

К. К. ПОНОМАРЁВ (Москва)

ПРИМЕНЕНИЕ СТАНДАРТНОГО АЛГОРИФМА К РАСЧЁТУ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1. Неразрезные балки. Дифференциальное уравнение изгиба k -того участка балки постоянного сечения нагруженного равномерно распределенной нагрузкой

$$(1.1) \quad EI_k \cdot y^{IV}(x) = q.$$

Принимая во внимание правило знаков и обозначений согласно рис. 1 и используя способ начальных параметров, решение уравне-

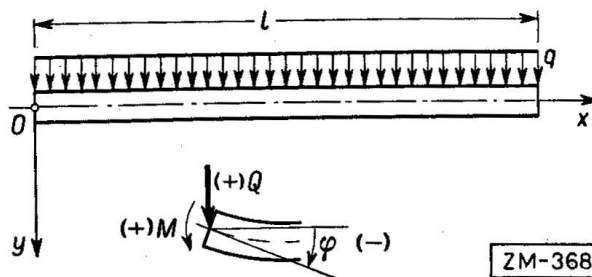


Рис. 1.

ния (1.1) совместно с первыми производными в матричной форме принимает вид

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} y_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ Q_k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x & \frac{x^2}{2EI_k} & \frac{x^3}{6EI_k} & \frac{qx^4}{24EI_k} \\ & 1 & -\frac{x}{EI_k} & -\frac{x^2}{2EI_k} & -\frac{qx^3}{6EI_k} \\ & & 1 & x & \frac{qx^2}{2} \\ & & & 1 & qx \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или в более компактной форме

$$(1.3) \quad \{Y_k\} = [A_k] \cdot \{Y_0\},$$

где: $\{Y_0\}$ — матрица-столбец напряженного и деформированного состо-

яния начального сечения, $\{Y_k\}$ — то же для k -того сечения, $[A_k]$ — матрица участка.

2. Статически неопределимые рамы. Рассмотрим раму, работающую на пространственную нагрузку. Линейная зависимость усилий и деформация в каждом пролете задана системой линейных дифференциальных уравнений

$$L_n(\xi_n) = f(\xi_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

решения которой удовлетворяют определенным граничным и промежуточным условиям.

В деформации системы участвуют k из шести пар ($1 \leq k \leq 6$) взаимно сопряженных величин: x — продольное смещение, N_x — продольная сила, y — прогиб по оси ординат, z — прогиб по оси аппликат, X, Y, Z — текущие координаты в направлении соответствующих осей, Q_y — поперечная сила по оси ординат, Q_z — продольное кручение, M_x — крутящий момент, φ_y — угол поворота по оси ординат, M_y — изгибающий момент по оси ординат, φ_z — угол поворота по оси аппликат, M_z — изгибающий момент по оси аппликат.

Тогда зависимость усилий и деформаций на краях пролета в матричной форме:

$$(2.1) \quad \{R_i\} = [L_i] \cdot \{R_{i-1}\},$$

где $[L_i]$ — прямоугольная матрица порядка (α, β) , элементы которой определяются фундаментальной системой вместе с частным решением,

$\{R_i\}$ — матрица-столбец пространственного напряженного и деформированного состояния в сечении i ,

$\{R_{i-1}\}$ — то же в сечении $i-1$.

Умножение матрицы $[L_i]$ с β столбцами на матрицу-столбец $\{R_{i-1}\}$ с α элементами можно провести, если первые k элементов $\{R_i\}$ дописать в качестве последних k элементов $\{R_{i-1}\}$. Это возможно в случае наличия в верхнем правом углу матрицы $[L_i]$ дополнительного нулевого блока порядка k .

Как известно, в пространственной задаче усилия и деформации балки постоянного сечения связаны 12 линейными дифференциальными уравнениями первого порядка, которые сводятся к нижеследующим:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} -EF \frac{d^2x}{dX^2} &= q_x(X), & EI_y \frac{d^4y}{dX^4} &= q_y(X), \\ -GI \frac{d^2\vartheta}{dX^2} &= M(X), & EI_z \frac{d^4z}{dX^4} &= q_z(X). \end{aligned}$$

Последующее непосредственное интегрирование уравнений (2.2)

с включением тривиальной единицы приводит к четырем матричным зависимостям:

$$(2.3) \quad \{X_i\} \equiv \begin{bmatrix} x_i \\ N_{xi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{l}{EF} \bar{x} & 0 \\ 0 & 1 - \bar{\kappa}_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ N_{xi-1} \\ -1 \end{bmatrix} = [L_{xi}] \cdot \{X_{i-1}\},$$

$$(2.4) \quad \{Y_i\} \equiv \begin{bmatrix} z_i \\ \varphi_{yi} \\ M_{yi} \\ Q_{zi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l - \frac{l^2}{2EI_y} & \frac{l^3}{6EI_y} & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{l}{EI_y} & -\bar{\varphi}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - l & \bar{M}_y & 0 - \mu_{\varphi y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \bar{Q}_z & -\kappa_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ \varphi_{yi-1} \\ M_{yi-1} \\ Q_{zi-1} \\ 1 \end{bmatrix} = [L_{Yi}] \cdot \{Y_{i-1}\},$$

$$(2.5) \quad \{M_{xi}\} \equiv \begin{bmatrix} \vartheta_i \\ M_{xi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{l}{GI} \bar{\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 - \bar{\mu}_{\vartheta} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_{i-1} \\ M_{xi-1} \\ 1 \end{bmatrix} = [L_{M_{xi}}] \cdot \{M_{xi-1}\},$$

$$(2.6) \quad \{Z_i\} \equiv \begin{bmatrix} y_i \\ \varphi_{iz} \\ M_{zi} \\ Q_{yi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l - \frac{l^2}{2EI_z} & \frac{l^3}{6EI_z} & \bar{y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{l}{EI_z} & -\bar{\varphi}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - l & \bar{M}_z & 0 - \mu_{\varphi z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \bar{Q}_y & -\kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ \varphi_{zi-1} \\ M_{zi-1} \\ Q_{yi-1} \\ 1 \end{bmatrix} = [L_{zi}] \cdot \{Z_{i-1}\}.$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= \int_0^l q_x(X) dX, & \bar{x} &= - \int_0^l \frac{\bar{N}(X)}{EF} dX, & \bar{Q}_z &= \int_0^l q_z(X) dX, \\ \bar{M}_y &= \int_0^l Q_z(X) dX, & \bar{\varphi}_y &= - \int_0^l \frac{\bar{M}_y(X)}{EI_y} dX, & \bar{z} &= \int_0^l \frac{-\bar{\varphi}_y(X)}{EI_y} dX, \\ \bar{M}_x &= \int_0^l M(X) dX, & \bar{\vartheta} &= - \int_0^l \frac{\bar{M}_x(X)}{GI} dX, & \bar{Q}_y &= \int_0^l q_y(X) dX, \\ \bar{M}_z &= - \int_0^l \bar{Q}_y(X) dX, & \bar{\varphi}_z &= \int_0^l \frac{-\bar{M}_z(X)}{EI_z} dX, & \bar{y} &= \int_0^l \frac{\bar{\varphi}_z(X)}{EI_z} dX. \end{aligned}$$

Матрица

$$(2.10) \quad [S] \cdot [T^{-1}] = [K] = \begin{bmatrix} K_{1k} & \dots & K_{12} & K_{11} \\ K_{2k} & \dots & K_{22} & K_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{kk} & \dots & K_{2k} & K_{1k} \end{bmatrix},$$

устанавливающая связь между усилиями и деформациями представляет обобщение матрицы-блока V , характеризующей в (2.7) упругие связи системы.

Аналогично структуре зависимости „усилие = функция деформации” матрица (2.10) образует матрицу приведенной упругости для любой точки рамы, заменяя действие предшествующей рассматриваемому сечению части рамы.

В случае плоской рамы (2.7) все k уравнений подчиняются закону Гука $\sigma_i = -K_i \eta_i$, причем влияние упругости учитывается известными упругими характеристиками κ_i и μ_i (рис. 2).

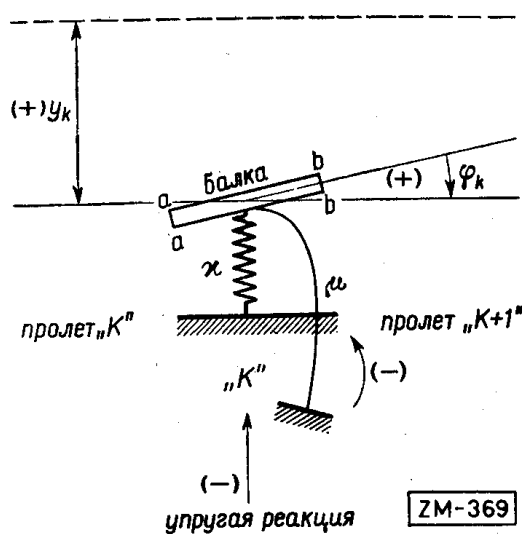


Рис. 2

В общем пространственном случае, для выражения влияния в любом сечении упругости предшествующей части рамы, вводится приведенная упругая опора (рис. 3а), характеризующаяся более сложными характеристиками K_s .

Таким образом, сложная рамная система может рассматриваться как состоящая из отдельных условных неразрезных балок и остается лишь установить характер изменения связывающих свойств этой

системы. Пример приведения сложной рамы к неразрезной балке с приведенными упругими опорами показан на рис. 4.

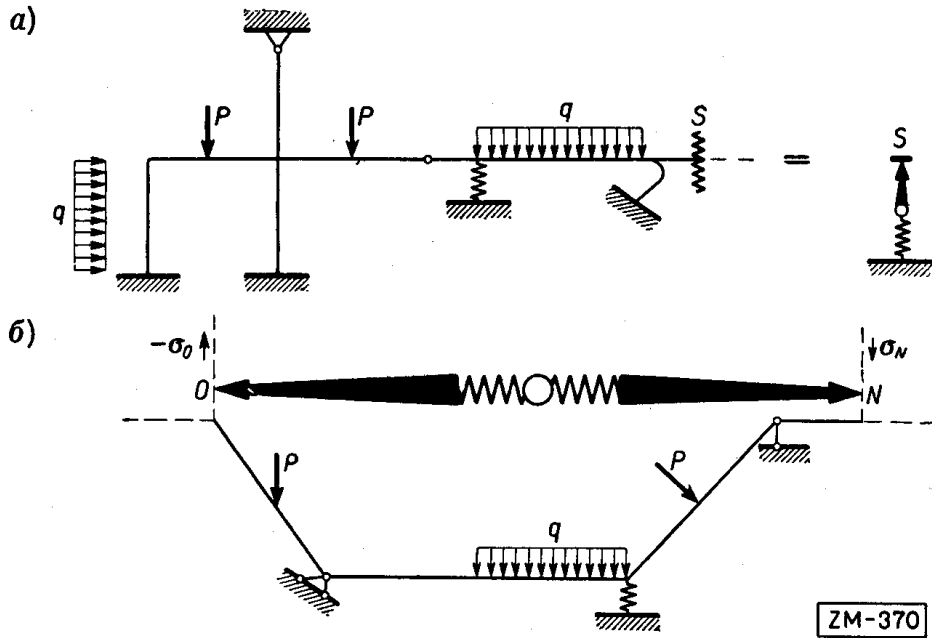


Рис. 3

Для расчета рам замкнутых контуров удобно ввести дальнейшее обобщение — дву (много) кратную приведенную опору (рис. 3б), выражающую связь усилий и деформаций между двумя любыми сечениями замкнутой рамы.

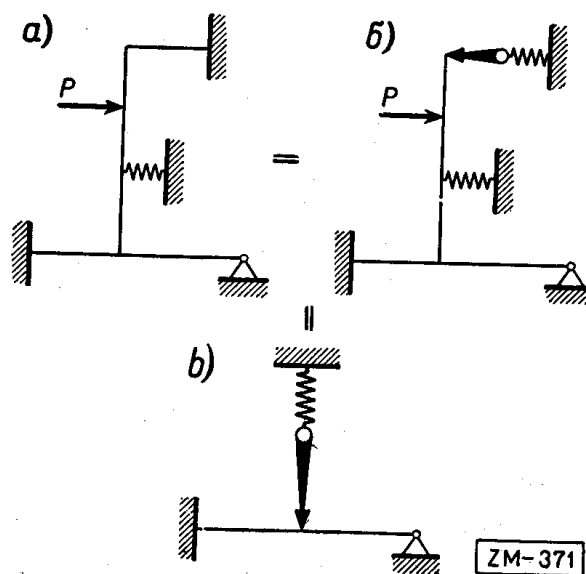


Рис. 4

Аналогично (2.8)-(2.9), разбивая, ввиду увеличения числа неизвестных параметров вдвое, матрицу $[T]$ на две матрицы $[S_1]$ и $[S_2]$, а матрицу $[S]$ на матрицы $[S_3]$ и $[S_4]$, имеем:

$$(2.11) \quad \begin{cases} [S_1] \cdot \{\eta_0\} + [S_2] \cdot \{\sigma_0\} = (\{\eta\} - \{\bar{\eta}\})_N, \\ [S_3] \cdot \{\eta_0\} + [S_4] \cdot \{\sigma_0\} = (\{\sigma\} - \{\bar{\sigma}\})_N, \end{cases}$$

откуда после преобразований

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \{-\sigma_0\} &= [S_2^{-1}][S_1] \cdot \{\eta_0\} - [S_2^{-1}](\{\eta\} - \{\bar{\eta}\})_N; \\ (\{\sigma\} - \{\bar{\sigma}\})_N &= [S_4][S_2^{-1}](\{\eta\} - \{\bar{\eta}\})_N - ([S_4][S_2^{-1}][S_1] - [S_3]) \cdot \{\eta_0\}. \end{aligned}$$

Система (2.12) в матричной форме

$$(2.13) \quad \begin{bmatrix} \{-\sigma_0\} \\ (\{\sigma\} - \{\bar{\sigma}\})_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[S_2^{-1}] & [S_2^{-1}][S_1] \\ [S_4][S_2^{-1}] & -[S_4][S_2^{-1}][S_1] + [S_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\{\eta\} - \{\bar{\eta}\})_N \\ \{\eta_0\} \end{bmatrix} = \\ = [K_{ON}] \cdot \begin{bmatrix} (\{\eta\} - \{\bar{\eta}\})_N \\ \{\eta_0\} \end{bmatrix}.$$

Матрица $[K_{ON}]$ образует матрицу приведенной упругости сечения ON .

Таким образом, уравнение (2.12) заданную в рассматриваемом интервале ON системы нагрузки (при соответствующих деформациях $\{\eta_0\}$ и $\{\eta_N\}$) переносит на края интервала.

В практически важном случае однопролетной балки постоянного сечения, уравнение (2.13) для двух пар сопряженных величин (φ, M_y) и (z, Q_z) принимает вид:

$$(2.14) \quad \begin{bmatrix} -M_{y0} \\ -Q_{z0} \\ (M_y - \bar{M}_y)_N \\ (Q_z - \bar{Q}_z)_N \end{bmatrix} = EI_y \cdot \begin{bmatrix} -6/l^2 & -2/l & 6/l^2 & -4/l \\ 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ -6/l^2 & -4/l & 6/l^2 & -2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (z - \bar{z})_N \\ (\varphi - \bar{\varphi})_N \\ z_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотренный случай замены двух сечений двусторонней приведенной упругой опорой можно распространить на любое число сечений стержневой системы.

Применяемый метод можно обобщить распространяя его на пространственные системы, изображая их для общности в виде правильной прямой призмы с прямыми параллельными ребрами.

Секущая поверхность, разделяя такую систему на две части, пересекает ее в m (по количеству стержней) точках. Аналогично изложенному ранее удвоенную совокупность $\sum_1^m \nu k$, (где $1 \leq k \leq 6$) усилий и деформаций, действующих в плоскости сечения можно сократить наполовину применяя способ начальных параметров. После определения неизвестных усилий и деформаций в начальной плоскости, необходимо произвести перерасчет системы вплоть до концевой поверхности подставляя найденные числовые значения параметров начальной плоскости призмы. Действие перпендикулярных связей заменяется приведенными упругими опорами,

Заклячая усилия и деформации всех m стержней-ребер в матрицу-столбец $\{R\}$, составляем соответствующую основную матрицу, построенную на основании (2.3)-(2.6).

Такая призма топологически эквивалента ряду широко применяемых пространственных и плоских систем, за исключением случаев пересекающихся стержней. В последнем случае для выполнения расчета необходимо удовлетворение промежуточных условий.

Выводы

1. Применяемый метод позволяет единым приемом решать статические неопределимые стержневые системы (балки, рамы, фермы с параллельными поясами) на все виды воздействий.

2. Отпадает необходимость выбора основной системы, решения системы канонических уравнений и последующего определения усилий и деформаций.

3. Любая рамная система применением приведенной упругой опоры сводится к расчету неразрезной балки. Решение задачи требует не более трех линейных алгебраических уравнений независимо от степени статической неопределенности системы.

4. Значительно облегчается расчет рам замкнутого контура (многорусные рамы, балочная решетка, балка-ферма и т. п.), который при помощи кратных приведенных опор сводится к стандартному алгоритму.

5. Расчет подчиняется простому алгоритму, основанному на перемножении нескольких матриц, что позволяет программировать решения задач на электронных вычислительных машинах одним циклом.

6. Возникает возможность широкого варьирования исходных параметров задачи.

Цитированная литература

- [1] Ф. Р. Гантмахер, *Матрицы*, Москва 1954.
 [2] S. Falk, *Die Berechnung geoffener (und geschlossener) Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren*, Ingenieur-Archiv 26 (1958).

Praca wpłynęła 8. 2. 1961

K. K. PONOMARIOV (Moskwa)

O ZASTOSOWANIU ALGORYTMU ZNORMALIZOWANEGO
 DO OBLICZANIA UKŁADÓW PRĘTOWYCH

STRESZCZENIE

Zastosowanie macierzowego wzoru przedłużenia do określania stanu napięć i odkształceń statycznie niewyznaczalnych belek i ram doprowadza do sformułowania znormalizowanego algorytmu macierzowego obliczania układów prętowych.

W pracy pokazano zastosowanie rozpatrywanego algorytmu do obliczania belek ciągłych według schematu

$$\{Y_k\} = [L_n] \cdot [F_{n-1}] \cdot [L_{n-1}] \dots [F_1] \cdot [L_1] \cdot \{Y_0\},$$

gdzie $[L_i]$ i $[F_i]$ są macierzami sztywności przęseł i podpór, a $\{Y_k\}$ i $\{Y_0\}$ są macierzami stanu napięć i odkształceń w k -tym i początkowym przekroju belki. Obliczenie wykonuje się od prawej strony.

Algorytm uogólnia się na obliczanie jedno i wieloobwodowych ram płaskich oraz przestrzennych układów prętowych.

W pracy jest podana, uogólniająca obliczanie takich układów, macierz sztywności przęseł rzędu $(2k+1; 3k+1)$, zbudowana dla topologicznie równoważnego wielościanu.

Sposób obliczania za pomocą algorytmu znormalizowanego jest szczególnie wygodny dla programowania na elektronowych maszynach cyfrowych.

K. K. PONOMAREV (Moscow)

ON THE APPLICATION OF STANDARD ALGORITHM FOR COMPUTING
 THE BEAM-STRUCTURES

SUMMARY

The application of matrix extension formula for determining the state of strains and deformations of hyperstatic beams and frames leads to the formulation of the standardized matrix algorithm for determining the beam-structures.

The paper shows the application of the considered algorithm for the computation of a continuous beam according to the formula

$$\{Y_k\} = [L_n] \cdot [F_{n-1}] \cdot [L_{n-1}] \dots [F_1] \cdot [L_1] \cdot \{Y_0\},$$

where $[L_i]$ and $[F_i]$ are the stiffness matrices of spans and supports, and $\{Y_k\}$ and $\{Y_0\}$ are the matrices of states of strains and deformations in the k -th and initial cross-section of the beam considered. The computation starts from the right-hand side.

The algorithm is generalized for the computation of the one- and multicircuit plane frame and the three-dimensional beam structures.

The paper also gives the generalization of computations of such systems, by means of the stiffness matrix of spans of the order $(2k+1; 3k+1)$, constructed for the topologically equivalent simplex.

The method of computation with the use of matrix algorithm is especially convenient for programming on electronic digital computers.
