_2$, spełniają te same własności co macierz Y. Niech L będzie dowolną linią macierzy Y_1 i Y_2. Sumy elementów węzłowych Y_1 i Y_2 ze względu na B, które znajdują się na linii L, są w obu macierzach identyczne. Macierze Y_1 i Y_2 nie mogą różnić się elementami węzłowymi $y_{ij}^{(1)}$ i $y_{ij}^{(2)}$ takimi, że (i, j) jest węzłem końcowym grafu G_B, gdyż $y_{ij}^{(1)} = y_{ij}^{(2)} = a_i$ lub b_j. Wykazaliśmy więc, że $y_{ij}^{(1)} = y_{ij}^{(2)}$ dla każdego $(i, j) \in B - B_1$. Podobnie wykazuje się, że $y_{ij}^{(1)} = y_{ij}^{(2)}$ dla każdego $(i, j) \in B_t - B_{t+1}$ $(1 \leqslant t \leqslant u-1)$ oraz dla $(i, j) \in B_u$. Wynika stąd, że macierze Y_1 i Y_2 są identyczne. Udowodniliśmy więc, że istnieje dokładnie jedna macierz $Y = \{y_{ij}\}$ spełniająca (2.1) i taka, że $y_{ij} = 0$ dla każdego $(i, j,) \notin B$. Nie musi to być macierz przepływów, bo niektóre elementy y_{ij} mogą być ujemne. W przypadku, gdy wszystkie y_{ij} są nieujemne, zdefiniowana na początku dowodu macierz będzie macierzą przepływów.

WNIOSEK 5.1. *Do każdej bazy dopuszczalnej B istnieje dokładnie jedna macierz przepływów X, którą oznaczać będziemy symbolem $X(B) = \{x_{ij}^B\}$.*

WNIOSEK 5.2. *Każda baza dopuszczalna B wyznacza jednoznacznie wartość $z_{X(B)}$ funkcji kosztów* (2.2).

6. Bazy sąsiednie, sąsiednie macierze przepływów, zerowe macierze kosztów. Dana jest macierz prostokątna oraz dowolny zbiór ω elementów tej macierzy. Ze zbioru ω należy w sposób jednoznaczny wybrać jeden element. Podamy tu jedną z możliwych reguł wyboru jednego elementu.

DEFINICJA 6.1. *Regułą zachodnio-północną* nazywamy wybór takiego elementu zbioru ω, który ma najmniejszy pierwszy wskaźnik spośród wszystkich elementów zbioru ω mających najmniejszy drugi wskaźnik (wybieramy więc „zachodnio-północny" element zbioru ω).

DEFINICJA 6.2. Dwie bazy dopuszczalne B_1 i B_2 są *sąsiednie*, jeśli różnią się jednym elementem. Dwie macierze przepływów $X(B_1)$ i $X(B_2)$ są *sąsiednie*, jeśli B_1 i B_2 są bazami sąsiednimi.

Pokażemy teraz, jak mając macierz przepływów $X(B_1)$, możemy skonstruować sąsiednią macierz przepływów. Budujemy graf G_{B_1+p}, gdzie $p = (s, t) \notin B_1$. Na mocy twierdzenia 5.2 i 5.4 G_{B_1+p} zawiera dokładnie jeden cykl, a więc jeden cykl prosty, p zaś jest węzłem tego cyklu prostego. Dzielimy zbiór węzłów tego cyklu prostego na dwa podzbiory Γ_1 i Γ_2 zaliczając każde dwa sąsiednie węzły cyklu do różnych podzbiorów. Węzeł p zaliczamy do Γ_1. W ten sposób każdy węzeł tego cyklu należeć będzie do dokładnie jednego ze zbiorów Γ_1 i Γ_2. Ze względu na parzystą ilość węzłów cyklu prostego zbiory Γ_1 i Γ_2 są równoliczne. Węzłom Γ_2 odpowiadają elementy węzłowe macierzy $X(B_1)$ ze względu na B_1. Wybieramy najmniejszy z nich, stosując w przypadku niejednoznaczności regułę zachodnio-północną. Niech to będzie element $x_{qr}^{B_1} = \bar{x}$. Bazę B_2, sąsiednią względem B_1, określa się następująco: $B_2 = B_1 - (q, r) + (s, t)$.

Elementy macierzy $X(B_2) = \{x_{ij}^{B_2}\}$ wyrażą się wzorem:

$$
\begin{aligned}
x_{ij}^{B_2} &= x_{ij}^{B_1} + \bar{x} && \text{dla każdego} \quad (i, j) \in \Gamma_1, \\
x_{ij}^{B_2} &= x_{ij}^{B_1} - \bar{x} && \text{dla każdego} \quad (i, j) \in \Gamma_2, \\
x_{ij}^{B_2} &= x_{ij}^{B_1} && \text{dla każdego} \quad (i, j) \notin \Gamma_1 + \Gamma_2.
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

Opisane postępowanie będziemy nazywali przejściem od macierzy przepływów $X(B_1)$ do sąsiedniej macierzy przepływów $X(B_2)$.

DEFINICJA 6.3. Macierz kosztów $C = \{c_{ij}\}$ nazywamy *macierzą zerową względem bazy* B, jeśli dla każdego $(i, j) \in B$ $c_{ij} = 0$.

TWIERDZENIE 6.1. *Do każdej macierzy kosztów $C = \{c_{ij}\}$ istnieje postępowanie pozwalające otrzymać zerową macierz kosztów względem danej bazy B. Macierz ta jest równoważna z macierzą C.*

Dowód. W dowodzie niniejszego twierdzenia posłużymy się definicjami 6.4, 6.5, 6.6 i 6.7.

DEFINICJA 6.4. Tworzymy graf G_B. Otrzymany graf jest spójny

i bez cykli. Zbiór elementów węzłowych macierzy C ze względu na B (krótko: elementy węzłowe macierzy C) rozbijamy na klasy. Do klasy A_1 zaliczamy dowolny element węzłowy C, który jest jedyny na linii tej macierzy. Niech to będzie $c_{i_1 j_1}$, który jest jedyny w j_1-ej kolumnie (i_1-ym wierszu). Przypuśćmy, że klasa A_t ($t = 1, 2, \ldots$) została już zdefiniowana. *Elementami klasy* A_{t+1} będą wtedy:

a) wszystkie elementy węzłowe macierzy C, znajdujące się w tych samych wierszach (kolumnach) co każdy z elementów klasy A_t, dla t nieparzystego,

b) wszystkie elementy węzłowe macierzy C, znajdujące się w tych samych kolumnach (wierszach) co każdy z elementów klasy A_t, dla t parzystego([3]).

Uwaga 6.1. Podział na klasy jest jednoznacznie wyznaczony przez wybór elementu klasy A_1. Podziałów jest tyle, co węzłów końcowych i węzłów nienarożnych o krotności 2 grafu G_B.

Z powyższej definicji wynika, że na to, by dowolny element węzłowy c_{ij} należał do jakiejś klasy potrzeba, by w grafie G_B istniała droga $(i_1, j_1)-(i, j)$, gdzie $c_{i_1 j_1} \in A_1$. Z założenia wiadomo, że dla dowolnego węzła p grafu G_B istnieje dokładnie jedna droga $(i_1, j_1)-p$ (gdyby istniały dwie drogi, G_B zawierałby cykl). Stąd wniosek, że p należy do dokładnie jednej z klas $A_1, \ldots, A_s$ (gdzie s — ilość klas), a mianowicie do klasy A_{k+1}, gdzie k jest ilością węzłów narożnych drogi $(i_1, j_1)-p$. Gdyby p należał do więcej niż jednej klasy, musiałyby istnieć co najmniej dwie różne drogi $(i_1, j_1)-p$, co jest sprzeczne z założeniem, że G_B jest bez cykli. Z uwagi tej oraz z definicji rozbicia elementów węzłowych macierzy C na klasy wynika, że na każdej linii tej macierzy znajduje się dokładnie jeden element klasy A_t ($1 \leqslant t \leqslant s-1$), pozostałe zaś elementy węzłowe macierzy C, znajdujące się na tej samej linii co ten element, należą do klasy A_{t+1}. Niech na jednej linii macierzy C znajdują się elementy węzłowe $c_p, c_{p_1}, \ldots, c_{p_q}$, gdzie $p, p_1, \ldots, p_q$ są elementami bazy B. Niech $c_p \in A_t$, pozostałe zaś elementy węzłowe niech należą do A_{t+1}. Utwórzmy drogę $(i_1, j_1)-p_u = (i_1, j_1)-p, p-p_u$ dla dowolnego $1 \leqslant u \leqslant q$. Łatwo zauważyć, że albo p jest węzłem narożnym drogi $(i_1, j_1)-p_u$ albo $p = (i_1, j_1)$. W pierwszym przypadku droga $(i_1, j_1)-p_u$ zawiera co najmniej jeden węzeł narożny, w drugim przypadku zaś droga $(i_1, j_1)-p_u$, oczywiście, węzłów narożnych nie zawiera.

Definicja 6.5. Przydzielamy każdemu elementowi klasy A_t ($1 \leqslant t \leqslant s$) linię macierzy C według następującego przepisu: Elementowi $c_{i_1 j_1} \in A_1$, który jest jedynym elementem węzłowym macierzy C w j_1-ej kolumnie (i_1-ym wierszu), przydzielamy i_1-szy wiersz (j_1-szą kolumnę).

([3]) Idea podziału na klasy jest zaczerpnięta z [11].

Elementowi $c_{ij} \in A_t$ zostaje przydzielony:

a) i-ty wiersz (j-ta kolumna), dla t nieparzystych,

b) j-ta kolumna (i-ty wiersz), dla t parzystych.

Niech $(i_1, j_1)-p_1, \ldots, p_{l-1}-p_l, p_l-p_s$, będzie dowolną drogą, $(i_1, j_1)-p_s$, i $p_1, \ldots, p_l$ będą jedynymi węzłami narożnymi tej drogi. Z definicji 6.5 wynika, że każdemu elementowi węzłowemu c_{p_r} $(1 \leqslant r \leqslant l)$ jest przydzielona linia, na której znajdują się p_r i p_{r+1}. Wykażemy, że jedna i ta sama linia L nie może zostać przydzielona dwom różnym elementom węzłowym c_{p_1} i c_{p_2} znajdującym się na tej linii. Mogą zajść dwa przypadki:

1. $c_{p_1} \in A_t$, $c_{p_2} \in A_{t+1}$. Wtedy linie przydzielone elementom węzłowym c_1 i c_2 są z definicji 6.5 różne.

2. $c_{p_1} \in A_{t+1}$, $c_{p_2} \in A_{t+1}$. Na linii L znajduje się wobec tego dokładnie jeden element węzłowy $c_p \in A_t$, gdzie, albo 1° p jest węzłem narożnym zarówno drogi $(i_1, j_1)-p$, $p-p_1$ jak i drogi $(i_1, j_1)-p$, $p-p_2$ i linia L jest przydzielona elementowi c_p, albo 2° $p = (i_1, j_1)$ i linia L jest przydzielona c_p.

Wykazaliśmy więc, że każdemu elementowi węzłowemu macierzy C przydzielona została jedna linia tej macierzy, jak również, że każdej linii macierzy C z wyjątkiem tej, której jedynym elementem węzłowym jest element klasy A_1, odpowiada jeden element węzłowy macierzy C.

DEFINICJA 6.6. Dane są: macierz kosztów C, graf G_B i dwa elementy tej macierzy $c_1 \in A_t$ oraz $c_2 \in A_{t+1}$. Mówimy, że c_1 jest *poprzednikiem* c_2 albo, że c_2 jest *następnikiem* c_1, jeśli c_1 i c_2 leżą na jednej linii macierzy C. Zapisujemy to w postaci $c_1 = R(c_2)$.

Z definicji 6.4 i 6.5 wynika natychmiast, że do każdego elementu węzłowego $c_k \in A_t$ $(1 \leqslant k \leqslant m+n-1,\ 2 \leqslant t \leqslant s)$ istnieje dokładnie jeden poprzednik $R(c_k)$, gdzie $R(c_k) \in A_{t-1}$.

DEFINICJA 6.7. Zdefiniujemy indukcyjnie układ liczb g_{c_p}, gdzie g_{c_p} oznacza liczbę, którą należy dodać do wszystkich elementów c_{ij} macierzy C, znajdujących się na jednej linii, przydzielonej elementowi węzłowemu c_p.

$$
\begin{aligned}
&g_{c_{i_1 j_1}} = -c_{i_1 j_1} \ (^4), \\
(6.2) \qquad & \\
&g_{c_p} = -g_{R(p)} - c_p \quad \text{dla} \quad p \neq (i_1, j_1).
\end{aligned}
$$

Liczb g_{c_p} jest dokładnie $m+n-1$.

Wykażemy teraz, że po dodaniu wszystkich g_{c_p} do odpowiednich linii macierzy C (do wszystkich elementów tej macierzy, znajdujących się na tej linii) otrzymamy macierz zerową względem bazy B i równoważną z C.

Niech $C^1, \ldots, C^s$ będzie ciągiem macierzy, gdzie $C^t = \{c_{ij}^t\}$ $(1 \leqslant t \leqslant s$, s — ilość klas $A_t)$ jest macierzą, która powstała z macierzy C przez

(4) Podobne postępowanie można znaleźć w [11].

dodanie liczb g_{c_p} do linii przydzielonych elementom węzłowym c_p macierzy C dla każdego $c_p \in A_1 + \ldots + A_t$. Macierz C^t mogła też powstać z macierzy C^{t-1} ($C^0 = C$) przez dodanie liczby g_{c_p} do linii przydzielonej elementowi węzłowemu c_p dla każdego $c_p \in A_t$. Jest oczywiste, że $c^1_{i_1 j_1} = 0$. Oznaczmy przez E_t zbiór wszystkich takich p, że $c_p \in A_t$. Zachodzi równość: $B = E_1 + \ldots + E_s$. Przypuśćmy, że dla pewnego t, c^t_{ij} są równe 0 dla każdego $(i,j) \in E_1 + \ldots + E_t$. Wykażemy, że $c_{ij} = 0$ dla każdego $(i,j) \in E_1 + \ldots + E_t + E_{t+1}$. Wszystkie c^t_{ij} są dla każdego $(i,j) \in E_{t+1}$ równe $c_{ij} + g_{R(c_{ij})}$.

Uwzględniając wzory definicji 6.7 otrzymamy, że wszystkie c^t_{ij} dla $(i,j) \in E_{t+1}$ są równe zeru. Wykażemy teraz, że c^{t+1}_{ij} są równe zeru dla każdego $(i,j) \in E_1 + \ldots + E_t$.

Przypuśćmy, że istnieje taki punkt $(i,j) \in E_1 + \ldots + E_t$, że $c^{t+1}_{ij} \neq 0$. Oznaczałoby to, że na linii przydzielonej elementowi klasy A_{t+1} znajduje się element klasy A_r, gdzie $r \leqslant t+1$, co jest niemożliwe, gdyż na linii tej poza elementami klasy A_{t+1} mogą znajdować się jedynie elementy klasy A_{t+2}. Ponieważ twierdzenie zachodzi dla $t = 1$, jest ono również prawdziwe dla każdego $1 \leqslant t \leqslant s$. Wykazaliśmy więc, że postępowanie podane w definicjach 6.4, 6.5, 6.6 i 6.7 pozwala otrzymać zerową macierz kosztów względem bazy B, równoważną z macierzą C.

Dowód twierdzenia 6.1 został więc zakończony.

Niech Φ będzie zbiorem wszystkich punktów (i,j) dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, a graf G_Γ ($\Gamma \subset \Phi$) — dowolnym cyklem prostym. Rozpatrzmy elementy równoważnych macierzy $C = \{c_{ij}\}$ oraz $C' = \{c'_{ij}\}$ dla każdego $(i,j) \in \Gamma$. Rozbijmy zbiór Γ na dwa podzbiory Γ_1 i Γ_2 zaliczając każde jego dwa węzły sąsiednie do różnych podzbiorów.

Zachodzi następujący

LEMAT 6.1.

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma_1} c'_{ij} - \sum_{(i,j) \in \Gamma_2} c'_{ij} = \sum_{(i,j) \in \Gamma_1} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in \Gamma_2} c_{ij} = U.$$

Dowód. Korzystając z definicji 2.1, dotyczącej macierzy równoważnych, możemy lewą stronę powyższego równania przepisać w postaci:

$$\sum_{\Gamma_1} (c_{ij} + u_i + v_j) - \sum_{\Gamma_2} (c_{ij} + u_i + v_j) =$$

$$= \sum_{\Gamma_1} c_{ij} - \sum_{\Gamma_2} c_{ij} + \sum_{\Gamma_1} (u_i + v_j) - \sum_{\Gamma_2} (u_i + v_j) = U,$$

gdyż $\sum_{\Gamma_1} (u_i + v_j) = \sum_{\Gamma_2} (u_i + v_j)$ dla każdego $\Gamma \subset \Phi$ takiego, że graf G jest cyklem prostym oraz dla każdego układu liczb u_i, v_j.

TWIERDZENIE 6.2. *Do każdej macierzy kosztów C istnieje tylko jedna równoważna z nią zerowa macierz kosztów względem danej bazy B.*

Dowód. Przypuśćmy, że dla macierzy C istnieją dwie różne równoważne z nią zerowe macierze kosztów względem B $\{c_{ij}^1\}$, $\{c_{ij}^2\}$. Istnieje więc taki punkt $(k, l) \notin B$, że $c_{kl}^1 \neq c_{kl}^2$. Graf $G_{B+(k,l)}$ zawiera w myśl twierdzenia 5.2 dokładnie jeden cykl prosty. Oznaczmy ten cykl prosty przez G_Γ, gdzie Γ jest zbiorem węzłów tego cyklu. Rozbijamy Γ na dwa podzbiory Γ_1 i Γ_2 zaliczając sąsiednie węzły cyklu prostego do różnych podzbiorów. Węzeł (r, s) zaliczamy do Γ_1. Z definicji zerowej macierzy kosztów wynika, że $c_{ij}^1 = c_{ij}^2 = 0$ dla każdego $(i, j) \in B$. Wobec tego

$$\sum_{\Gamma_1} c_{ij}^1 - \sum_{\Gamma_2} c_{ij}^1 = c_{kl}^1 \neq c_{kl}^2 = \sum_{\Gamma_1} c_{ij}^2 - \sum_{\Gamma_2} c_{ij}^2.$$

Stąd

$$\sum_{\Gamma_1} c_{ij}^1 - \sum_{\Gamma_2} c_{ij}^1 \neq \sum_{\Gamma_1} c_{ij}^2 - \sum_{\Gamma_2} c_{ij}^2.$$

Doszliśmy więc do sprzeczności (patrz lemat 6.1) co dowodzi, że twierdzenie jest prawdziwe.

Uwaga 6.2. Zerową macierz kosztów względem bazy B równoważną z macierzą $C = \{c_{ij}\}$ oznaczać będziemy symbolem $C_B = \{c_{ij}^B\}$.

Niech będą dane: macierz kosztów C oraz dwie bazy sąsiednie B_1 i B_2, gdzie $B_2 = B_1 - (q, r) + (s, t)$. Należy wyznaczyć zerową macierz kosztów $C_{B_2} = \{c_{ij}^{B_2}\}$. Można by to uczynić stosując wzory (6.2) do macierzy C. Jeśli jednak znamy macierz C_{B_1}, to prościej będzie wyjść z tej macierzy. Rozpatrzmy zbiór Φ wszystkich punktów (i, j), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Niech $B_2 \subset \Phi$ będzie dowolną bazą. Jeśli $(i, j) \notin B_2$ jest dowolnym punktem zbioru Φ, to graf $G_{B_2+(i,j)}$ zawiera dokładnie jeden cykl prosty G_Γ, przy czym (i, j) należy do tego cyklu. Węzeł $(s, t) \in B_2$ może do zbioru Γ należeć lub nie. W pierwszym przypadku zaliczamy (s, t) do zbioru Γ_1 (patrz dowód twierdzenia 6.2). Stosując (6.2) otrzymujemy wzory dla elementów zerowej macierzy kosztów C_{B_2}, gdy dana jest macierz C_{B_1}, gdzie $B_2 = B_1 - (q, r) + (s, t)$.

$$\begin{aligned} c_{ij}^{B_2} &= c_{ij}^{B_1}, && \text{gdy} \quad (s, t) \notin \Gamma, \\ c_{ij}^{B_2} &= c_{ij}^{B_1} + c_{st}^{B_1}, && \text{gdy} \quad (s, t) \in \Gamma_1, \quad (i, j) \in \Gamma_1, \\ c_{ij}^{B_2} &= c_{ij}^{B_1} - c_{st}^{B_1}, && \text{gdy} \quad (s, t) \in \Gamma_1, \quad (i, j) \in \Gamma_2. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Definicja 6.8. Dane są: macierz kosztów $C = \{c_{ij}\}$, macierz $C_{B_1} = \{c_{ij}^{B_1}\}$ oraz dwie bazy sąsiednie B_1 i $B_2 = B_1 - (q, r) + (s, t)$. Baza B_2 została wyznaczona z postępowania podanego na początku rozdziału 6. Mówimy, że baza B_2 jest *lepsza* od bazy sąsiedniej B_1, *równa* jej lub *gorsza* od niej, co zapisujemy w postaci $B_2 \prec B_1$, $B_2 \sim B_1$, $B_2 \succ B_1$, gdy $c_{st}^{B_1} < 0$, $c_{st}^{B_1} = 0$ lub $c_{st}^{B_1} > 0$. Jest oczywiste, że między dwiema dowolnymi bazami sąsiednimi zawsze zachodzi jedna z powyższych relacji.

TWIERDZENIE 6.3. *Dane są dwie bazy sąsiednie B_1 i $B_2 = B_1-(q,r)+$ $+(s,t)$. Jeśli $B_2 \prec B_1$, to $z_{X(B_2)} \leqslant z_{X(B_1)}$.*

Dowód. Obliczmy różnicę $z_{X(B_2)}(C, M)-z_{X(B_1)}(C, M) = z_{X(B_2)}-z_{X(B_1)}$. Wartość tej różnicy jest równa $z_{X(B_2)}(C_{B_1}, M)-z_{X(B_1)}(C_{B_1}, M)$ (patrz dowód tw. 2.4).

$$z_{X(B_1)}(C_{B_1}, M) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{B_1} x_{ij}^{B_1} = 0,$$

gdyż liczbom $x_{ij}^{B_1} > 0$ odpowiadają $c_{ij}^{B_1} = 0$.

$$z_{X(B_2)}(C_{B_1}, M) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{B_1} x_{ij}^{B_2} = c_{st}^{B_1} x_{qr}^{B_1} = c_{st}^{B_1} x_{st}^{B_2}.$$

$$z_{X(B_2)}-z_{X(B_1)} = z_{X(B_2)}(C_{B_1}, M)-z_{X(B_1)}(C_{B_1}, M) = c_{st}^{B_1} x_{qr}^{B_1} \leqslant 0,$$

gdyż $x_{qr}^{B_1} \geqslant 0$, zaś $c_{st}^{B_1}$ jest z założenia ujemne.

Twierdzenie 6.3 zostało więc udowodnione.

DEFINICJA 6.9. Dane są dwie bazy sąsiednie B_1 i $B_2 = B_1-(q,r)+$ $+(s,t)$. Mówimy, że B_2 jest *najlepszą bazą sąsiednią względem* B_1, jeśli

$$c_{st}^{B_1} = \min_{(i,j)\notin B_1} c_{ij}^{B_1}.$$

DEFINICJA 6.10. Dana jest macierz kosztów C oraz dowolna baza dopuszczalna B. Jeśli najlepsza baza sąsiednia względem B nie jest lepsza od B, to mówimy, że B jest bazą *optymalną*.

TWIERDZENIE 6.4. *Jeżeli baza B jest optymalna, to wszystkie elementy macierzy $C_B = \{c_{ij}^B\}$ są nieujemne.*

Dowód. Z definicji zerowej macierzy kosztów wynika, że $c_{ij}^B = 0$ dla każdego $(i,j)\in B$. Gdyby istniało takie $(i,j)\notin B$, że $c_{ij}^B < 0$, to B nie byłoby bazą optymalną, wbrew założeniu. Doszliśmy do sprzeczności, skąd wynika, że twierdzenie jest prawdziwe.

WNIOSEK 6.1. *Baza optymalna wyznacza jednoznacznie macierz optymalną* (patrz wniosek 5.1, twierdzenie 2.5 i 6.4).

Z definicji 6.2, 6.8 i 6.9 wynika łatwo postępowanie prowadzące od dowolnej bazy dopuszczalnej B_1 do najlepszej sąsiedniej bazy B_2, która jest lepsza od B_1 (jeśli taka istnieje). Postępowanie to nazywamy *krokiem*.

TWIERDZENIE 6.5 ([5]). *Jeśli dla dowolnych dwóch baz sąsiednich B_1 i B_2 relacja $B_1 \succ B_2$ pociąga za sobą nierówność $z_{X(B_1)} > z_{X(B_2)}$, to od dowolnej bazy dopuszczalnej do bazy optymalnej ilość kroków jest skończona.*

([5]) Twierdzenie i dowód 6.5 są grafowym odpowiednikiem twierdzenia i dowodu zawartego w [5].

Dowód. Wynika to z tego, że zbiór baz dopuszczalnych jest zbiorem skończonym (liczność jego nie przekracza $\binom{mn}{m+n-1}$ oraz z tego, że dwóm różnym wartościom funkcji kosztów odpowiadają dwie różne bazy dopuszczalne (patrz wniosek 5.2).

Możemy teraz udowodnić

WNIOSEK 6.2. *Do każdej macierzy przepływów X można dobrać macierz przepływów $\hat{X}$, zawierającą co najwyżej $m+n-1$ elementów dodatnich i taką, że $z_X \geqslant z_{\hat{X}}$.*

Dowód. Niech dane będą: macierz kosztów $C = \{c_{ij}\}$ oraz macierz przepływów $X = \{x_{ij}\}$, zawierająca więcej niż $m+n-1$ dodatnich elementów. Oznaczmy przez Ω zbiór tych (i,j), dla których $x_{ij} > 0$. Graf G_Ω zawiera w myśl twierdzenia 4.3 przynajmniej jeden cykl prosty, gdyż dowolny jego podgraf o $m+n$ węzłach zawiera cykl prosty. Oznaczmy ten cykl prosty przez G_Γ. Rozbijamy Γ na dwa podzbiory Γ_1 i Γ_2 zaliczając sąsiednie węzły cyklu do różnych podzbiorów. Obliczmy $\sum\limits_{(i,j)\in\Gamma_1} c_{ij}$ oraz $\sum\limits_{(i,j)\in\Gamma_2} c_{ij}$ i niech $\sum\limits_{\Gamma_1} c_{ij} \leqslant \sum\limits_{\Gamma_2} c_{ij}$. Znajdujemy $\min\limits_{(i,j)\in\Gamma_2} x_{ij} = \bar{x}$, gdzie $x_{ij} = \bar{x}$ dla każdego $(i,j)\in a \subset \Gamma_2$. Elementy nowej macierzy $X' = \{x'_{ij}\}$ wyrażą się następująco:

$$x'_{ij} = x_{ij} \quad \text{dla każdego} \quad (i,j)\notin\Gamma,$$

$$x'_{ij} = x_{ij} + \bar{x} \quad \text{dla każdego} \quad (i,j)\in\Gamma_1,$$

$$x'_{ij} = x_{ij} - \bar{x} \quad \text{dla każdego} \quad (i,j)\in\Gamma_2.$$

Łatwo zauważyć, że X' jest macierzą przepływów; $x'_{ij} > 0$ dla każdego $(i,j)\in\Omega - a$. Graf $G_{\Omega-a}$ nie zawiera cyklu prostego G_Γ. Badamy teraz $G_{\Omega-a}$. Jeśli graf ten zawiera cykl prosty, to powtarzamy powyższe postępowanie od początku, otrzymując kolejną macierz przepływów $X'' = \{x''_{ij}\}$, gdzie $x''_{ij} > 0$ dla każdego $(i,j)\in\Omega_1 \subset \Omega - a$. Istnieje przy tym taki cykl prosty, który jest podgrafem grafu $G_{\Omega-a}$, a nie jest podgrafem grafu G_{Ω_1}.

Stosując to postępowanie wielokrotnie otrzymujemy macierz przepływów $\hat{X} = \{\hat{x}_{ij}\}$ taką, że jeśli $\hat{x}_{ij} > 0$ dla każdego $(i,j)\in\Omega_u$, to graf G_{Ω_u} nie zawiera cykli. Na mocy twierdzenia 4.3 liczba węzłów grafu G_{Ω_u} nie przekracza $m+n-1$.

Wykażemy jeszcze, że $z_{X'} \leqslant z_X$. Mamy

$$z_X = \sum_{(i,j)\notin\Gamma} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in\Gamma_1} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in\Gamma_2} c_{ij}x_{ij},$$

$$z_{X'} = \sum_{(i,j)\notin\Gamma} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in\Gamma_1} c_{ij}(x_{ij}+\bar{x}) + \sum_{(i,j)\in\Gamma_2} c_{ij}(x_{ij}-\bar{x}),$$

$$z_{X'} - z_X = \sum_{(i,j)\in\Gamma_1} c_{ij}\bar{x} + \sum_{(i,j)\in\Gamma_2} c_{ij}(-\bar{x}) = \bar{x}\Big(\sum_{(i,j)\in\Gamma_1} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\Gamma_2} c_{ij}\Big) \leqslant 0,$$

gdyż $\sum_{(i,j)\in\Gamma_1} c_{ij} \leqslant \sum_{(i,j)\in\Gamma_2} c_{ij}$, a $\bar{x} > 0$.

Widzimy więc, że przy każdym takim przejściu od jednej macierzy przepływów do następnej macierzy przepływów funkcja kosztów nie rośnie. Wynika stąd, że $z_{\hat{X}} \leqslant z_X$. Wniosek został więc udowodniony.

7. Początkowa macierz przepływów

DEFINICJA 7.1 (patrz [1]). *Prostą macierzą przepływów* X nazywamy macierz, którą otrzymuje się w sposób następujący: Rozważa się układ (C_1, M_1), gdzie $C_1 = C = \{c_{ij}\}$, a $M_1 = M = (a_1, \ldots, a_m;\ b_1, \ldots, b_n)$. Ustalamy kryterium, które dla każdej macierzy pozwala wybrać jeden element tej macierzy. Stosujemy to kryterium do macierzy kosztów $C = C_1$. Niech $c_{i_1 j_1}$ będzie wybranym elementem macierzy C_1. Przyjmujemy $x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1})$. Następnie rozważamy nowy układ (C_2, M_2), gdzie C_2 jest nową macierzą różniącą się od C_1 tym, że w C_2 brak elementów i_1-szego wiersza lub j_1-szej kolumny względnie i_1-szego wiersza oraz j_1-szej kolumny jednocześnie, $M_1 = (a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_m;\ b_1, \ldots, b_{j_1-1}, b_{j_1} - a_{i_1}, b_{j_1+1}, \ldots, b_n)$, lub $M_1 = (a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1} - b_{j_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_m;\ b_1, \ldots, b_{j_1-1}, b_{j_1+1}, \ldots, b_n)$ względnie $M_1 = (a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_m;\ b_1, \ldots, b_{j_1-1}, b_{j_1+1}, \ldots, b_n)$ w zależności od tego, czy $a_{i_1} < b_{j_1}$, $a_{i_1} > b_{j_1}$ lub $a_{i_1} = b_{j_1}$. Powtarzamy to samo postępowanie w stosunku do układu (C_2, M_2). Po wyznaczeniu $x_{i_2 j_2}$ badamy kolejny układ (C_3, M_3). Wielokrotne stosowanie tego samego postępowania doprowadzi nas do układu (C_u, M_u), gdzie C_u jest macierzą o jednym wierszu lub jednej kolumnie. Niech C_u będzie macierzą rzędu $l \times 1$ $(1 \leqslant l \leqslant m)$. Wtedy M_u jest układem $l+1$ liczb dodatnich, przy czym $(l+1)$-szy element M_u jest sumą pierwszych l elementów tego układu. Wyznaczamy teraz ciąg l liczb $x_{i_u j_u}, \ldots, x_{i_{u+l-1} j_{u+l-1}}$ przyjmując, że v-ty wyraz ciągu $(1 \leqslant v \leqslant l)$ jest równy v-temu elementowi układu M_u. Podobnie postępujemy w przypadku, gdy C_u jest macierzą o jednym wierszu. Przypuśćmy, że wyznaczyliśmy w ten sposób elementy $x_{i_1 j_1}, \ldots, x_{i_k j_k}$ macierzy $X = \{x_{ij}\}$. Jeśli przez Ω oznaczymy zbiór punktów $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$, to przyjmujemy $x_{ij} = 0$ dla każdego $(i, j) \notin \Omega$. Łatwo sprawdzić, że macierz $X = \{x_{ij}\}$ w ten sposób zdefiniowana jest macierzą przepływów zagadnienia transportowego (C, M).

TWIERDZENIE 7.1 (6). *Jeśli Ω jest zbiorem wyznaczonym przez postępowanie zawarte w definicji 7.1, to graf G_Ω nie zawiera cykli.*

---

(6) Podobne twierdzenie można znaleźć w [2]. Dotyczy ono inaczej zdefiniowanych grafów.

Dowód. Wystarczy wykazać, że G_Ω nie zawiera cykli prostych. Przypuśćmy, że graf G_Ω zawiera cykl prosty G_Γ. Istnieje więc węzeł $p \in \Gamma$, który spośród węzłów należących do Γ występuje w ciągu $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$ najwcześniej. Węzeł p ma dwa węzły sąsiednie $p_1, p_2 \in \Gamma$ (znajdują się one na liniach prostopadłych). Zgodnie z definicją 7.1 p_1 i p_2 nie mogą jednocześnie należeć do zbioru Ω a tym samym do Γ. Doszliśmy więc do sprzeczności, co dowodzi, że twierdzenie jest prawdziwe.

WNIOSEK 7.1. *Zbiór Ω określony w definicji 7.1 zawiera co najwyżej $m+n-1$ elementów.*

DEFINICJA 7.2. Dany jest układ (C, M). *Perturbacją Dantziga* nazywamy nowy układ $(C, \bar{M})$, gdzie $\bar{M} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m; \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$. Elementy $\bar{M}$, które są liczbami dodatnimi, określa się w sposób następujący:

$$\bar{a}_i = a_i + \varepsilon \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m, \tag{7.1}$$
$$\bar{b}_j = \begin{cases} b_j & \text{dla} \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ b_j + m\varepsilon & \text{dla} \quad j = n, \end{cases}$$

gdzie ε jest liczbą dodatnią, którą należy ustalić. Rozpatrzmy pewną perturbację Dantziga $(C, \bar{M})$. Niech $I = (1, \ldots, m)$, $J = (1, \ldots, n)$, I^* i J^* zaś są dowolnymi podzbiorami właściwymi odpowiednio zbiorów I oraz J. Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 7.2 (patrz [5]). *Istnieje $\varepsilon > 0$ i takie, że relacja*

$$\sum_{i \in I^*} \bar{a}_i \neq \sum_{j \in J^*} \bar{b}_j \tag{7.2}$$

zachodzi dla dowolnych I^* oraz J^*.

Dowód. Istnieje skończona liczba w kombinacji podzbiorów I^* oraz J^*. Ponumerujmy te kombinacje i rozpatrzmy r-tą z nich, $1 \leqslant r \leqslant w$. Niech

$$\sum\nolimits_r \bar{a}_i = \sum\nolimits_r \bar{b}_j. \tag{7.3}$$

Jest to równanie pierwszego stopnia względem ε, z którego ε da się zawsze wyznaczyć, gdyż współczynnik przy niewiadomej po lewej stronie (7.3) jest liczbą naturalną zawartą między 1 a $m-1$, współczynnik przy ε po prawej stronie (7.3) jest 0 lub m. Rozwiązując każde z w równań i odrzucając niedodatnie pierwiastki (ε z założenia ma być >0) otrzymujemy ciąg liczb-rozwiązań, które można uporządkować w kierunku niemalejącym. Niech to będzie ciąg $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{w_1}$ gdzie $w_1 \leqslant w$. Łatwo zauważyć, że (7.2) zachodzi dla dowolnego ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Jeśli ciąg $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{w_1}$ nie zawiera elementów, ε jest dowolną liczbą dodatnią.

TWIERDZENIE 7.3. *Jeśli w konstrukcji prostej macierzy przepływów $X = \{x_{ij}\}$ wyznaczeniu każdego $x_{i_s j_s}$, $(i_s, j_s) \in \Omega$, towarzyszy przejście*

od macierzy C_s do macierzy C_{s+1}, przy czym przejście to polega na odrzuceniu dokładnie jednej linii macierzy C_s, to zbiór Ω zawiera dokładnie $m+n-1$ elementów.

Dowód. Twierdzenie to wynika łatwo z definicji 7.1. Przypuśćmy, że, stosując postępowanie zawarte w tej definicji, doszliśmy do układu (C_u, M_u), gdzie C_u jest macierzą rzędu $l\times 1$ $(1 \leqslant l \leqslant m)$. Z układu (C_u, M_u) wyznaczymy dokładnie l elementów x_{ij}, $(i,j)\in\Omega$. Zauważmy, że macierz C_u powstała z macierzy $C = C_1$ przez dokonanie dokładnie $u-1 = (n-1)+(m-1)$ skreśleń. Stąd i z założenia wynika, że liczność zbioru wynosi $(n-1)+(m-1)+1 = m+n-1$, c.b.d.o.

Przypuśćmy, że zbiór Ω został wyznaczony przez postępowauie z definicji 7.1, a I^* oraz J^* są właściwymi podzbiorami odpowiednio zbiorów $I = (1,\ldots,m)$ oraz $J = (1,\ldots,n)$. Udowodnimy,

TWIERDZENIE 7.4 (patrz [5]). *Jeśli dla każdego I^* i J^* zachodzi*

$$\sum_{i\in I^*} a_i \neq \sum_{j\in J^*} b_j, \tag{7.4}$$

to Ω zawiera dokładnie $m+n-1$ elementów.

Dowód. Wystarczy wykazać, że wyznaczeniu elementu $x_{i_s j_s}$ towarzyszy skreślenie dokładnie jednej linii odpowiedniej macierzy C_s, która zawiera więcej niż jeden element. Ponieważ twierdzenie jest oczywiste, gdy C_s jest macierzą o jednym wierszu lub jednej kolumnie, wystarczy rozpatrzyć jedynie przypadek, gdy C_s jest macierzą rzędu $l\times k$ $(2 \leqslant l \leqslant m$, $2 \leqslant k \leqslant n)$. Element zbioru Ω wyznacza się z równości: $x_{i_s j_s} = \min(\hat{a}_{i_s}, \hat{b}_{j_s})$, gdzie $\hat{a}_{i_s}, \hat{b}_{j_s}$ są elementami układu M_s, przy czym $\hat{a}_{i_s} = \sum_{i\in I_1^*} a_i - \sum_{j\in J_1^*} b_j > 0$, $\hat{b}_{j_s} = \sum_{j\in J_2^*} b_j - \sum_{i\in I_2^*} a_i > 0$, gdzie $I_1^*+I_2^* = I_3^* \subset I$, $J_1^*+J_2^* = J_3^* \subset J$, $I_1^*\cdot I_2^* = 0$, $J_1^*\cdot J_2^* = 0$ i I_3^* oraz J_3^* nie mogą być zbiorami pustymi (wynika to z definicji 7.1). Z równania $\hat{a}_{i_s} = \hat{b}_{j_s}$ wynikałaby równość:

$$\sum_{i\in I_1^*} a_i + \sum_{i\in I_2^*} a_i = \sum_{j\in J_1^*} b_j + \sum_{j\in J_2^*} b_j$$

albo

$$\sum_{i\in I_3^*} a_i = \sum_{j\in J_3^*} b_j.$$

Jest to sprzeczne z założeniem. Uwzględniając twierdzenie 7.3 otrzymujemy tezę.

WNIOSEK 7.2. *Zbiór Ω wyznaczony z definicji 7.1 dla układu $(C, \bar{M})$ (patrz definicja 7.2) przy $\varepsilon > 0$, spełniającym warunek (7.2) (patrz dowód twierdzenia 7.2) jest bazą.*

Wynika to natychmiast z twierdzeń 7.1, 7.2 i 7.4.

Wprowadzimy modyfikację postępowania, zawartego w definicji 7.1.

DEFINICJA 7.3. W przypadku, gdy dla układu (C_s, M_s) zachodzi dla wyznaczonego $x_{i_s j_s} = \min(\hat{a}_{i_s}, \hat{b}_{j_s})$ równość $\hat{a}_{i_s} = \hat{b}_{j_s}$, $1 \leqslant s \leqslant m+ +n-2$, skreślamy wiersz i_s macierzy C_s, otrzymując w ten sposób kolejną macierz C_{s+1}.

WNIOSEK 7.3. *Zbiór Ω wyznaczony przez postępowanie z definicji 7.2 i 7.3 jest bazą.*

Wynika to bezpośrednio z twierdzenia 7.3.

TWIERDZENIE 7.5. *Dla dowolnej bazy dopuszczalnej B postępowanie zawarte w definicji 7.1 wyznacza macierz przepływów $X(B)$.*

Dowód. Wystarczy zastosować następujące kryterium wyboru. Elementem $(i_s, j_s) \in \Omega$ będzie dowolny element węzłowy macierzy kosztów C ze względu na B, który jest jedyny w wierszu lub kolumnie kolejnej macierzy C_s.

WNIOSEK 7.4. *Jeśli $\sum_{i \in I^*} a_i \neq \sum_{j \in J^*} b_j$, gdzie I^* i J^* są dowolnymi podzbiorami właściwymi odpowiednio zbiorów $I = (1, 2, \ldots, m)$ oraz $J = (1, 2, \ldots, n)$, to dla każdego $(i, j) \in B$ element x_{ij} macierzy przepływów $X(B)$ jest dodatni.*

Wynika to od razu z twierdzeń 7.4 i 7.5.

WNIOSEK 7.5. *Istnieje baza optymalna B zagadnienia transportowego $(C, \bar{M})$* (patrz definicja 7.2, gdzie $\varepsilon > 0$ spełnia warunek (7.2)), *która jest zarazem bazą optymalną zagadnienia transportowego (C, M).*

Pierwsza część wniosku wynika bezpośrednio z twierdzeń 6.5, 7.2 i wniosku 7.3. Prawdziwość drugiej części można wykazać przyjmując $\varepsilon = 0$ w optymalnej macierzy przepływów $\bar{X}(B)$ zagadnienia $(C, \bar{M})$. Otrzymamy w ten sposób macierz $X(B)$, która jest optymalną macierzą przepływów zagadnienia (C, M), gdyż obydwa zagadnienia $(C, \bar{M})$ i (C, M) mają tę samą zerową macierz kosztów C_B.

DEFINICJA 7.4. Niech dane będzie zagadnienie transportowe (C, M), gdzie C jest macierzą rzędu $2 \times n$ (lub $m \times 2$). Definiujemy *metodę znajdowania prostej macierzy X*. Rozpatrzmy przypadek $2 \times n$ (postępowanie jest symetryczne dla przypadku $m \times 2$). Obliczamy wartość bezwzględną różnicy między obydwoma elementami każdej kolumny macierzy $C = C_1$. Stosujemy postępowanie podane w definicjach 7.1 i 7.3 wybierając element macierzy C mniejszy w kolumnie, dla której obliczona różnica jest największa. W wypadku niejednoznaczności wybieramy kolumnę o mniejszym numerze. Powyższe kryterium wyboru będzie również się odnosiło do kolejnych macierzy $C_2, \ldots, C_n$ (liczność zbioru Ω wynosi bowiem $n+1$, patrz twierdzenie 7.3).

WNIOSEK 7.6. *Zbiór Ω wyznaczony przez postępowanie zawarte w definicji 7.4 jest bazą.*

TWIERDZENIE 7.6. *Postępowanie określone w definicji 7.4 wyznacza macierz optymalną.*

Dowód. Niech baza B będzie zbiorem wyznaczonym przez postępowanie z definicji 7.4 (wniosek 7.6). Wystarczy wykazać, że każdy element c_{ij}^B zerowej macierzy kosztów C_B jest nieujemny dla $(i,j)\notin B$. Baza B zawiera $n+1$ elementów. Ze względu na to, że w każdej kolumnie macierzy $C = C_1 = \{c_{ij}\}$ znajduje się przynajmniej jeden element węzłowy macierzy kosztów ze względu na B, jedna kolumna tej macierzy zawiera dokładnie dwa elementy węzłowe. Postępowanie z definicji 7.4 wyznaczy ciąg $n+1$ liczb $x_{i_s j_s}$ $(i_s, j_s)\in B$, któremu można przyporządkować ciąg j_s odpowiednich kolumn macierzy C. Niech na przykład wyborowi elementu $x_{1,k}$, znajdującemu się w kolumnie występującej na l-tym miejscu tego ciągu, towarzyszy przejście do jednowierszowej macierzy C_{l+1} (kolumna k będzie w tym ciągu występowała na l-tym i $(l+1)$-szym miejscu). Wówczas punkt $(2,k)$ również należy do B. Rozpatrzmy teraz dowolny element c_{ij}^B dla $(i,j)\notin B$. Graf $G_{B+(i,j)}$ zawiera dokładnie jeden cykl prosty G_Γ (patrz twierdzenie 5.2) o czterech węzłach. Rozbijamy Γ na dwa podzbiory Γ_1 i Γ_2 zaliczając węzły sąsiednie cyklu do różnych podzbiorów. Umawiamy się, że $(i,j)\in\Gamma_1$. Numer j-tej kolumny może być w uporządkowaniu kolumn mniejszy od l lub większy od $l+1$.

Rozpatrzmy przypadek pierwszy: c_{ij} jest wtedy większym elementem w j-tej kolumnie, a wobec tego $i = 2$. Z założenia wynika, że

$$c_{2j}-c_{1j} \geqslant c_{2k}-c_{1k} \quad \text{czyli} \quad (c_{2j}+c_{1k})-(c_{1j}+c_{2k}) = U \geqslant 0.$$

Korzystając z lematu 6.1 mamy $c_{ij}^B = U \geqslant 0$.

W przypadku drugim i-ta współrzędna elementu c_{ij} musi być równa 1, gdyż $(i,j)\notin B$ (c_{2j} jest bowiem elementem węzłowym macierzy C ze względu na B). Może się zdarzyć, że a) $c_{1j}\leqslant c_{2j}$, b) $c_{1j} > c_{2j}$. Rozpatrzmy a).

Z założenia $c_{2j}-c_{1j}\leqslant c_{2k}-c_{1k}$, skąd

$$(c_{1j}+c_{2k})-(c_{2j}+c_{1k}) = c_{ij}^B \geqslant 0.$$

Rozpatrzmy b)

$c_{1j} > c_{2j}$ i $c_{2k}\geqslant c_{1k}$. Wobec tego $c_{1j}+c_{2k} > c_{2j}+c_{1k}$, czyli

$$(c_{1j}+c_{2k})-(c_{2j}+c_{1k}) = c_{ij}^B > 0.$$

Dowód przebiega analogicznie dla przypadku, gdy zostanie skreślony drugi wiersz. Twierdzenie zostało więc udowodnione.

DEFINICJA 7.5. *Pierwszą różnicą linii macierzy prostokątnej o skończonej ilości elementów* nazywać będziemy różnicę między przedostatnim co do wielkości elementem tej linii, a jej elementem najmniejszym.

Omówimy teraz najbardziej rozpowszechnione metody znajdowania początkowej macierzy przepływów. Zaliczamy do nich:

1) metodę Dantziga (North-West Corner Rule) [5],

2) metodę minimum macierzy [2], [10], str. 152,

3) metodę VAM (Vogels Approximation Method) [19], str. 43-54.

Wszystkie te metody są oparte na postępowaniu z definicji 7.1. Różnią się jedynie co do kryterium wyboru. Dla kolejnej macierzy C_s z układu (C_s, M_s) $(1 \leqslant s \leqslant m+n-2)$ kryteria te polegają na wybraniu 1) elementu macierzy C_s o najmniejszym pierwszym i drugim wskaźniku, dla metody Dantziga, 2) najmniejszego elementu macierzy C_s, dla metody minimum macierzy, 3) najmniejszego elementu tej linii macierzy C_s, która ma największą pierwszą różnicę, dla metody VAM.

TWIERDZENIE 7.7. *Niech B będzie bazą optymalną zagadnienia (C, M). $C_B = \{c_{ij}^B\}$ zaś — zerową macierzą kosztów taką, że $c_{ij}^B > 0$ dla każdego $(i, j) \notin B$. Macierz przepływów X wyznaczona metodą* VAM *dla zagadnienia (C_B, M) jest macierzą optymalną obydwu zagadnień.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że X jest macierzą optymalną zagadnienia transportowego (C_B, M) (patrz twierdzenie 2.4). Prawdziwość twierdzenia 7.7 jest oczywista, jeśli się zauważy, że metoda VAM naśladuje postępowanie podane w dowodzie twierdzenia 7.5. Kryterium wyboru polega w istocie na wybraniu tego elementu węzłowego macierzy C_B ze względu na B, który jest jedyny na linii kolejnej s-tej macierzy powstałej z macierzy C_B przez odrzucenie przynajmniej s linii tej ostatniej. Nie jest istotne, czy wybrany element węzłowy znajduje się na linii o największej pierwszej różnicy, ale że różnica ta jest > 0.

Uwaga 7.1. Dane jest zagadnienie transportowe (C_B, M) (patrz tw. 7.7). Zbiór Ω wyznaczony metodą VAM jest podzbiorem bazy optymalnej. Wynika to natychmiast z dowodu twierdzenia 7.7.

Uwaga 7.2. Układ (C_B, M) można by w uwadze (7.1) zastąpić układem (C', M), gdzie $C' = \{c_{ij}^B + e\}$, liczba e zaś jest dowolną stałą.

Dana jest optymalna macierz przepływów $X = \{x_{ij}\}$ zagadnienia transportowego (C, M) oraz dwa dowolne zbiory I_1 i J_1 o odpowiednio m_1 i n_1 elementach, gdzie $I_1 \subset I = (1, \ldots, m)$, $J_1 \subset J = (1, \ldots, n)$, $m_1 < m$, $n_1 < n$. Niech $C^{(u)} = \{c_{ij}^{(u)}\}$ oraz $X^{(u)} = \{x_{ij}^{(u)}\}$ $(i \in I_1,\ j \in J_1)$, przy czym $c_{ij}^{(u)} = c_{ij}$, $x_{ij}^{(u)} = x_{ij}$ dla każdego $i \in I_1$, $j \in J_1$. Utwórzmy układ liczb $M^{(u)}$, którego pierwszymi m_1 elementami są sumy wszystkich elementów kolejnych wierszy, pozostałe n_1 elementów są sumami wszystkich elementów kolejnych n_1 kolumn macierzy X. Zachodzi oczywiste:

TWIERDZENIE 7.8. *$X^{(u)}$ jest macierzą optymalną zagadnienia transportowego $(C^{(u)}, M^{(u)})$.*

Uwaga 7.3. Jeśli, stosując postępowanie z definicji 7.1, dojdziemy do układu (C_s, M_s), i wyznaczone elementy $(i_1, j_1), \ldots, (i_s, j_s)$ zbioru

Ω należą do bazy optymalnej, C_s zaś jest macierzą o dwóch wierszach lub dwóch kolumnach, to zastosowanie metody opisanej w definicji 7.4 wyznaczy elementy należące również do bazy optymalnej.

Autor, korzystając z twierdzenia 7.8, proponuje poprawkę do metody VAM. Na to, by wyznaczyć prostą macierz przepływów zagadnienia transportowego (C, M) należy stosować metodę VAM z modyfikacją podaną w definicji 7.3, do chwili uzyskania układu (C_s, M_s), gdzie C_s jest macierzą o dwóch wierszach lub dwóch kolumnach. Następne elementy macierzy przepływów znajdujemy metodą podaną w definicji 7.4.

Zajmiemy się teraz dolnym oszacowaniem funkcji kosztów. Z uwagi 2.1 wynika, że

$$z_X = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} + K,$$

gdzie

$$\{d_{ij}\} = \{c_{ij} - u_i - v_j\} = D, \qquad K = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j.$$

Załóżmy dodatkowo, że $c_{ij} - u_i - v_j \geqslant 0$ dla każdego i, j. Wówczas

$$z_X \geqslant K.$$

Z wniosku 7.4 o istnieniu bazy optymalnej zagadnienia transportowego (C, M) wynika, że

$$\max_{u_i + v_j \leqslant c_{ij}} K = \min_{X \in \mathscr{X}} z_X,$$

gdzie $\mathscr{X}$ jest zbiorem macierzy przepływów zagadnienia (C, M). Liczba K będzie więc dla $d_{ij} \geqslant 0$ dolnym oszacowaniem funkcji kosztów. Znane są różne przybliżone metody wyznaczenia największej wartości K. Podamy tutaj metodę J. Stringera i K. B. Haleya [23].

Znajdujemy najmniejsze elementy każdej linii macierzy C, a następnie tworzymy nierosnący ciąg a o wyrazach $a_i r_i$, $b_j s_j$, gdzie r_i lub s_j jest najmniejszym elementem w i-tym wierszu albo w j-tej kolumnie macierzy C. Ciągowi a możemy przyporządkować taki ciąg a', że jego elementami są linie macierzy C, na których znajdują się kolejne wyrazy ciągu a. Przypuśćmy, że w a' na pierwszym miejscu występuje k-ty wiersz. Odejmując od wszystkich elementów k-tego wiersza macierzy C liczbę $r_k = u_k$ otrzymujemy nową macierz $C' = \{c'_{ij}\}$. Do niej stosujemy to samo postępowanie odejmując kolejną liczbę od wszystkich elementów tej linii macierzy C', która jest drugim wyrazem ciągu a', przy czym liczba ta jest najmniejszym elementem w tej linii. Stosując powyższe postępowanie $m+n$ razy wyznaczamy macierz $D = \{d_{ij}\} = \{c_{ij} - u_i - v_j\}$

o elementach nieujemnych i taką, że każda linia tej macierzy zawiera przynajmniej jeden element równy zero. Praktyka wykazała, że baza dopuszczalna wyznaczona metodą VAM z zaproponowaną poprawką dla zagadnienia (D, M) (D jest macierzą otrzymaną metodą Stringera-Haleya z macierzy kosztów C), jest na ogół bliższa do bazy optymalnej, niż baza dopuszczalna wyznaczona tą samą metodą dla zagadnienia (C, M). Znajdowanie macierzy D jest bardzo użyteczne dla dużych m i n, szczególnie wtedy, gdy wystarcza rozwiązanie przybliżone. W ostatnim przypadku interesuje nas przedział, w jakim zawarta jest najmniejsza wartość funkcji kosztów, którą oznaczymy przez $z_{\min}$. Jest oczywiste, że

$$K \leqslant z_{\min} \leqslant z_X,$$

gdzie $z_X = \min(z_{X_1}, z_{X_2})$, X_1, X_2 są macierzami przepływów, które zostały wyznaczone metodą VAM (z zaproponowaną poprawką) dla zagadnień (C, M) i (D, M) a X jest jedną z macierzy X_1, X_2.

Podamy na zakończenie dowód wniosku 2.8. Wystarczy wykazać, że istnieje przynajmniej jedna macierz optymalna (z bazą) o elementach całkowitych dla zagadnienia transportowego (C, M), gdzie elementami układu M są liczby naturalne.

Twierdzenie to wynika z postępowania podanego w definicji 7.1, wyznaczającego prostą macierz przepływów o elementach całkowitych, gdyż na elementach M dokonywane są operacje odejmowania. Z wzorów (6.1) wynika, że jeśli dowolna macierz przepływów z bazą ma elementy całkowite, to i sąsiednia macierz przepływów będzie miała elementy całkowite. Wynika stąd, że elementami macierzy optymalnej z bazą są liczby całkowite.

8. Postępowanie. Na podstawie teorii przedstawionej w poprzednich paragrafach podajemy algorytm na wyznaczenie macierzy optymalnej zagadnienia transportowego (C, M).

1. Wyznaczamy początkową, prostą macierz przepływów $X(B_1)$, stosując postępowanie zawarte w definicjach 7.1 i 7.3 i korzystając z metody VAM z zaproponowaną poprawką (patrz koniec rozdziału 7).

2. Znajdujemy zerową macierz kosztów C_{B_1} postępowaniem, podanym w definicjach 6.4, 6.5, 6.6 i 6.7.

3. Rozpatrujemy macierz C_{B_1}. Może się zdarzyć, że najlepsza względem B_1 baza sąsiednia B_2 (patrz definicje 6.1, 6.8 i 6.9) jest:

a) gorsza od B_1 lub równa B_1,

b) lepsza od B_1.

W przypadku a) B_1 jest bazą optymalną i $X(B_1)$ jest szukaną macierzą optymalną.

W przypadku b) stosujemy postępowanie podane na str. 180 otrzymując nową macierz przepływów $X(B_2)$, $(z_{X(B_2)} \leqslant z_{X(B_1)})$ i powtarzamy 2 i 3 na przemian, aż uzyskamy 3a lub, po skończonej ilości kroków, uzyskamy macierz przepływów wyznaczoną już poprzednio.

Uwaga 8.1. Jeśli dana jest zerowa macierz kosztów C_{B_k}, a B_k i B_{k+1} są bazami sąsiednimi, to wygodniej jest wyznaczyć macierz $C_{B_{k+1}}$ z macierzy C_{B_k} (a nie z macierzy C).

4. Jeśli postępowanie opisane w 1, 2, 3 dla zagadnienia (C, M) nie doprowadzi (7) do znalezienia macierzy optymalnej, to stosujemy 1, 2, 3 do zagadnienia transportowego $(C, \bar{M})$ (patrz definicja 7.2), gdzie $\varepsilon > 0$ i spełnia warunek (7.2). Podstawiając w otrzymanej optymalnej macierzy przepływów za ε liczbę zero znajdujemy optymalną macierz przepływów zagadnienia (C, M) (patrz wniosek 7.4). Z twierdzenia 6.5, 7.2 i wniosku 7.3 wynika, że liczba kroków w 4 jest skończona.

Uwaga 8.2. Można sobie znacznie ułatwić znajdowanie kolejnej zerowej macierzy kosztów $C_{B_{k+1}}$ uwzględniając położenie wprowadzonego węzła (patrz rozdział 9).

Uwaga 8.3. Wyznaczenie początkowej macierzy przepływów dla zagadnienia transportowego (D, M) (patrz rozdział 7a) opłaca się stosować jedynie dla dużych zagadnień, gdy chciałoby się zaoszczędzić przynajmniej 5 kroków.

9. Przykłady. 1. Rozpatrzmy zagadnienie transportowe o 5 dostawcach i 8 odbiorcach z następującą macierzą kosztów:

$C = C_1 =$

13	16	41	23	15	14	19	16	12
15	5	19	16	12	35	14	13	6
23	20	19	13	8	9	20	14	16
7	12	11	9	19	16	15	28	9
19	11	19	6	21	24	7	25	8
5	8	9	3	4	6	4	12	

Liczby po prawej stronie i u dołu macierzy kosztów są odpowiednio podażami dostawców i popytami odbiorców.

(7) Autor nie zna przykładu, w którym etap 4 byłby potrzebny.

Zgodnie z postępowaniem opisanym w punktach 1, 2, 3 rozdziału 8 wyznaczamy początkową macierz przepływów. W tym celu obliczamy pierwsze różnice w każdej linii macierzy C, które wypisujemy nad każdą linią lub po jej lewej stronie.

	6	6	8	3	4	5	7	1
1	13	16	41	23	15	14	19	16
7	15	5	19	16	12	35	14	13
1	23	20	19	13	8	9	20	14
2	7	12	11	9	19	16	15	28
1	19	11	19	6	21	24	7	25

Trzecia kolumna macierzy C ma największą pierwszą różnicę $= 8$. Wybieramy więc najmniejszy element trzeciej kolumny; jest nim $c_{4,3} = 11$.

	6	6	8	3	4	5	7	1	
1	13	16	41	23	15	14	19	16	12
7	15	5	19	16	12	35	14	13	6
1	23	20	19	13	8	9	20	14	16
~~2~~	~~7~~	~~12~~	~~11~~ 9	~~9~~	~~19~~	~~16~~	~~15~~	~~28~~	~~9~~
1	19	11	19	6	21	24	7	25	8
	5	8	~~9~~ 0	3	4	6	4	12	

Przyjmujemy, że $x_{4,3} = \min(9, 9) = 9$ i, zgodnie z definicją 7.3, skreślamy czwarty wiersz macierzy C.

Wypisujemy pierwsze różnice dla nowej macierzy C_2, rzędu 4×8, z nowym układem M_2.

	2		0	7					
	~~6~~	6	~~8~~	~~3~~	4	5	7	1	
1	13	16	41	23	15	14	19	16	12
7	15	5 6	19	16	12	35	24	13	6
1	23	20	19	13	8	9	20	14	16
~~2~~	~~7~~	~~12~~	~~11~~ 9	~~9~~	~~19~~	~~16~~	~~15~~	~~28~~	~~9~~
1	19	11	19	6	21	24	7	25	8
	5	8	~~9~~ 0	3	4	6	4	12	

Korzystając z reguły zachodnio-północnej wybieramy drugi wiersz i element $c_{2,2}$ macierzy C. Przyjmujemy $x_{2,2} = \min(6,8) = 6$. Skreślamy drugi wiersz macierzy C otrzymując nową macierz C_3 i nowy układ M_3.

	~~2~~,6	5	0	7	7		12	2	
	~~8~~	~~6~~	~~8~~	~~3~~	~~4~~	5	~~7~~	~~1~~	
1	13	16	41	23	15	14	19	16	12
~~1~~	~~15~~	(5)^6	~~19~~	~~16~~	~~12~~	~~35~~	~~24~~	~~13~~	~~6~~
1	23	20	19	13	8	9	20	14	16
~~2~~	~~7~~	~~12~~	(11)^9	~~9~~	~~19~~	~~16~~	~~15~~	~~28~~	~~9~~
1	19	11	19	6	21	24	7	25	8
	5	~~8~~	~~9~~	3	4	6	4	12	
		2	0						

Przyjmujemy następnie $x_{5,7} = 5$, skreślając siódmą kolumnę macierzy C.

	6	5	0	7	7	5	~~12~~	2	
1	13	16	41	23	15	14	19	16	12
	~~15~~	(5)^6	~~19~~	~~16~~	~~12~~	~~35~~	~~24~~	~~13~~	~~6~~
1	23	20	19	13	8	9	20	14	16
	~~7~~	~~12~~	(11)^9	~~9~~	~~19~~	~~16~~	~~15~~	~~28~~	~~9~~
1	19	11	19	6	21	24	(7)^4	25	~~8~~ 4
	5	~~8~~	~~9~~	3	4	6	~~4~~	12	
		2	0						

W ten sam sposób wyznaczamy kolejno $x_{5,4} = 3$ i $x_{5,2} = 1$. Otrzymamy układ (C_6, M_6) z macierzą C_6 rzędu 2×6. Po prawej stronie i pod C_6 występują elementy M_6

13	16	41	23	15	14	19	16	12
~~15~~	(5)^6	~~19~~	~~16~~	~~12~~	~~35~~	~~24~~	~~13~~	
23	20	19	23	8	9	20	14	16
~~7~~	~~12~~	(11)^9	~~9~~	~~19~~	~~16~~	~~15~~	~~28~~	
~~19~~	(11)^1	~~19~~	(6)^3	~~21~~	~~24~~	(7)^4	~~25~~	
5	1	0		4	6		12	

$C_6 =$

13	16	41	15	14	16	12
23	20	19	8	9	14	16
5	1	0	4	6	12	

Wypisujemy pierwsze różnice każdej kolumny macierzy C_6 (nad kolumnami).

10	4	22	7	5	2	
13	16	41	15	14	16	12
23	20	19 ^{0}	8	9	-14	16
5	1	0	4	6	12	

Wyznaczamy $x_{3,3} = 0$.

Podobnie znajdujemy kolejno:

~~10~~	~~4~~	~~22~~	~~7~~	~~5~~	~~2~~			
13 ^{5}	16 ^{1}	41	15	14	16 ^{6}	~~12~~	~~7~~	~~6~~
23	20	19 ^{0}	8 ^{4}	9 ^{6}	14 ^{6}	~~16~~	~~12~~	~~6~~
~~5~~	~~1~~	~~0~~	~~4~~	~~6~~	~~12~~			

$$x_{1,1} = 5,\ x_{3,5} = 4,\ x_{3,6} = 6,\ x_{1,2} = 1,\ x_{1,8} = 6,\ x_{3,8} = 6.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób następującą początkową macierz przepływów $X(B_1)$, gdzie B_1 jest zbiorem punktów $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,8)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(3,5)$, $(3,8)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(5,4)$ i $(5,7)$.

$X(B_1) =$

5	1						6
	6						
		0		4	6		6
		9					
	1		3			4	

Puste kratki macierzy $X(B_1)$ oznaczają zera.

Utwórzmy teraz zerową macierz kosztów C_{B_1}. Zbudujemy graf G_{B_1}, którego węzłami są punkty — kółka otaczające elementy węzłowe macierzy C. Liczby nad elementami węzłowymi C oznaczają wartości elementów węzłowych $X(B_1)$.

	(2)	(11)	(7)	(10)	(9)	(8)	(3)
	−3	−8	2	3	2	1	−3
(1) −13	13^{5}	16^{1}	41	23	15	14	19	16^{6}
(4) −2	15	5^{6}	19	16	12	35	14	13
(6) −11	23	20	19^{0}	13	8^{4}	9^{6}	20	14^{6}
(12) −3	7	12	11^{9}	9	19	16	15	28
(5) −8	19	11^{1}	19	6^{3}	21	24	7^{4}	25

Zgodnie z drugim punktem postępowania z rozdziału 8 dzielimy elementy węzłowe macierzy C na klasy zaliczając do klasy A_1 element $c_{1,1}$. Następnie wypisujemy z lewej strony i nad każdą linią macierzy liczby g_{c_p} ze wzorów (6. 2). Liczby w nawiasach oznaczają kolejność w jakiej liczby g_{c_p} zostały wyznaczone.

Otrzymana w ten sposób macierz C_{B_1} wygląda następująco

$C_{B_1}=$

0^{5}	0^{1}	20	12	5	3	7	0^{6}
13	0^{6}	9	16	13	35	13	8
12	6	0^{0}	4	0^{4}	0^{6}	10	0^{6}
4	6	0^{9}	8	19	15	13	22
11	0^{1}	3	0^{3}	16	18	0^{4}	14

Ponieważ wszystkie elementy C_{B_1} są $\geqslant 0$, B_1 jest bazą optymalną i $X(B_1)$ jest szukaną macierzą optymalną.

2. Rozpatrzmy inne zagadnienie transportowe rzędu 5×8 z następującym układem (C, M).

12	14	23	11	13	14	16	14	9
19	23	11	16	19	19	20	19	7
16	15	18	25	16	18	22	23	11
31	26	42	35	26	38	45	29	21
14	6	19	34	22	16	35	31	20
14	5	13	6	5	3	12	10	

Początkową macierzą przepływów okaże się macierz

$X(B_1) =$

			6				3
		7					
						11	
8				5		1	7
6	5	6			3		

Utwórzmy zerową macierz kosztów C_{B_1}

	(6)	(9)	(10)	(5)	(11)	(4)	(2)
	−5	3	−10	0	−7	−19	−3
(1) −11	12	14	23	11[6]	13	14	16	14[3]
(12) −1	19	23	11[7]	16	19	19	20	19
(7) −3	16	15	18	25	16	18	22[11]	23
(3) −26	31[8]	26	42	35	26[5]	38	45[1]	29[7]
(8) −9	14[6]	6[5]	19[6]	34	22	16[3]	35	31

Po dodaniu wyznaczonych stałych do wierszy i kolumn macierzy kosztów C otrzymamy zerową macierz kosztów

$C_{B_1} =$

−4	6	2	0[6]	2	−4	$\boxed{-14}$	0[3]
13	25	0[7]	15	18	11	0	15
8	15	5	22	13	8	0[11]	17
0[8]	3	6	9	0[5]	5	0[1]	0[7]
0[6]	0[5]	0[6]	25	13	0[3]	7	19

Tworzymy graf $G_{B_1+(1,7)}$, gdzie $c_{1,7}^{B_1} = -14$ jest najmniejszym elementem macierzy C_{B_1}. Graf ten zawiera 1 cykl prosty o węzłach (1, 7),

(4, 8), (1, 8), (4, 7), które dzielimy na dwa zbiory Γ_1 i Γ_2 zaliczając pierwsze dwa węzły do Γ_1, następne dwa zaś — do Γ_2. Najmniejszym elementem $x_{ij}^{B_1}$ macierzy $X(B_1)$ w zbiorze Γ_2 jest $x_{4,7}^{B_1} = 1 = \bar{x}$. Wobec tego najlepsza dopuszczalna baza sąsiednia względem B_1 jest $B_2 = B_1 - (4, 7) + (1, 7)$. Elementy $x_{ij}^{B_2}$ macierzy przepływów $X(B_2)$ wyrażają się następująco:

$$x_{ij}^{B_2} = x_{ij}^{B_1} \quad \text{dla każdego} \quad (i, j) \notin \Gamma_1 + \Gamma_2,$$

$$x_{ij}^{B_2} = x_{ij}^{B_1} + 1 \quad \text{dla każdego} \quad (i, j) \in \Gamma_1,$$

$$x_{ij}^{B_2} = x_{ij}^{B_1} - 1 \quad \text{dla każdego} \quad (i, j) \in \Gamma_2.$$

Otrzymamy następującą macierz przepływów $X(B_2)$.

$X(B_2) =$

			6			1	2
		7					
						11	
8				5			8
6	5	6			3		

Utwórzmy teraz macierz zerową C_{B_2}

14

	−4	6	2	0^{6}	~~2~~	~~−4~~	-14^{1}	0^{2}
	13	25	0^{7}	15	18	11	0	15
−14	8	15	5	22	13	8	0^{11}	17
	0^{8}	~~3~~	~~6~~	~~9~~	0^{5}	~~5~~	~~0~~	0^{8}
	0^{6}	0^{5}	0^{6}	~~25~~	~~13~~	0^{3}	7	19

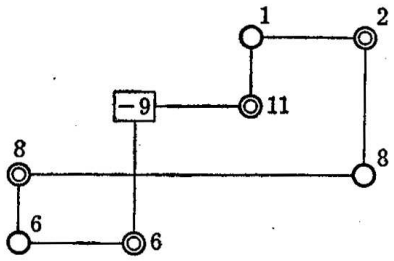
Uwaga 9.1. Tak dobieramy element klasy A_1, żeby węzeł (1, 7) znalazł się w takiej klasie A_t, by liczba następników (patrz definicja 6.6) węzła (1, 7) plus liczba następników tych następników itd. była możliwie mała. $c_{2,3}^{B_1}$ będzie elementem klasy A_1.

Otrzymamy w ten sposób zerową macierz kosztów

$C_{B_2}=$

−4	6	2	0^{6}	2	−4	0^{1}	0^{2}
13	25	0^{7}	15	18	11	14	15
−6	1	$\boxed{-9}$	8	−1	−6	0^{11}	3
0^{8}	3	6	9	0^{5}	5	14	0^{8}
0^{6}	0^{5}	0^{6}	25	13	0^{3}	21	19

Tworzymy graf $G_{B_2+(3,3)}$, gdzie $c_{3,3}^{B_2}$ jest najmniejszym elementem macierzy C_{B_2}. Graf ten zawiera 1 cykl prosty.



Węzły należące do Γ_2' oznaczymy przez ⊙. Wobec tego najmniejszym elementem $x_{ij}^{B_2}$ dla $(i,j)\in\Gamma_2'$ jest $x_{1,8}^{B_2}=2$. B_3 spełnia wtedy równość $B_3=B_2-(1,8)+(3,3)$, macierz przepływów

$X(B_3)=$

			6			3	
		7					
		2				9	
6				5			10
8	5	4			3		

Obliczmy C_{B_3}

				−9			−9	
9	−4	6	2	0^{6}	2	−4	0^{3}	0
	13	25	0^{7}	15	18	11	14	15
9	−6	1	-9^{2}	8	−1	−6	0^{9}	3
	0^{6}	3	6	9	0^{5}	5	14	0^{10}
	0^{8}	0^{5}	0^{4}	25	13	0^{3}	21	19

$C_{B_3}=$

5	15	11	0^{6}	11	5	0^{3}	9
13	25	0^{7}	6	18	11	5	15
3	10	0^{2}	8	8	3	0^{9}	12
0^{6}	3	6	0	0^{5}	5	5	0^{10}
0^{8}	0^{5}	0^{4}	16	13	0^{3}	12	19

Widzimy więc, że B_3 jest bazą optymalną. Można się przekonać, że $B_4 = B_3-(5,3)+(4,4)$ jest bazą równą B_3 a więc również bazą optymalną. Wyznaczyliśmy wobec tego dwie macierze optymalne $X(B_3)$ i $X(B_4)$, gdzie

$X(B_3)=$

			6			3	
		7					
		2				9	
6				5			10
8	5	4			3		

$X(B_4)=$

			2			7	
		7					
		6				5	
2			4	5			10
12	5				3		

Oczywiście każda macierz $X = \lambda_1 X(B_3)+\lambda_2 X(B_4)$, gdzie λ_1, λ_2 są $\geqslant 0$ i $\lambda_1+\lambda_2 = 1$, jest również macierzą optymalną (tw. 2.3).

Uwaga 9.2. W praktyce nie wypisuje się osobno macierzy przepływów. Wystarczy wpisać wartości elementów węzłowych macierzy przepływów nad odpowiednimi elementami macierzy kosztów. Z reguły dokonuje się większej ilości iteracji, posługując się macierzą zerową C_{B_1} bez wypisywania kolejnych macierzy zerowych, gdyż wyznaczenie najlepszych baz sąsiednich jest widoczne. Jedyną więc „kosztowną" iteracją jest wyznaczenie pierwszej zerowej macierzy kosztów.

Uwaga 9.3. Jeśliby wyznaczyć początkową macierz przepływów

metodą „North West" Dantziga należałoby w 1-szym przykładzie dokonać najmniej 6 iteracji, w drugim przykładzie — najmniej 10 iteracji.

Na zakończenie pragnę podziękować profesorowi J. Perkalowi i docentowi J. Łukaszewiczowi za cenne uwagi, dzięki którym niniejsza praca (a szczególnie jej strona redakcyjna) wiele zyskała.

Prace cytowane

[1] J. Abrham, *Über die Stabilität von Lösungen im Transportproblem der linearen Programmierung*, Чехословацкий Математический Журнал 1 (8) 1958, str. 131-138.

[2] J. Bílý, M. Fiedler i F. Nožička, *Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem*, Чехословацкий Математический Журнал 1 (8) 1958, str. 94-121.

[3] A. Charnes i W. W. Cooper, *The stepping stone method of explaining linear programming calculations in transportation problems*, Management Science vol. 1, N. 1. 1954, cytowane za [19].

[4] G. B. Dantzig, *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*, rozdział XXI Koopmansa [16].

[5] — *Application of the simplex method to a transportation problem*, rozdział XXIII Koopmansa [16].

[6] P. S. Dwyer, *The solution of the Hitchcock transportation problem with a method of reduced matrices*, University of Michigan, December 1955, cytowane za [19].

[7] R. O. Ferguson, *Linear programming*, American Machinist, Special Report N. 389, Mc Graw-Hill Publishing Co., 1955, cytowane za [19].

[8] M. M. Flood, *On the Hitchcock distribution problem*, Pacific Journal of Mathematics, 3 (1953), str. 369-386.

[9] L. R. Ford i D. R. Fulkerson, *Solving the transportation problem*, Management Science vol. 3. N. 1, 1956.

[10] S. J. Gass, *Linear programming*, Mc Graw-Hill Book. Co., New York 1958.

[11] A. Gleyzal, *An algorithm for solving the transportation problem*, J. Research Nat. Bureau Standards 54 (1955), str. 213-216. Opublikowane po rosyjsku w czasopiśmie Математика 2 (1958), str. 131-137.

[12] A. Henderson i R. Schlaifer, *Mathematical programming: Better information for better decision making*, Harvard Business Review, May-June 1954, str. 73-100, cytowane za [19].

[13] F. L. Hitchcock, *The distribution of a product from several sources to numerous localities*, Journal of Mathematics and Physics 20 (1941), str. 224-230, cytowane za [9].

[14] L. Kantorowicz, *On the translocation of masses*, Доклады Академии Наук СССР 37 (1942), str. 199-201, cytowane za [2].

[15] T. C. Koopmans, *Optimum utilization of the transportation system*, Precedings of the International Statistical Conferences 1947, Washington D. C. vol. 5, cytowane za [16].

[16] T. C. Koopmans i S. Reiter, *A model of transportation*, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Comission Monograph 13 (1951) ed. by Koopmans, rozdział XIV.

[17] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

[18] H. W. Kuhn, *The Hungarian method for the assignment problem*, Naval Research Logistics Quarterly vol. 2, N. 1 i 2, 1955, cytowane za [9].

[19] R. W. Metzger, *Elementary mathematical programming*, J. Wiley and Sons Inc., New York 1958.

[20] F. Nožička, *O jednom minimálním problému v theorii lineárního plánování*, Mathematisches Institut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften, Praga 1956, cytowane za [2].

[21] J. Perkal i J. Battek, *O pewnym zagadnieniu z programowania liniowego*, Zastosowania Matematyki 5 (1961), str. 359-373.

[22] W. Sadowski, *Zastosowanie teorii programowania liniowego do rejonizacji zaopatrzenia*, Przegląd statystyczny, zeszyt 4, 1956, str. 393-404.

[23] J. Stringer i K. B. Haley, *The application of linear programming to a large-scale transportation problem*, International Conference on Operational Research, The University Laboratory of Psychology, Oxford 1957, str. 106-121.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 2. 3. 1960

В. ШВАРЦ (Вроцлав)

ТРАНСПОРТНАЯ ПРОБЛЕМА

РЕЗЮМЕ

Транспортную проблему можно формулировать следующим образом: Имеется m поставщиков, поставляющих некоторый определенный товар в количестве $a_1, \ldots, a_m$ соответственно, и n потребителей, нуждающихся в этом товаре в количествах $b_1, \ldots, b_n$. Предполагается, что сумма поставок равна сумме спросов. Дана матрица $C = \{c_{ij}\}$ порядка $m \times n$, элементами которой являются числа c_{ij}, представляющие собой стоимость транспорта единицы товара от i-го поставщика j-му потребителю. Требуется найти такие числа $x_{ij} \geqslant 0$ (x_{ij} — количество товара, отправляемого i-ым поставщиком j-му потребителю), чтобы общая стоимость транспорта, необходимая для обеспечения всех поставок, была наименьшей.

Числа x_{ij} образуют прямоугольную матрицу X, которую будем называть *матрицей поставок*. Обозначим через z_X общую стоимость транспорта. Очевидно $z_X = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$, где c_{ij} и x_{ij} — соответственно элементы матриц C и X.

В настоящей статье предлагается метод решения транспортной проблемы, основанный на теории графов.

Под графом G_Ω понимаем совокупность Ω вершин — точек (i, j) плоскости и соединений — отрезков, каждый из которых соединяет две ближайших (различных) точки с одинаковой координатой. Если некоторые соединения графа образуют в совокупности замкнутую ломаную линию, то говорим, что граф содержит цикл.

Рассмотрим матрицу поставок $\{x_{ij}\}$, для которой существует множество B, содержащее $(m+n-1)$ точек (i, j), такое что

1. $x_{ij} = 0$ для $(i, j) \notin B$,

2. граф G_B не содержит цикла.

Такую матрицу поставок обозначим через $X(B)$.

Метод решения транспортной проблемы состоит в определении последовательности матриц поставок $X_k(B_k)$ таких, чтобы для всякого k:

1. $z_{X_{k+1}(B_{k+1})} < z_{X_k(B_k)}$,

2. множества B_k и B_{k+1} отличались точно одной точкой.

Этот метод решения, который иллюстрируется в статье двумя примерами, эффективнее известных раньше методов решений.

В статье обсуждаются, кроме того, методы определения начальной матрицы, приближенный метод решения и два обобщения транспортной проблемы.

W. SZWARC (Wrocław)

THE TRANSPORTATION PROBLEM

SUMMARY

The considered transportation problem may be stated as follows: we have m suppliers who offer a given product in amounts $a_1, \ldots, a_m$, and n consumers who need the amounts $b_1, \ldots, b_n$ of this product. It is assumed that the sum of demands is equal to the sum of supplies. We are also given the matrix $C = \{c_{ij}\}$ of the order $m \times n$ whose elements are the numbers c_{ij} which denote the cost of transportation of the unit of the considered product from the i-th supplier to the j-th consumer. The problem consists of finding the numbers $x_{ij} \geqslant 0$, where x_{ij} denotes the amount of the product transported from the i-th supplier to the j-th consumer, such that the total cost of transportation necessary for supplying all existing demands should be as small as possible.

The numbers x_{ij} form the rectangular matrix X, which will be called the *flow matrix*. We denote by z_X the total cost of transportation, thus, of course, $z_X = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$, where c_{ij} and x_{ij} are the elements of the matrices C and X.

The present paper gives the method of solution based upon the theory of graphs.

The graph G_Ω is the set Ω of nodes, i.e. the points (i, j) on the plane, and the set of arcs, i.e. segments, each of them connecting the two nearest (distinct) nodes of the set Ω with the same coordinate. If some arcs of the graph form a closed chain, we say that the graph contains a cycle.

Let us consider the flow matrix $\{x_{ij}\}$ for which there exists a $(m+n-1)$-element set B of points (i, j), such that

1. $x_{ij} = 0$ for every $(i, j) \notin B$,

2. the graph G_B does not contain any cycles.

We denote such a flow matrix by $X(B)$.

The method of solution of the transportation problem consists of determining the sequence $X_k(B_k)$ of flow matrices such that for every k:

1. $z_{X_{k+1}(B_{k+1})} < z_{X_k(B_k)}$,
2. the sets B_k and B_{k+1} differ exactly by one element.

The method of solution, illustrated by two examples, is more effective than any other known method of solution.

The paper discusses also the methods of determining the initial flow matrix, the approximate methods of solution, and two possible generalizations of the transportation problem.