ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIII (1976)
CONFERENCE ON ANALYTIC FUNCTIONS

Экстремальные плюрисубгармонические функции, ортогональные многочлены и теорема Бернштейна–Уолша для аналитических функций многих комплексных переменных

В. П. Захарюта (Ростов)

Реферат. Изучаются ортогональные многочлены в гильбертовых пространствах, связанных с компактом $K \subset C^n$. Основное внимание уделяется вопросу о разложении в базисный ряд по ортогональным многочленам функций, аналитических в „областях уровня" D_R некоторой экстремальной плюрисубгармонической функции $b(K, z)$, аналогичной обобщенной функции Грина при $n = 1$.

В качестве приложения дается новое доказательство многомерной теоремы Бернштейна–Уолша, основанное на методах гильбертовых пространств. Первоначальное доказательство аналогичной теоремы (Й. Сицяк, 1961 г.) опиралось на исследование интерполяционных многочленов многих переменных с экстремальными узлами.

1. В настоящей работе с помощью результатов о гильбертовых шкалах пространств аналитических функций [6], [7] изучаются ортогональные многочлены в гильбертовых пространствах, связанных с компактом $K \subset C^n$. Основное внимание уделяется вопросу о разложении в базисный ряд по ортогональным многочленам функций, аналитических в естественных „областях уровня" D_R. В качестве приложения получается новое доказательство несколько модифицированной теоремы Й. Сицяка ([14], теорема 3), являющейся многомерным аналогом известной теоремы Бернштейна–Уолша ([1]; [11], стр. 123; [16], §§ 4. 5, 4.6). Результаты частично анонсированны в [8].

Важное место в наших рассмотрениях занимает экстремальная плюрисубгармоническая функция $b(K, z)$ (см. п. 4), которая выполняет в теории приближений аналитических функций многих переменных ту же роль, что (обобщенная) функция Грина для $\overline{C^1} \setminus \hat{K}$ с полюсом в ∞ [16], §§ 4.1, 4.9). Функция $b(K, z)$ просто связана (а в случае непрерывности совпадает) с $\ln \Phi(z, K, 0)$, где $\Phi(z, K, 0)$ — экстремальная функция Й. Сицяка ([14], стр. 333). Однако эту связь удается установить лишь после доказательства основных теорем 1,2 (подробнее см. п. 9).

2. Приведем необходимые обозначения. Для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$ и целочисленного вектора $k = (k_1, \ldots, k_n)$ с неотрицательными координатами будем писать $|z| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}$, $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$. Для $K \subset C^n$ положим $|f|_K \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{|f(z)|: z \in K\}$. Будем обозначать: $B_R(a) = \{z \in C^n: |z-a| < R\}$, $U_R(a) = \{z = (z_j) \in C^n: |z_j - a_j| < R, j = 1, \ldots, n\}$, $a = (a_j) \in C^n$, $R > 0$; $B_R = B_R(0)$, $U_R = U_R(0)$

$\hat{K}$ — *полиномиальная оболочка* компакта $K \subset C^n$, т.е.

$$\hat{K} = \{z \in C^n: |p(z)| \leqslant |p|_K \text{ для любого полинома } p\}.$$

Π_s — совокупность всех полиномов p степени не выше s, т.е. полиномов вида $p(z) = \sum_{|k|=0}^{s} a_k z^k$.

$A(F)$ — пространство всех ростков аналитических функций на множестве $F \subset C^n$ с естественной локально-выпуклой топологией ([5], см. также [17], стр. 80–81); $AC(K)$ — подпространство пространства $C(K)$, получающееся замыканием множества $A(K)$ в $C(K)$, K — компакт в C^n; $P(G)$ — совокупность всех плюрисубгармонических функций в открытом множестве $G \subset C^n$. Будем обозначать $H^\alpha = (H_0)^{1-\alpha}(H_1)^\alpha$ — гильбертову шкалу, натянутую на пару гильбертовых пространств $H_1 \subset H_0$ с непрерывным плотным вложением [3], стр. 140.

3. В [6], [7] для произвольного компакта $K \subset C^n$ и его открытой окрестности $D \subset C^n$ была определена следующая *экстремальная плюрисубгармоническая функция*:

$$\omega(D, K, z) = \overline{\lim_{\zeta \to z}} \sup\{u(\zeta): u \in P(D), u|K \leqslant 0, u|D < 1\}, \qquad z \in D.$$

Компакт $K \subset C^n$, следуя [7], назовем *C^n-регулярным*, если $\omega(G, K, z) \leqslant 0$, $z \in K$ для любой псевдовыпуклой(¹) открытой окрестности $G \supset K$. Для полиномиально выпуклого компакта K (т.е. $K = \hat{K}$) в этом определении достаточно брать какую-либо одну окрестность $G \subset C^n$, например, достаточно большой полидиск U_R.

Открытое множество $D \subset C^n$ назовем *усиленно псевдовыпуклым*, если существует псевдовыпуклое(²) открытое множество G: $D \Subset G \subset C^n$ и непрерывная функция $u \in P(G)$ такие, что $D = \{z \in G: u(z) < 0\}$. Мы будем опираться на следующее

Предложение 1 ([6], [7]; [9], теорема 4.1). *Пусть D — усиленно псевдовыпуклое открытое множество в C^n; K — C^n-регулярный компакт,*

(¹) В [6], [7] в соответствующих определениях ошибочно пропущено требование псевдовыпуклости множества G.

(²) В [8] последнее условие иное, однако нетрудно убедиться, что в обоих случаях получается одна и та же функция b. В предлагаемом здесь определении лучше просматривается аналогия с функцией Грина при $n = 1$.

$K \subset D$. *Тогда из непрерывных вложений для гильбертовых пространств* H_0, H_1:

$$A(\overline{D}) \subset H_1 \subset A(K) \subset H_0$$

вытекают непрерывные вложения:

$$A(F_a) \subset H^a = (H_0)^{1-a}(H_1)^a, \quad 0 < a < 1,$$

где $F_a = \{z \in D\colon \omega(D, K, z) \leqslant a\}$.

Здесь, как и в п. 8, для краткости мы пишем обычные включения вместо естественных отображений, когда последние являются мономорфизмами.

4. Для компакта $K \subset C^n$ определим функцию (см. [8]):

$$b(z) = b(K, z) = \overline{\lim_{\zeta \to z}} \sup\{v(\zeta)\colon v \in L(K)\}, \quad z \in C^n, \tag{1}$$

где $L(K)$-класс всех функций, удовлетворяющих условиям $v \in P(C^n)$, $v|K \leqslant 0$; $v(z) - \ln(1+|z|)$-равномерно ограничена сверху на C^n.

В случае $n = 1$ $b(K, z)$ совпадает (с точностью до регуляризации $\overline{\lim\limits_{\zeta \to z}}$) с обобщенной функцией Грина $g(z, \infty)$ для $\overline{C^1 \setminus \hat{K}}$. Непосредственно проверяются следующие свойства функции b: а) b — полунепрерывная сверху в C^n функция, возможно принимающая значения $+\infty$; б) если $b(z) < \infty$, $z \in C^n$, то $b \in P(C^n)$; в) если $K \subset K_1$, то $b(K_1, z) \leqslant b(K, z)$, $z \in C^n$; г) $b(K, z) = b(\hat{K}, z), z \in C^n$; д) $b(\overline{U_R(a)}, z) = \varphi(z-a) - \ln R, z \in C^n \setminus \overline{U_R(a)}$, где $\varphi(z) = \sup\{\ln|z_j|\colon j = 1, \ldots, n\}, z \in C^n$, е) $b(\overline{B_R(a)}, z) = \ln|z-a| - \ln R, z \in C^n \setminus \overline{B_R(a)}$.

Лемма 1. *Если* $b \not\equiv \infty$ *в* C^n, *то* $b(z) < \infty$, $z \in C^n$ *и* $b(z) - \ln(1+|z|)$ *равномерно ограничена сверху на* C^n.

Доказательство. Пусть существует точка $a \in C^n$, в которой $b(a) < \infty$. Тогда множество $D_R = \{z \in C^n\colon b(K, z) < \ln R\}, \ln R > b(a)$, является открытым и непустым. Поэтому существует полидиск $U_\delta(a) \Subset D_R$. Пусть $v \in L(K)$, тогда $v - \ln R \in L(\overline{U_\delta(a)})$, следовательно, согласно свойству д), $b(z) - \ln R \leqslant b(\overline{U_\delta(a)}, z) = \varphi(z-a) - \ln \delta \leqslant \ln|z-a| - \ln\delta$, $z \in C^n \setminus U_\delta(a)$. Поэтому $b(z) - \ln(1+|z|) \leqslant \ln\dfrac{|z-a|}{1+|z|} + \ln\dfrac{R}{\delta} \leqslant C < \infty$, $z \in C^n \setminus \overline{U_\delta(a)}$. Если же $z \in \overline{U_\delta(a)}$, то $b(z) - \ln(1+|z|) \leqslant \ln R < \infty$. Лемма доказана.

Для произвольного компакта $K \subset C^n$ определим константы:

$$\gamma = \overline{\lim_{z \to \infty}} \{b(K, z) - \ln|z|\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Cap}_{C_n} K = \exp(-\gamma). \tag{3}$$

В случае $n = 1$ (см., например, [4], стр. 301) в (2) существует обычный предел и γ совпадает с постоянной Робена, а $\mathrm{Cap}_{C^n}K$ совпадает с (логарифмической) ёмкостью компакта K. Будем и при $n \geqslant 2$ называть константу (3) C^n-ёмкостью компакта K. Согласно лемме 1: $\mathrm{Cap}_{C^n}K = 0 \Leftrightarrow b(K, z) \equiv \infty, z \in C^n$.

Лемма 2. *Пусть K компакт в C^n. Следующие условия эквивалентны*: а) $\mathrm{Cap}_{C^n}K > 0$ *и K является C^n-регулярным*; б) $b(K, z) \leqslant 0$, $z \in K$. *При этих условиях имеют место равенства*:

(4) $$b(z) = \ln R\omega(D_R, K, z), \quad z \in D_R, R > 1,$$

где $D_R = \{z \in C^n: b(K, z) < \ln R\}$.

Доказательство. Пусть выполняется $b(z) = b(K, z) \not\equiv \infty$. Тогда по лемме 1 $b(z) < \infty$, $z \in C^n$, следовательно, b является плюрисубгармонической, а, значит, локально ограниченной в C^n. Обозначим $\lambda = \sup\{b(z): z \in K\}$. Тогда $K \subset D_R$, $\ln R > \lambda$. Пусть $v \in L(K)$, тогда $v|K \leqslant 0$, $v|D_R \leqslant b|D_R < \ln R$. Поэтому в соответствии с определением функции ω выполняется неравенство: $v(z) \leqslant \ln R\omega(D_R, K, z), z \in D_R$, для любой функции $v \in L(K)$, т.е.

(5) $$b(\hat{K}, z) \leqslant \ln R\omega(D_R, K, z), \quad z \in D_R, \ln R > \lambda.$$

Поскольку $b(\hat{K}, z) \equiv b(K, z)$, то неравенство (3) выполняется и после замены K на $\hat{K}$. Если теперь $\hat{K}$ — C^n-регулярный компакт, то из неравенства (5) с $\hat{K}$ вместо K следует $b(z) \leqslant 0$, $z \in \hat{K}$. Таким образом из а) следует б) при этом в (5) можно положить $\lambda = 0$.

Предположим теперь, что $b(z) = b(K, z) \leqslant 0, z \in K$. Тогда $b(z) \not\equiv \infty$ и по предыдущему выполняется (5) с $\lambda = 0$. Докажем неравенства:

(6) $$\ln R\omega(D_R, K, z) \leqslant b(z), \quad z \in D_R, \ R > 1.$$

Пусть $v \in P(D_R)$ — произвольная функция, удовлетворяющая неравенствам: $v|K \leqslant 0$, $v|D_R < \ln R$. Рассмотрим функцию

$$u(z) = \begin{cases} \sup\{v(z), b(z)\}, & z \in D_R, \\ b(z), & z \in C^n \setminus D_R. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $u \in P(C^n)$; кроме того $u|K \leqslant 0$ и, благодаря лемме 1, $u(z) - \ln(1 + |z|)$ ограничена сверху равномерно на C^n. Таким образом, $u \in L(K)$, поэтому $u(z) \leqslant b(z)$ и, тем более, $v(z) \leqslant b(z), z \in D_R$. Согласно определению функции ω это означает, что выполняется (6). Поскольку $b(\hat{K}, z) = b(K, z)$, $z \in C^n$, то выполняется и неравенство $\ln R\omega(D_R, \hat{K}, z) \leqslant b(K, z), z \in D_R$. Следовательно, $\omega(D_R, \hat{K}, z) \leqslant 0, z \in \hat{K}$, что означает C^n-регулярность компакта $\hat{K}$. Таким образом, из б) вытекает а). Попутно были получены соотношения (4). Лемма доказана.

Замечание. Можно показать, что утверждение леммы останется в силе, если опустить требование $\mathrm{Cap}_{C^n}K > 0$ условии а).

Следствие I. *Множество D_R, $R > 1$, не содержит связных компонент, дизъюнктных с K.*

Действительно, если G связная компонента и $G \cap K = \varnothing$, то $\omega(D_R, K, z) = 1$, $z \in G$, поэтому, согласно лемме, $b(K, z) = \ln R$, $z \in G$, что противоречит определению D_R.

Лемма 3. *Пусть K — компакт в C^n и $b(z) = b(K, z) \leqslant 0$, $z \in K$. Тогда функция b непрерывна в C^n.*

Доказательство. Возьмем какую-либо последовательность положительных чисел $\{R_j\}$, $R_j \nearrow \infty$. Согласно аппроксимационной теореме (см., например, [13], стр. 127), существует убывающая последовательность непрерывных функций $u_j \in P(D_{R_j})$ сходящаяся в C^n к $b(z)$. По условию $b|K \leqslant 0$, а по лемме 1 $b(z) \leqslant \ln(1+|z|)+C$, $z \in C^n$, $C < \infty$. Поэтому, применяя лемму Гартогса (см., например, [13], стр. 53) по любым $\varepsilon > 0$, $R > 1$ найдем j_0 такое, что $u_j|K < \varepsilon$; $u_j(z) < \ln R + C + \varepsilon$, $z \in B_R$, $j \geqslant j_0$.

Возьмем $\varrho > \sup\{|z|\colon z \in K\}$ и определим функцию

$$\psi(z) = \frac{(\ln|z| - \ln\varrho)(\ln R + C + \varepsilon)}{\ln R - \ln\varrho}, \qquad z \in C^n, \ R > \varrho.$$

Рассмотрим последовательность функций:

$$v_j(z) = \begin{cases} \sup\{\psi(z), u_j(z)\}, & z \in B_R, \\ \psi(z), & z \in C^n \setminus B_R. \end{cases}$$

Каждая из функций v_j плюрисубгармонична в C^n, причем

$$\frac{(v_j - \varepsilon)(\ln R - \ln\varrho)}{\ln R + C + \varepsilon} \in L(K).$$

Поэтому

$$u_j(z) \leqslant v_j(z) \leqslant \frac{\ln R + C + \varepsilon}{\ln R - \ln\varrho} b(K, z) + \varepsilon, \qquad z \in B_R,$$

откуда, учитывая $b(z) \leqslant u_j(z)$, приходим к неравенству

$$|u_j(z) - b(z)| \leqslant \frac{\ln\varrho + C + \varepsilon}{\ln R - \ln\varrho} b(K, z) + \varepsilon, \qquad z \in B_R.$$

Подбирая по произвольному $r > 1$ достаточно большое $R = R(r)$, отсюда получаем, что

$$|u_j(z) - b(z)| \leqslant 2\varepsilon, \qquad z \in B_r, \ j \geqslant j_0\ (\varepsilon, R), \ R = R(r), \ r > 1.$$

Таким образом, последовательность непрерывных функций u_j сходится к $b(z)$ равномерно на любом компакте в C^n, что по теореме Вейерштрасса означает непрерывность $b(z)$ в C^n. Лемма доказана.

Следствие 2. *При условиях леммы* 3 *в определении* (I) *функции* b *можно опустить* $\overline{\lim\limits_{\zeta\to z}}$.

5. Следующая лемма является аналогом одномерной леммы Бернштейна–Уолша ([16], стр. 101) и отличается от соответствующей леммы Й. Сицяка ([14], стр. 334) другим определением экстремальной функции. Отметим также, что наше доказательство более близко к классическому ([16], стр. 101–102).

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{Cap}_{C^n} K > 0$ *и* $p \in \Pi_s$ *удовлетворяет неравенству* $|p|_K \leqslant M$. *Тогда*

$$|p(z)| \leqslant M \exp s b(K, z), \qquad z \in C^n. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $p(z) = \sum\limits_{|k|\leqslant s} a_k z^k$ и $|p|_K \leqslant M$. Рассмотрим плюрисубгармоническую в C^n функцию: $v(z) = \dfrac{1}{s}[\ln|p(z)| - \ln M]$ и оценим сверху для $|z| = \varrho > 1$:

$$v(z) - \ln|z| \leqslant \frac{1}{s}\Big\{\ln \sum_{|k|\leqslant s} |a_k| \varrho^{|k|} - \ln M\Big\} - \ln\varrho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{s}\{\ln C(p, s)\varrho^s - \ln M\} - \ln\varrho = \frac{\ln C(p, s) - \ln M}{s} < \infty.$$

Вместе с очевидным неравенством $v|K \leqslant 0$ это соотношение означает, что $v \in L(K)$. Поэтому по определению функции b получаем $v(z) \leqslant b(z)$, $z \in C^n$, что равносильно неравенству (7). Лемма доказана.

Для сравнения с нашими результатами удобно следующее определение экстремальной функции $\Phi(z, K, 0)$ (Й. Сицяк, [14], стр. 333):

$$\ln|\Phi(z, K, 0)| = \limsup_{s\to\infty}\left\{\frac{\ln|p(z)|}{s} : p \in \Pi_s,\ |p|_K \leqslant 1\right\}, \qquad z \in C^n. \tag{8}$$

Отметим, что исходное определение этой функции в [14] основано на рассмотрении интерполяционных полиномов в C^n с экстремальными узлами на K, аналогичными узлам Фекете (см., например, [16], стр. 212–214). Непосредственно из леммы 4 и (8) вытекает

Следствие 3. *Справедливо соотношение*:

$$\ln\Phi(z, K, 0) \leqslant b(K, z), \qquad z \in C^n.$$

6. Нам понадобится следующая простая

Лемма 5. *Пусть* $H_1 \subset H_0$ — *гильбертовы пространства и оператор вложения является оператором Гильберта–Шмидта. Пусть* $\{e_j^{(i)}\}$-

-ортонормированные базисы в H_i, $i = 0, 1$, треугольные друг относительно друга, т.е.

$$e_k^{(1)} = \sum_{j \leqslant k} t_{k,j} e_j^{(0)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Для любой последовательности положительных чисел $a = \{a_k\}$, $a_k \uparrow \infty$, определим пространства $H_i(a)$ с помощью гильбертовых норм:

$$\|x\|_{H_i(a)} = \Big(\sum |(e_k^{(i)}, x)|^2 a_k^2\Big)^{1/2}.$$

Тогда $H_1(a) \subset H_0(a)$ и оператор вложения также является оператором Гильберта–Шмидта.

Доказательство. По условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j \leqslant k} t_{k,j}^2 < \infty$. Утверждение леммы сразу вытекает из тривиальной оценки:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \leqslant k} |t_{k,j}|^2 \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \leqslant k} |t_{k,j}|^2 < \infty.$$

7. С каждым полидиском U_r, $r > 0$, будем связывать гильбертово пространство H_r всех функций $x(z) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} \xi_k z^k$, имеющих конечную норму:

$$\|x\|_{H_r} = \Big(\sum |\xi_k|^2 r^{2|k|}\Big)^{1/2}.$$

8. Пусть K — полиномиально выпуклый компакт в C^n такой, что

$$b(z) = b(K, z) \leqslant 0, \qquad z \in K;$$

$$D_R = \{z \in C^n \colon b(z) < \ln R\}, \qquad K_R = \{z \in C^n \colon b(z) \leqslant \ln R\}, \qquad R > 1.$$

Рассмотрим какое-либо гильбертово пространство H, удовлетворяющее непрерывным вложениям:

$$A(K) \subset H \subset AC(K). \tag{9}$$

Такие H существуют. Достаточно взять гильбертово пространство H, являющееся пополнением $A(K)$ по непрерывной в $A(K)$ гильбертовой норме $\|x\|$, мажорирующей норму $|x|_K$. Такая норма существует, поскольку, ввиду ядерности пространства $A(K)$, топологию в нем можно задать набором гильбертовых норм ([12], предложение 3 а; стр. 96).

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$-*ортонормированная система многочленов*, полученная с помощью процесса ортогонализации в H из системы мономов $\{z^k \colon |k| = 0, 1, \ldots\}$, упорядоченной каким-либо образом, лишь бы все мономы одной степени шли подряд; $s(j)$-степень многочлена e_j. Обозначим H_R — пространство всех функций $x = \sum \xi_j e_j \in H$ с конечной гильбертовой нормой:

$$\|x\|_{H_R} = \left(\sum |\xi_j|^2 R^{2s(j)}\right)^{1/2}.$$

Теорема 1. *В условиях настоящего пункта выполняются непрерывные вложения:*

$$A(K_R) \subset H_R \subset A(D_R), \quad R > 1. \tag{10}$$

При этом система ортогональных многочленов $\{e_j\}$ образует базис в $A(K)$ и в каждом из пространств $A(K_R)$, $A(D_R)$, $R > 1$, удовлетворяющий оценкам

$$C_1(R, \varepsilon)(R-\varepsilon)^{s(j)} \leqslant |e_j|_{K_R} \leqslant C_2(R, \varepsilon)(R+\varepsilon)^{s(j)}, \quad j = 1, \ldots \tag{11}$$

Левое вложение. Возьмем $\tau > \sup\{|z_j|: z = (z_j) \in K, j = 1, \ldots, n\}$. Из (9) и ядерности пространства $A(K)$ следует, что H_τ ядерно вложено в H (тем более это вложение является оператором Гильберта–Шмидта). Кроме того ортонормированный базис $\{e_j\}$ в H является треугольным относительно ортонормированного базиса $\left\{\frac{z^k}{\tau^{|k|}}, |k| = 0, 1, \ldots\right\}$, соответствующим образом упорядоченного. Поэтому, применяя лемму 5 с $a_j = R^{s(j)}$, получим непрерывные вложения:

$$\tilde{H}_{\tau R} \subset H_R, \quad R > 1. \tag{12}$$

Выберем $\varrho > \varrho_0 \overset{\text{def}}{=} \sup\{b(z): z \in \bar{U}_\tau\}$. Тогда, ввиду леммы 1, $b - \ln p_0 \in L(\bar{U}_\tau)$. Поэтому $b(z) = b(K, z) < b(\bar{U}_\tau, z) + \ln\varrho$, $z \in C^n$, откуда следует $U_{\tau R} \Subset D_{\varrho R}$, $R > 1$, что вместе с (12) дает непрерывные вложения:

$$A(D_{\varrho R}) \subset H_R, \quad R > 1. \tag{13}$$

Учитывая, что $(H)^{1-a}(H_R)^a = H_{R^a}$ и, согласно лемме 2, $b(z) = \ln \sigma\omega(D_\sigma, K, z)$, после применения предложения 1 из (9), (13) получим непрерывные вложения

$$A(K_{\varrho^a R^a}) \subset H_{R^a}, \quad R > 1, \; 0 < a < 1.$$

Последнее соотношение можно переписать так:

$$A(K_{\varrho^a r}) \subset H_r, \quad r > 1, \; 0 < a < 1. \tag{14}$$

Поскольку $\bigcap_{a>0} K_{\varrho^a r} = K_r$, то $A(K_r) = \operatorname{limind}_{a\downarrow 0} A(K_{\varrho^a r})$, откуда, если учесть (14), следуют непрерывные вложения: $A(K_r) \subset H_r$, $r > 1$.

Правое вложение получается существенно проще. Из правого вложения (9) следует существование константы $C < \infty$ такой, что $|e_j|_K \leqslant C$, $j = 1, \ldots$ Согласно лемме 4 $|e_j|_{K_R} \leqslant CR^{s(j)}$, $j = 1, \ldots$ Поэtому для $x = \sum \xi_j e_j \in H_R$ получаем:

$$|x|_{K_{R-\varepsilon}} \leqslant \sum |\xi_j|\,|e_j|_{K_{R-\varepsilon}} \leqslant C \sum |\xi_j| (R-\varepsilon)^{s(j)} \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 R^{2s(j)}\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{R-\varepsilon}{R}\Big)^{2s(j)}\Big)^{1/2} \leqslant C' \|x\|_{H_R}.$$

Ввиду $D_R = \bigcup_{\varepsilon>0} K_{R-\varepsilon}$, выполняется $A(D_R) = \lim_{\varepsilon>0} pr A(K_{R-\varepsilon})$ поэтому полученные неравенства дают непрерывные правые вложения (10).

Наконец система $\{e_j\}$ является базисом в $A(K)$, $A(K_R)$, $A(D_R)$, $R > 1$, поскольку из вложений (10) следуют соотношения:

$$A(K) = \liminf_{R\downarrow 1} \mathrm{ind}\, H_R, \quad A(K_R) = \lim_{\varrho\downarrow R} \mathrm{ind}\, H_\varrho, \quad A(D_R) = \lim_{\varrho\uparrow R} pr H_\varrho.$$

Неравенства (11) вытекают из непрерывных вложений (10) и равенства $\|e_j\|_{H_R} = R^{s(j)}$, $j = 1, \ldots$ Теорема доказана.

Замечание. Результат теоремы 1 при $n = 1$ отличается от традиционных рассмотрений (см., например, [16], стр. 162–166; [15], стр. 275–278, 315) необычным определением гильбертовых пространств, что вызвано довольно слабыми требованиями к компакту K. При близких к нашим ограничениях на компакт K случай $n = 1$ рассмотрел (в несколько ином плане) Видом [2].

9. В качестве приложения выведем многомерную теорему Бернштейна–Уолша.

Теорема 2. (Ср. Й. Сицяк, [14], теорема 3.) *Пусть K-компакт в C^n, для которого $b(K, z) \leqslant 0$, $z \in K$; $D_R = \{z \in C^n : b(K, z) < \ln R\}$, $R > 1$. Для того, чтобы функция $f \in C(K)$ была аналитически продолжима в D_R, необходимо и достаточно, чтобы при $s \to \infty$*

$$(15) \qquad E_s(f, K) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{|f-p|_K : p \in \Pi_s\} = O\big((R-\varepsilon)^{-s}\big), \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Это утверждение отличается от теоремы Й. Сицяка иным определением областей „уровня”. Эквивалентность обеих формулировок мы сможем установить лишь доказав теорему в нашем варианте (см. ниже следствие 4).

Необходимость. Пусть $f \in A(D_R)$. Возьмем какое-либо гильбертово пространство H, удовлетворяющее непрерывным вложениям: $A(\hat{K}) \subset H \subset AC(\hat{K})$ (см. п. 8). Пусть $\{e_j\}$-ортонормированная система полиномов в H и H_R, $R > 1$,-гильбертовы пространства, построенные в п. 8. Тогда, согласно теореме 1, $f = \sum \xi_j e_j \in H_{R-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, и значит:

$$E_s(f, K) \leqslant \Big| \sum_{s(j)\geqslant s} \xi_j e_j \Big|_K \leqslant M \Big\| \sum_{s(j)\geqslant s} \xi_j e_j \Big\|_H \leqslant$$
$$\leqslant M\Big(\sum_{s(j)\geqslant s} |\xi_j|^2\Big)^{1/2} \leqslant M(R-\varepsilon)^{-s}\Big(\sum_{s(j)\geqslant s} |\xi_j|^2 (R-\varepsilon)^{2s(j)}\Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant M \|f\|_{H_{R-\varepsilon}} (R-\varepsilon)^{-s},$$

т.е. имеет место (15).

Достаточность[3]. Из (15) следует существование $p_s \in \Pi_s$ таких, что $|f-p_s|_K \leqslant M(f, \varepsilon)(R-\varepsilon)^{-s}$, $\varepsilon > 0$, $s = 0, 1, \ldots$ Поэтому $|p_{s+1}-p_s|_K \leqslant \leqslant 2M(f, \varepsilon)(R-\varepsilon)^{-s}$. Поскольку $p_{s+1}-p_s \in \Pi_{s+1}$, то согласно лемме 4 выполняется оценка

$$|p_{s+1}-p_s|_{K_{R-2\varepsilon}} \leqslant 2M(f, \varepsilon)\left(\frac{R-2\varepsilon}{R-\varepsilon}\right)^{s+1}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Отсюда следует, что ряд $p_0(z) + \sum_{s=0}^{\infty} [p_{s+1}(z) - p_s(z)]$ сходится равномерно на каждом компакте $F \subset D_R$ к некоторой функции $g \in A(D_R)$ такой, что $g|K = f$.

Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть $E_R = \{z \in C^n\colon \Phi(z, K, 0) < R\}$-области „уровня", рассмотренные в* [14]. *Тогда в условиях теоремы* 2 $E_R = D_R$, $R > 1$, *и* $b(K, z) \equiv \ln \Phi(z, K, 0)$, $z \in C^n$.

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что $D_R \subset E_R$, $R > 1$. Докажем $E_R \subset D_R$. Пусть $f \in A(D_R)$, тогда по теореме 2 выполняется условие (15), из которого по теореме 3 [14] следует существование $g \in A(E_R)$ такой, что $g|K = f|K$. Таким образом, всякая функция $f \in A(D_R)$ аналитически продолжается в E_R. Отсюда следует, что не может быть $E_R \neq D_R$, поскольку, во-первых D_R является открытым псевдовыпуклым множеством, и, значит, по теореме Ока множеством голоморфности, и, во-вторых, как нетрудно убедиться, E_R не содержит связных компонент, дизъюнктных с K и, тем более, с D_R.

10. Для произвольного компакта $K \subset C^n$ рассмотрим последовательность C^n-регулярных компактов $\{K_j\}$ такую, что $K_{j+1} \subset \operatorname{int} K_j$, $\hat{K} = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ и определим функцию

$$\bar{b}(K, z) = \lim_{j\to\infty} b(K_j, z), \qquad z \in C^n. \tag{16}$$

---

[3] Доказательство достаточности повторяет рассуждения при $n = 1$ (см., например, [16], стр. 102); многомерная специфика заключена в используемой лемме 4 (ср. [14], замечание на стр. 344).

Предел (конечный или бесконечный) в (16) существует, поскольку $b(K_j, z)$ неубывающая последовательность, и не зависит от выбора последовательности K_j. Из лемм 2, 3 вытекает, что функции $b(K_j, z)$ являются непрерывными в C^n (условие $\mathrm{Cap}_{C^n} K > 0$ выполняется, поскольку каждый из компактов K_j имеет непустую внутренность). Поэтому $\tilde{b}(K, z)$ полунепрервна снизу в C^n.

Следующее утвержение распространяет теорему 2 на более общий случай (при $n = 1$ аналогичное распространение рассмотрено в [16], стр. 111–115).

Теорема 3. *Пусть K-компакт в C^n*, $\mathrm{Cap}_{C^n} K > 0$,

$$D_R = \{z \in C^n \colon b(K, z) < \ln R\}, \qquad \tilde{D}_R = \{z \in C^n \colon \tilde{b}(K, z) < \ln R\}.$$

Условие (15) *является достаточным для того чтобы функция $f \in C(K)$ аналитически продолжалась в D_R и необходимо для того, чтобы $f \in C(K)$ аналитически продолжалась в $\tilde{D}_R$.*

Достаточность доказывается почти так же как в теореме 2. Необходимость. Обозначим

$$\tilde{K}_R = \{z \in C^n \colon \tilde{b}(K, z) \leqslant \ln R\}, \qquad K_{j,R} = \{z \in C^n \colon b(K_j, z) \leqslant \ln R\}.$$

Тогда

$$\tilde{D}_R = \bigcup_{\varepsilon > 0} \tilde{K}_{R-\varepsilon}, \qquad \tilde{K}_R = \bigcap_j K_{j,R}, \qquad K_{j+1,R} \subset \mathrm{int} K_{j,R}. \tag{17}$$

Предположим, что $f \in A(\tilde{D}_R)$. Тогда, ввиду (17), $f \in A(\tilde{K}_{R-\varepsilon})$, $\forall \varepsilon > 0$. Найдем j такое, что $f \in A(K_{j,R-\varepsilon})$. Применяя теорему 2 к функции f и компакту K_j, получим $E_s(f, K_j) = O\big((R-2\varepsilon)^{-s}\big)$ при $s \to \infty$. Тем более $E_s(f, K) = O\big((R-2\varepsilon)^{-s}\big)$ при $s \to \infty$.

Теорема доказана.

11. В заключение приведем несколько вопросов, оставшихся нерешенными:

1. Справедливо ли включение $\tilde{K}_R \subset \overline{D_R}$ (хотя бы в предположении непрерывности $b(K, z)$ в C^n)?

2. Выполняется ли равенство $\tilde{D}_R = D_R \cup \hat{K}$, $R > 1$ (обозначения см. в теореме 3)?

Отметим, что при $n = 1$ на эти вопросы имеется положительный ответ (по поводу последнего вопроса см., например, [16], стр. 113).

3. В настоящей статье доказано существование *базиса из ортогональных многочленов в* $A(K)$, если $K = \hat{K}$, $\hat{K} - C^n$-регулярный компакт и имеет положительную C^n-ёмкость (от последнего условия можно избавиться, см. замечание к лемме 2). Возможно ли в пространстве $A(K)$ при $n \geqslant 2$ построить *базис из интерполяционных многочленов*, аналогичный базису Лейя [10] в одномерном случае?

Литература

[1] S. N. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degrée donne*, Mémoires de l'Académie Royale de Belgique 2, 4 (1912), стр. 1–104, см. также *Собрание сочинений*, т. I, *Конструктивная теория функций*, АН СССР, 1954.

[2] H. Widom, *Polynomials associated with measure in the complex plane*, J. Math. Mech. 16 (1967), стр. 997–1013.

[3] Н. Я. Виленкин и др., *Функциональный анализ*, серия СМБ, Наука, М. 1964.

[4] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М. 1966.

[5] A. Grothendick, *Sur certain espaces de fonctions holomorphes*, J. Reine Angew. Math. 192 (1953), стр. 35–64, 77–95.

[6] В. П. Захарюта, *Изоморфизм пространств голоморфных функций многих комплексных переменных*, Функциональный анализ и его приложения 5, вып. 4 (1971), стр. 71–72.

[7] — *Пространства аналитических и гармонических функций многих переменных*, Тезисы доклада на Всесоюзной Конференции по Теории Функций, Харьков 1971, стр. 74–78,

[8] — *Теоремы Бернштейна о наилучших полиномиальных приближениях для голоморфных и гармонических функций многих переменных*, Тезисы доклада на Всесоюзной Конференции по Теории Функций, Харьков 1971, стр. 80–81.

[9] — *Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизм пространств аналитических функций многих переменных*, I, II, в сб. *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, Харвков, вып. 19, 21, 1974.

[10] F. Leja, *Sur certaines suites liées aux ensembles plans el leur application à la représentation conforme*, Ann. Soc. Polon. Math. 4 (1957).

[11] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, т. 2, Наука, М. 1962.

[12] Б. С. Митягин, *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах*, УМН, 16, вып. 4 (100) (1961), стр. 63–132.

[13] Л. И. Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, М., 1971.

[14] J. Siciak, *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), стр. 322–357.

[15] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М.–Л. 1964.

[16] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной плоскости*, ИИЛ, М. 1961.

[17] В. П. Хавин, *Пространства аналитических функций*, сер. „Итоги науки", вып. Математический анализ. 1964, М. 1966, стр. 76–164.