COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LII 1987 FASC. 1

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES MULTIPLICATIVES ET MULTIPLICATEURS DE FOURIER. II

PAR

H. DABOUSSI ET J. PEYRIÈRE (ORSAY)

1. Fonctions multiplicatives. Une fonction f à valeurs complexes, définie sur $(N^*)^d$, est dite *multiplicative* si l'on a $f(mn) = f(m)f(n)$ chaque fois que $m_1 m_2 \ldots m_d$ et $n_1 n_2 \ldots n_d$ sont premiers entre eux ($m = (m_1, m_2, \ldots, m_d)$, $n = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$, $mn = (m_1 n_1, m_2 n_2, \ldots, m_d n_d)$, N^* désigne l'ensemble des entiers strictement positifs).

On note P l'ensemble des nombres premiers. Si p est un nombre premier et si $j = (j_1, \ldots, j_d)$ est un élément de $(N^*)^d$ on note p^j l'élément $(p^{j_1}, p^{j_2}, \ldots, p^{j_d})$ de $(N^*)^d$.

A chaque fonction multiplicative f on associe une suite $\{F_p\}_{p \in P}$ de fonctions: Z_p désignant l'anneau des entiers p-adiques et $|\ |_p$ étant la valeur absolue sur Z_p telle que $|p|_p$ soit égal à $1/p$, la fonction F_p est définie sur $(Z_p \setminus \{0\})^d$ par la formule

$$F_p(x_1, x_2, \ldots, x_d) = f(|x_1|_p^{-1}, |x_2|_p^{-1}, \ldots, |x_d|_p^{-1}).$$

On note G le groupe compact $\prod_{p \in P} Z_p^d$ et Γ son dual. On désigne par h l'homomorphisme de Z^d dans G, produit des injections naturelles de Z^d dans chacun des groupes Z_p^d; l'image de h est dense. Si p est dans P et $j = (j_1, j_2, \ldots, j_d)$ dans N^d on note $Z_{p,j}$ le sous-groupe $p^{j_1} Z_p \times p^{j_2} Z_p \times \ldots \times p^{j_d} Z_p$ de Z_p^d.

On dira qu'une suite de points de N^d *tend vers l'infini* si chacune de ses composantes tend vers $+\infty$. Si $j = (j_1, \ldots, j_d)$ est dans N^d on note $|j|$ le nombre $j_1 + j_2 + \ldots + j_d$. Enfin N^d est muni d'un ordre: m est avant n signifie que chaque composante de m est inférieure à la composante correspondante de n.

A chaque fonction multiplicative f, en module majorée par 1, et qui a une valeur moyenne non nulle (i.e. $\frac{1}{x_1 \ldots x_d} \sum_{|n_i| \leqslant x_i} f(n_1, \ldots, n_d)$ a une limite non nulle) un résultat de Delange [2] et le lemme suivant permettent d'associer une fonction bornée non presque partout nulle sur G.

LEMME 1. *Soit f une fonction multiplicative, en module majorée par 1 et telle que, pour tout j de N^d tel que $|j| = 1$, la série* $\sum_{p\in P} (1-f(p^j))/p$ *converge. Dans ces conditions la fonction* $F = \bigotimes_{p\in P} F_p$ *est définie en presque tout point de G (relativement à sa mesure de Haar) et l'on a* $\|F\|_{L^1(G)} > 0$.

Démonstration. Si z est un nombre complexe, on désigne par $\operatorname{Arg} z$ la détermination de son argument qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Les hypothèses entraînent la convergence des trois séries

$$\sum_{p\in P} \sum_{|j|=1} (1-|f(p^j)|)/p, \quad \sum_{p\in P} \sum_{|j|=1} (\operatorname{Arg} f(p^j))/p \quad \text{et} \quad \sum_{p\in P} \sum_{|j|=1} |\operatorname{Arg} f(p^j)|^2/p.$$

Soit ω_p la projection canonique de G sur Z_p^d. Les fonctions $F_p \circ \omega_p$ sont définies presque partout relativement à la mesure de Haar de G. Presque partout le produit $\prod_{p\in P} |F_p \circ \omega_p|$ ou bien converge, ou bien diverge vers 0. Etudions la convergence des arguments des produits partiels du produit $\prod_{p\in P} F_p \circ \omega_p$ (pour définir ces produits partiels les nombres premiers sont supposés rangés en ordre croissant). Les fonctions $\operatorname{Arg} F_p \circ \omega_p$ sont des variables aléatoires indépendantes définies sur G muni de sa mesure de Haar. On a

$$\int_G \operatorname{Arg}(F_p \circ \omega_p(x))\,dx = (1-1/p)^d \sum_{|j|=1} \operatorname{Arg} f(p^j)/p + O(1/p^2),$$

$$\int_G |\operatorname{Arg}(F_p \circ \omega_p(x))|^2\,dx = (1-1/p)^d \sum_{|j|=1} |\operatorname{Arg} f(p^j)|^2/p + O(1/p^2).$$

On en déduit que la série $\sum_{p\in P} \operatorname{Arg} F_p \circ \omega_p$ converge presque partout et donc que la fonction $F = \bigotimes_{p\in P} F_p$ est définie en presque tout point de G.

De plus, on a

$$\|F\|_{L^1(G)} = \prod_{p\in P} \|F_p\|_{L^1(Z_p^d)} \quad \text{et} \quad \|F_p\|_{L^1(Z_p^d)} = 1 - \sum_{|j|=1} (1-|f(p^j)|)/p + O(1/p^2),$$

ce qui montre que F n'est pas presque partout nulle.

LEMME 2. *Soit, pour chaque entier n supérieur à 1, une suite décroissante $\{j_{n,p}\}_{p\in P}$ d'éléments de N^d nuls à partir d'un certain rang, telle que, pour chaque p, $\{j_{n,p}\}_{n\geq 1}$ soit une suite croissante tendant vers l'infini. On pose*

$$\chi_n = \bigotimes_{p\in P} p^{|j_{n,p}|} 1_{Z_{p,j_{n,p}}}.$$

Alors si f est une fonction multiplicative satisfaisant aux hypothèses du lemme 1, il existe une suite croissante d'entiers $\{n_k\}_{k\geq 0}$ telle que $(\chi_{n_k} * F) \circ h$ converge au sens de la topologie $\sigma(L^\infty(Z^d), L^1(Z^d))$ vers une fonction $\tilde{f}$, paire par rapport à chacun de ses arguments, et qui prolonge f à Z^d.

Démonstration. Soit m dans $(N^*)^d$. Si chaque composante de $j_{n,p}$ est supérieure à la valuation p-adique de la coordonnée correspondante de m, on a

$$p^{|j_{n,p}|}\operatorname{Ind}(Z_{p,j_{n,p}})*F_p\circ\omega_p\circ h(m)=F_p\circ\omega_p\circ h(m)$$

(on a noté $\operatorname{Ind}(Z_p, j_{n,p})$ la fonction indicatrice de $Z_{p,j_{n,p}}$).

D'autre part, si les valuations p-adiques de toutes les coordonnés de m sont nulles, on a

$$p^{|j_{n,p}|}\operatorname{Ind}(Z_{p,j_{n,p}})*F_p\circ\omega_p\circ h(m)=1-\sum_{j\in J_{n,p}}\frac{1-f(p^j)}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

où le grand O est uniforme et où $J_{n,p}$ est l'ensemble des j de N^d tels que $|j|=1$ et dont la composante égale à 1 correspond à une composante nulle de $j_{n,p}$.

On a donc

$$\chi_n*F(h(m))=\Big[\prod_{p\in P_m}p^{|j_{n,p}|}\operatorname{Ind}(Z_{p,j_{n,p}})*F_p(\omega_p\circ h(m))\Big]\times$$
$$\times\prod_{p\notin P_m}\left[1-\sum_{j\in J_{n,p}}\frac{1-f(p^j)}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

où P_m est l'ensemble des nombres premiers divisant l'une au moins des composantes de m.

Si l'on choisit n assez grand, pour tout p dans P_m, chaque composante de $j_{n,p}$ est supérieure à la valuation p-adique de la composante correspondante de m, de sorte que, dans ces conditions, on a

$$\chi_n*F(h(m))=F(h(m))\times\prod_{p\notin P_m}\left[1-\sum_{j\in J_{n,p}}\frac{1-f(p^j)}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

(ce produit infini converge car, n étant fixé, $J_{n,p}$ croît avec p). Observons que, p étant fixé, $J_{n,p}$ décroît vers $\emptyset$ lorsque n croît vers $+\infty$. On en déduit que, pour tout m dans $(N^*)^d$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_n*F(h(m))=F(h(m))$.

En extrayant une sous-suite, on peut s'assurer que $\chi_{n_k}*F(h(m))$ a une limite $\tilde{f}(m)$ lorsque k tend vers $+\infty$ quel que soit m dans Z^d, ce qui prouve le lemme car les fonctions $(\chi_{n_k}*F)\circ h$ sont, en module, majorées par 1. Comme chacune des fonctions $(\chi_n*F)\circ h$ est paire par rapport à chacun de ses arguments, il en est de même de $\tilde{f}$.

2. Multiplicateurs de Fourier. Une fonction numérique φ mesurable, bornée sur G, définit un opérateur linéaire continu T_φ sur $L^2(\Gamma)$: $T_\varphi(\psi)$ a pour transformée de Fourier le produit de φ par la transformée de Fourier de ψ. Si la restriction de cet opérateur aux fonctions simples a une extension continue à $L^r(\Gamma)$ (où $r\in\,]1,+\infty[$) on dit que φ est dans $\mathfrak{M}_r(G)$ et l'on note

$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}_r(G)}$ la norme de cette extension. L'espace $\mathfrak{M}_r(G)$ est l'espace des multiplicateurs de $\mathfrak{F}(L^r(\Gamma))$. On sait que si r et r' sont des exposants conjugés (c'est-à-dire si l'on a $r^{-1}+r'^{-1} = 1$) les espaces $\mathfrak{M}_r(G)$ et $\mathfrak{M}_{r'}(G)$ sont identiques. On utilisera le résultat suivant.

LEMME 3. *Soit $\{\psi_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables bornées sur G, convergeant vers ψ au sens de la topologie $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$. Alors, pour tout $r\in]1, +\infty[$, on a*

$$\|\psi\|_{\mathfrak{M}_r(G)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{\mathfrak{M}_r(G)}.$$

Démonstration. Ce lemme résulte facilement de la formule

$$\|\psi\|_{\mathfrak{M}_r(G)} = \sup\{|\int_G \psi(x)\hat{u}(x)\hat{v}(x)\,dx|;\ u\in L^r(\Gamma)\cap L^2(\Gamma),\ v\in L^{r'}(\Gamma)\cap L^2(\Gamma),$$
$$\|u\|_r \leqslant 1,\ \|v\|_{r'} \leqslant 1\}.$$

3. Premier théorème.

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction multiplicative sur $(N^*)^d$, en module inférieure à 1 et telle que, pour tout j de N^d tel que $|j| = 1$, la série $\sum_{p\in P}\big(1-f(p^j)\big)/p$ converge. Dans ces conditions, il existe un prolongement $\tilde{f}$ de f à Z^d, pair par rapport à chacun de ses arguments, tel que, pour tout $r\in]1, \infty[$, on ait $\|\tilde{f}\|_{\mathfrak{M}_r(Z^d)} = \|F\|_{\mathfrak{M}_r(G)}$ où F est la fonction définie par le lemme 1.*

Démonstration. La fonction $\tilde{f}$ est donnée par le lemme 2. La démonstration suit les mêmes lignes que celle du théorème 1 de l'article précédent [1].

4. Cas où la moyenne est nulle. Soit comme précédemment une fonction multiplicative f majorée en module par 1. Au lieu de supposer que f définit un élément non nul de $L^1(G)$ on fait les hypothèses suivantes:

(i) Pour tout $p\in P$, il existe une suite $\{j_v\}_{v\geqslant 1}$ de points de N^d, tendant vers l'infini et telle que $p^{j_v}(\operatorname{Ind} Z_{p,j_v}) * F_p(x)$ ait une limite lorsque v tend vers $+\infty$, en tout point x de $Z_p^d\setminus\{0\}$. Cette limite, étant un prolongement de F_p, est encore notée F_p.

(ii) Pour tout p, $F_p(x) = 1$ si $x \neq 0$ et si toutes les composantes non nulles de x on 1 comme valeur absolue p-adique. Dans ces conditions, si $n\in Z^d\setminus\{0\}$ on pose $\tilde{f}(n) = \prod_{p\in P} F_p\circ h(n)$.

(iii) Pour tout p, il existe un cône Γ_p, ouvert dans $(R^+)^d$, et une suite $\{j_n\}_{n\geqslant 1}$ d'éléments de N^d, tendant vers l'infini, tels que, pour tout $v\in\{0, 1\}^d\setminus\{0\}$, la suite

$$\frac{1}{\operatorname{card}(\Gamma_p\cap F_{j_n})}\sum_{k\in\Gamma_p\cap F_{j_n}} \tilde{f}(vp^k)$$

ait une limite $f^*(v, p)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (F_{j_n} désigne l'ensemble $\{0, 1, \ldots, j_n^{(1)}\} \times \{0, 1, \ldots, j_n^{(2)}\} \times \ldots \times \{0, 1, \ldots, j_n^{(d)}\}$).

(iv) Pour chaque v, $\prod_{p \in P} |f^*(v, p)| \neq 0$.

THÉORÈME 2. *Soit f une fonction multiplicative satisfaisant aux hypothèses précédentes. On peut définir $\tilde{f}(0)$ de façon que, pour tout $r \in]1, \infty[$, on ait*

$$\|\tilde{f}\|_{\mathfrak{M}_r(Z^d)} = \prod_{p \in P} \|F_p\|_{\mathfrak{M}_r(Z_p^d)}.$$

Démonstration. Soit $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ l'énumération naturelle des nombres premiers.

Soit p un nombre premier. Si m appartient à $Z^d \setminus \{0\}$ on peut écrire $m = m' p^l$ où chaque composante non nulle de m' est première avec p. Soit v_m l'élément de $\{0, 1\}^d$ ainsi défini: une composante de v_m est nulle si et seulement si la composante correspondante de m l'est. Avec les notations de (iii) on a

$$\frac{1}{\operatorname{card}(\Gamma_p \cap F_{j_n})} \sum_{k \in \Gamma_p \cap F_{j_n}} \tilde{f}(mp^k) = \frac{\tilde{f}(m')}{\operatorname{card}(\Gamma_p \cap F_{j_n})} \sum_{k \in \Gamma_p \cap F_{j_n}} \tilde{f}(v_m p^{k+l}).$$

On pose

$$R_p \tilde{f}(m) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\operatorname{card}(\Gamma_p \cap F_{j_n})} \sum_{k \in \Gamma_p \cap F_{j_n}} \tilde{f}(mp^k) = \tilde{f}(m') f^*(v_m, p);$$

comme $R_p \tilde{f}$ est limite de combinaisons convexes de fonctions ayant dans $\mathfrak{M}_r(Z^d)$ une norme majorée par celle de f, on a $\|R_p \tilde{f}\|_{\mathfrak{M}_r(Z^d)} \leqslant \|\tilde{f}\|_{\mathfrak{M}_r(Z^d)}$ et ceci indépendamment de la valeur attribuée à $\tilde{f}(0)$.

On peut extraire de la suite des nombres premiers une suite $\{p_{n_j}\}_{j \geqslant 1}$ telle que, pour tout $v \in \{0, 1\}^d$, $\prod_{p \leqslant p_{n_j}} f^*(v, p)$ ait une limite lorsque j tend vers $+\infty$.

Soit j un entier $\geqslant 1$. On effectue sur $\tilde{f}$ successivement les opérations

$$\prod_{p_{n_k} < p \leqslant p_{n_{k+1}}} R_p \quad (k = j, j+1, \ldots).$$

A la limite, on obtient une fonction f_j ayant les propriétés suivantes

(a) $\|f_j\|_{\mathfrak{M}_r(Z^d)} \leqslant \|\tilde{f}\|_{\mathfrak{M}_r(Z^d)}$ (lemme 3),

(b) $f_j(m) = \left(\lim_{j' \to \infty} \prod_{p_{n_j} < p \leqslant p_{n_{j'}}} f^*(v_m, p)\right) \tilde{f}(m'')$

où chaque composante non nulle de m'' s'obtient en ne gardant dans la décomposition primaire de la composante correspondante de m que les facteurs correspondants à des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_{n_j}.

Divisons f_j par

$$\alpha_j = \lim_{j' \to \infty} \prod_{p_{n_j} < p \leqslant p_{n_{j'}}} f^*(1, p) \quad \text{où} \quad \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \boldsymbol{Z}^d$$

et appliquons à la fonction ainsi obtenue le théorème 1: il existe un prolongement $\tilde{f}_j$ à $\boldsymbol{Z}^d$ de la restriction à $(\boldsymbol{N}^*)^d$ de f_j/α_j tel que l'on ait

$$\|\tilde{f}_j\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}^d)} = \prod_{p \leqslant p_{n_j}} \|F_p\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}_p^d)}$$

(on peut appliquer le théorème 1 à la fonction f_j/α_j car, pour $p > p_{n,j}$ et $k \in \boldsymbol{N}^d$, on a $f(p^k)/\alpha_j = 1$). Le prolongement étant obtenu au moyen du lemme 2, l'hypothèse (i) entraîne que l'on a

$$f_j(m) = \tilde{f}_j(m) \lim_{j' \to \infty} \prod_{p_j < p \leqslant p_{j'}} f^*(v_m, p).$$

Prenons pour $\tilde{f}(0)$ une valeur d'adhérence de la suite $\tilde{f}_j(0)$. Dans ces conditions une sous-suite de la suite $\tilde{f}_j$ converge de façon ponctuelle bornée (dans $\sigma(L^\infty, L^1)$) vers $\tilde{f}$. Comme, pour tout sous-groupe Λ de $\boldsymbol{Z}^d$, et en particulier lorsque Λ est constitué des n de $\boldsymbol{Z}^d$ dont certaines composantes sont nulles, on a $\|\tilde{f}_j|_\Lambda\|_{\mathfrak{M}_r(\Lambda)} \leqslant \|\tilde{f}_j\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}^d)}$ on obtient

$$\|f_j\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}^d)} \leqslant \|\tilde{f}_j\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}^d)} + o(1),$$

d'où, $\{n'_j\}$ étant une suite convenable d'entiers,

$$\|\tilde{f}\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}^d)} \leqslant \liminf_{j \to \infty} \|\tilde{f}_{n'_j}\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}^d)} \leqslant \prod_{p \in P} \|F_p\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}_p^d)}.$$

L'inégalité inverse résulte de (a).

5. Applications.

THÉORÈME 3. *Soit f une fonction multiplicative définie sur $\boldsymbol{N}^{*d}$ et vérifiant les hypothèses soit du théorème* 1, *soit du théorème* 2. *Pour chaque nombre premier p on considère le plus grand entier k_p s'il existe, tel que la restriction de F_p à $\boldsymbol{Z}_p^d \backslash (p^{k_p+1} \boldsymbol{Z}_p)^d$ soit identiquement égale à* 1 *et l'on pose*

$$\alpha_p = \sup \{|1 - f(p^j)|;\ (j_1, \ldots, j_d) \in \boldsymbol{N}^d \ \textit{et} \ \sup(j_1, \ldots, j_d) = k_p + 1\}$$

$$(\alpha_p = 0 \ \textit{si} \ k_p = \infty).$$

Dans ces conditions, si pour un nombre r de l'intervalle $]1, 2[$ *on a* $\sum_{p \in P} \alpha_p p^{1-r} = +\infty$, *alors les prolongements $\tilde{f}$ de f, considérés aux théorèmes* 1 *et* 2, *n'appartiennent pas à* $\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}^d)$.

Démonstration. Nous avons à montrer que l'on a $\prod_{p \in P} \|F_p\|_{\mathfrak{M}_r(\boldsymbol{Z}_p^d)} = +\infty$. On sait que la norme de $\mathfrak{M}_r$ est invariante par translation. D'autre part, si G_1 est un sous-groupe ouvert du groupe abélien compact G et si φ

est une fonction borélienne de G dans C, on a

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}_r(G)} \geqslant \|\varphi|_{G_1}\|_{\mathfrak{M}_r(G_1)} \quad \text{pour tout } r \geqslant 1.$$

En restreignant F_p à une classe modulo un sous-groupe ouvert convenable de Z_p^d on se ramène, pour minorer $\|F_p\|_{\mathfrak{M}_r(Z_p^d)}$, à minorer la norme dans $\mathfrak{M}_r(Z_p^{\nu_p})$ (pour un entier $\nu_p \leqslant d$ convenable) d'une fonction H_p telle que l'on ait

$$H_p \cdot 1_{Z_p^{\nu_p} \setminus (p^2 Z_p)^{\nu_p}} = 1_{(Z_p)^{\nu_p} \setminus (pZ_p)^{\nu_p}} + (1-a_p)\, 1_{(pZ_p)^{\nu_p} \setminus (p^2 Z_p)^{\nu_p}}$$

avec $|a_p| = \alpha_p$.

On effectue cette minoration en appliquant le lemme suivant après avoir restreint H_p au groupe

$$\bigcup_{\gamma \in Z_p^{\nu_p} \setminus (p^2 Z_p)^{\nu_p}} \gamma \times \gamma \times \ldots \times \gamma.$$

LEMME. *Soit G un groupe abélien compact ayant deux sous-groupes ouverts G_1 et G_2 tels que G_1 contienne G_2 et tels que G/G_1 et G_1/G_2 aient ν éléments ($\nu \geqslant 2$). Soit f une fonction borélienne de G dans C et telle que l'on ait*

$$f \cdot 1_{G \setminus G_2} = 1_{G \setminus G_1} + (1-a)\, 1_{G_1 \setminus G_2}$$

où a est un nombre complexe dont le module est inférieur à 2. Pour tout $r \in]1, 2[$, on a

$$\|f\|_{\mathfrak{M}_r(G)}^r \geqslant 1 + |a| \left(\frac{1}{9\nu^{r-1}} - \frac{8}{\nu} - \frac{6}{\nu^{2r-2}} \right).$$

Démonstration. Le résultat est clair si a est nul. Supposons donc $a \neq 0$. Soit t le nombre complexe défini par les relations $|t| = 1/4$ et $at/\left(1+\frac{t}{\nu}\right) \in R^+$.

On note Γ_0, Γ_1 et Γ_2 les sous-groupes du dual de G, annulateurs respectifs de G, G_1 et G_2.

On pose $\varphi = -(1+t)\, 1_{G \setminus G_1} - t \cdot 1_{G_1 \setminus G_2}$. On vérifie que l'on a

$$\hat{\varphi} = -\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left[1+t\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right] 1_{\Gamma_0} + \frac{1}{\nu}\left(1+\frac{t}{\nu}\right) 1_{\Gamma_1 \setminus \Gamma_0} + \frac{t}{\nu^2} 1_{\Gamma_2 \setminus \Gamma_1},$$

$$(f\varphi)\hat{} = -\left(1-\frac{1}{\nu}\right) \times$$

$$\times \left[1+t\left(1+\frac{1}{\nu}\right) - \frac{at}{\nu}\right] 1_{\Gamma_0} + \frac{1}{\nu}\left[1+\frac{t}{\nu}+at\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\right] 1_{\Gamma_1 \setminus \Gamma_0} + \frac{t(1-a)}{\nu^2} 1_{\Gamma_2 \setminus \Gamma_1}$$

et

$$\|(f\varphi)\hat{}\|_{r'}^r / \|\hat{\varphi}\|_{r'}^r \geqslant 1 + |a| \left(\frac{1}{9\nu^{r-1}} - \frac{8}{\nu} - \frac{6}{\nu^{2r-2}} \right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Daboussi et J. Peyrière, *Fonctions arithmétiques multiplicatives et multiplicateurs des coefficients de Fourier des fonctions de puissance p-ième sommable*, Colloquium Mathematicum 28 (1973), p. 261–266.

[2] H. Delange, *On some pairs of positive integers*, Journal of Number Theory 1 (1969), p. 261–279.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY CEDEX

Reçu par la Rédaction le 25. 07. 1981;
en version modifiée le 16. 06. 1983