

DIFFERENTIAL GEOMETRY  
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 12  
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS  
WARSAW 1984

## БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ТОЧКОЙ УПЛОЩЕНИЯ

З. Д. УСМАНОВ

Вычислительный Центр АН Тадж. ССР, Душанбе, СССР

Предметом моих лекций являются бесконечно малые изгибания поверхности положительной кривизны с изолированной точкой уплощения.

Разумеется, речь идет о положительности кривизны вокруг точки уплощения, поскольку в самой точке гауссова кривизна равна нулю. Более того, по определению, в точке уплощения не только гауссова кривизна, но и кривизны всех нормальных сечений поверхности, а следовательно, и все коэффициенты второй квадратичной формы обращаются в нуль. В этой точке поверхность со своей касательной плоскостью имеет порядок прикосновения больше единицы.

В работах Г. Либмана [23], [24], В. Бляшке [7], [8], А. В. Погорелова [27], Б. В. Боярского и И. Н. Векуа [10], посвященных бесконечно малым изгибаниям овалоидов, точки с нулевыми значениями гауссовой кривизны (в их числе и точки уплощения) не исключаются из рассмотрения. Однако их особая роль при деформациях поверхности не обнаруживается, поскольку имеет место жесткость овалоидов как при отсутствии, так и при наличии таких точек. Вместе с тем в работах Е. Рембса по бесконечно малым изгибаниям плоских желобов [28] и выпуклых поверхностей с параболическими границами [29], а также в работе А. Д. Александрова о жесткости поверхностей типа  $T$  [1] выявляется особая роль линий с нулевым значением гауссовой кривизны. Присутствие их на поверхности повышает сопротивляемость её бесконечно малым изгибаниям.

Какова же роль изолированной точки уплощения и каково её влияние на деформацию поверхности? Эти вопросы впервые исследовались в работах Н. В. Ефимова [13]–[17]. Рассматривая аналитическую поверхность

$$(0.1) \quad z = F^{(n)}(x, y) + F^{(n+1)}(x, y) + \dots, \quad n > 2,$$

где  $F^{(k)}(x, y)$  — однородная форма степени  $k$ , Н. В. Ефимов доказал, что первую форму  $F^{(n)}(x, y)$  можно выбрать так, что для полученной поверхности в процессе любого её достаточно гладкого изгибания остаются неизменными начальная форма  $F^{(n)}(x, y)$  и несколько подряд следующих за ней

форм (не возникают также формы перед  $F^{(n)}$ ). Такие поверхности были названы относительно неизгибающимися (локально). Для максимального числа  $L$  устойчивых форм  $F^{(k)}(x, y)$  такой поверхности, названного порядком относительной неизгибаимости, установлена оценка  $L \geq N+1$  через вполне определенный целочисленный инвариант  $N$  начальной формы  $F^{(n)}$ . С помощью этой оценки и было доказано существование относительно неизгибаимых поверхностей, причем со сколь угодно большими значениями  $L$ . Более того, было установлено явление точной локальной неизгибаимости, т.е. существование аналитических поверхностей с точкой уплощения, не допускающих непрерывных изгибаний даже сколь угодно малой окрестности этой точки (изгибы рассматриваются в классе аналитических поверхностей). Как отмечал А. Д. Александров [2], необычность этого результата заключалась в том, что... „многие геометры считали возможность непрерывных изгибаний малых кусков поверхностей чем-то само собой разумеющимся”. Действительно, к тому времени было известно, что для любой эллиптической или гиперболической точки аналитической поверхности существует окрестность, допускающая непрерывные изгибы в классе аналитических поверхностей.

Г. Шильт [49] установил аналогичный результат для случая параболической точки.

В связи с исследованиями Н. В. Ефимова возникает вопрос об изучении всего многообразия локально неизгибаимых аналитических поверхностей. Эта задача уже была сведена к алгебре. Полное решение алгебраической задачи дал В. А. Тартаковский [30] (см. также З. Г. Макарова [25]). Из его результатов следует, что почти все поверхности (0.1) при  $n \geq 5$  неизгибаимы в аналитическом классе. А. Г. Дорфман [12] сделал существенное добавление, установив, что для любых  $n$  среди поверхностей (0.1) имеется бесконечно много изгибаимых.

В теории бесконечно малых изгибаний Н. В. Ефимов на примере аналитической поверхности, являющейся окрестностью точки уплощения, впервые доказал возможность жесткости „в малом” в классе аналитических деформаций [17].

В настоящей лекции мы отказываемся от условия аналитичности поверхности и её деформаций, но при этом ограничиваемся рассмотрением поверхностей специального вида, заданных в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  уравнением

$$(0.2) \quad z = (x^2 + y^2)^{n/2} \cdot f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$n$  — любое действительное число,  $n > 2$ . Предполагается, что точка уплощения  $(0, 0)$  является внутренней для односвязной области  $D$ , ограниченной кривой Ляпунова;  $f(x, y)$  — достаточно гладкая функция,  $f(0, 0) > 0$ . Вместе с тем, для всех точек  $\bar{D}$ , отличных от  $(0, 0)$ , гауссова кривизна поверхности считается положительной.

Основное внимание мы уделяем исследованию изгибаний поверхности с краем, т.е. нелокальной задаче. При этом мы изучаем не точные изгибы, а бесконечно малые изгибы поверхности, которые, как известно, составляют предмет специальной (линейной) теории.

Из-за наличия на поверхности точки уплощения рассматриваемая нами задача не является строго эллиптической, а потому для её изучения возникает необходимость в развитии специального аналитического аппарата. Идея его построения сходна с идеей построения теории обобщенных аналитических функций, которое осуществлено в работах И. Н. Векуа и подробно изложено в известной монографии [11]. Далее более детально будут указаны взаимоотношения этого аппарата с аппаратом обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа.

Мы изучаем то влияние, которое оказывает уплощение поверхности на обширность допускаемого ею множества бесконечно малых изгибаний. В частности, будет исследоваться разрешимость задачи о бесконечно малых изгибаниях поверхности, подчиненных краевым условиям. В качестве последних рассматривается линейная комбинация

$$(0.3) \quad \lambda(s) \delta k_s + \mu(s) \delta \tau_s = h(s),$$

где  $\delta k_s$  и  $\delta \tau_s$  — соответственно вариации нормальной кривизны и геодезического кручения края;  $\lambda(s)$ ,  $\mu(s)$ ,  $h(s)$  — заданные функции длины дуги граничной кривой.

## РАЗДЕЛ 1

### § 1. Уравнения бесконечно малых изгибаний поверхности положительной кривизны для вариаций коэффициентов второй квадратичной формы

Как известно, совместное задание двух квадратичных форм (по крайней мере одна из них положительно определенная), удовлетворяющих уравнениям Гаусса и Петерсона–Коддацци, определяет с точностью до движения в пространстве поверхность, для которой эти формы являются основными; см. теорему Боннэ, [21]. Поэтому задачу отыскания поверхностей, являющихся бесконечно малыми изгибаниями данной поверхности, можно свести к исследованию решений уравнений Гаусса и Петерсона–Коддацци, где в качестве искомых функций фигурируют коэффициенты второй квадратичной формы, а коэффициенты первой считаются заданными.

Если изучаются деформации некоторой поверхности  $S$ , то в качестве искомых функций удобно рассматривать вариации  $\delta L$ ,  $\delta M$ ,  $\delta N$  коэффициентов  $L$ ,  $M$ ,  $N$  её второй квадратичной формы (соответствующие коэффициенты деформированной поверхности будут  $L + \varepsilon \delta L$ ,  $M + \varepsilon \delta M$ ,  $N + \varepsilon \delta N$ , где  $\varepsilon$  —

малый параметр). Уравнения для  $\delta L$ ,  $\delta M$ ,  $\delta N$  получаются путем варьирования уравнений Гаусса и Петерсона–Кодаци, см. [11], гл. 5, § 7:

$$\begin{aligned} L\delta N + N\delta L - 2M\delta M &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\delta M) - \frac{\partial}{\partial y}(\delta L) + \Gamma_{12}^1\delta L - (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\delta M - \Gamma_{11}^2\delta N &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}(\delta M) - \frac{\partial}{\partial x}(\delta N) - \Gamma_{22}^1\delta L - (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1)\delta M + \Gamma_{12}^2\delta N &= 0, \end{aligned}$$

где  $x$ ,  $y$  — внутренние координаты на  $S$  и  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля второго рода.

Предположим, что поверхность  $S$ , будучи достаточно гладкой, имеет положительную кривизну. Тогда на ней существует изометрически сопряженная система координат  $u$ ,  $v$ , в которой коэффициенты второй формы удовлетворяют соотношениям  $L(u, v) = N(u, v)$  и  $M(u, v) = 0$ , [11]. В такой системе координат уравнения для  $\delta L(u, v)$ ,  $\delta M(u, v)$ ,  $\delta N(u, v)$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \delta N &= -\delta L, \\ \frac{\partial}{\partial u}(\delta M) - \frac{\partial}{\partial v}(\delta L) - (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\delta M + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2)\delta L &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial v}(\delta M) + \frac{\partial}{\partial u}(\delta L) - (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1)\delta M - (\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^2)\delta L &= 0. \end{aligned}$$

Применяя обозначение  $w = u + iv$ ,  $i^2 = -1$ , и рассматривая комплексную исходную функцию

$$(1.1) \quad U(w) = K^{1/4}(w) \cdot (\delta M + i\delta L),$$

где  $K(w)$  — гауссова кривизна поверхности  $S$ , запишем предыдущую систему в следующей форме

$$(1.2) \quad \partial_w U + B(w) \cdot \bar{U} = 0.$$

Здесь

$$\partial_w U = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

а черта над буквой обозначает комплексное сопряжение. Кроме того

$$(1.3) \quad B(w) = -e^{i\psi(w)} \partial_{\bar{w}} \left( \operatorname{Arch} \frac{H}{\sqrt{K}} \right) - \frac{\partial_w K}{4K} e^{2i\psi(w)},$$

где

$$(1.4) \quad e^{i\psi(w)} = \frac{a^-(w) \sqrt{K(w)}}{2 \sqrt{a(w) \cdot \mathcal{E}(w)}}.$$

Здесь  $H(w)$  — средняя кривизна поверхности,  $\mathcal{E}(w) = H^2 - K$  — эйлерова разность,  $a(w) = EG - F^2$  — дискриминант первой квадратичной формы ( $E$ ,  $G$ ,  $F$  — её коэффициенты),  $a^-(w) = E - G + 2iF$ , см. [11].

Уравнение (1.2) есть комплексная запись обобщенной системы Коши–Римана. В настоящем разделе оно играет вспомогательную роль, составляя основу для получения уравнения бесконечно малых изгибаний поверхности с точкой уплощения.

## § 2. Изометрически сопряженная система координат на модельной поверхности

Пусть  $S$  — достаточно гладкая поверхность, гауссова кривизна которой положительна всюду за исключением некоторой внутренней точки  $O$ , являющейся точкой уплощения. Спрашивается, существует ли изометрически сопряженные координаты на  $S_0 = S - O$ , т.е. на поверхности  $S$  без учета точки уплощения? Решение этого вопроса не является очевидным, оно не содержится в монографии И. Н. Векуа [11], поскольку очень важное ограничение на гауссову кривизну  $K \geq k_0 > 0$  (равномерная ограниченность снизу) не имеет места для  $S_0$ . В связи с этим возможность построения изометрически сопряженных координат на  $S_0$  требует доказательства.

В этом параграфе мы ограничиваемся рассмотрением поверхности специального вида, что позволит нам выписать упомянутые координаты в явной форме и обнаружить ту специфику, которая характерна при решении поставленного вопроса для поверхности с точкой уплощения.

1. Пусть  $0xyz$  — прямоугольная декартова система координат. Рассмотрим поверхности вращения

$$(2.1) \quad z = (x^2 + y^2)^{n/2}$$

в окрестности точки  $O(0, 0, 0)$ ; здесь  $n$  — любое действительное число,  $n > 2$ . Очевидно, что начало координат является точкой уплощения поверхности, а гауссова кривизна вокруг этой точки положительна.

Изометрически сопряженная система координат  $u, v$  на поверхности (2.1) задается формулами:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= xr^{\sqrt{n-1}-1}, \\ v &= yr^{\sqrt{n-1}-1}, \end{aligned} \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Действительно, подсчитаем в координатах  $x, y$  коэффициенты  $L, M, N$  второй квадратичной формы поверхности (2.1), см. например [22]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} L &= \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \equiv \frac{nr^{n-2} \left[ 1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2} \right]}{\sqrt{1+n^2r^{2n-2}}}, \\ M &= \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \equiv \frac{n(n-2)r^{n-4}xy}{\sqrt{1+n^2r^{2n-2}}}, \\ N &= \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \equiv \frac{nr^{n-2} \left[ 1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2} \right]}{\sqrt{1+n^2r^{2n-2}}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$\Pi = \frac{nr^{n-2}}{\sqrt{1+n^2r^{2n-2}}} \left\{ \left[ 1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2} \right] dx^2 + 2(n-2) \frac{xy}{r^2} dx dy + \left[ 1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2} \right] dy^2 \right\}.$$

Далее подсчитывая из формулы (2.2) сумму квадратов дифференциалов  $du$  и  $dv$ :

$$du^2 + dv^2 = r^{2\sqrt{n-1}-2} \left\{ \left[ 1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2} \right] dx^2 + 2(n-2) \frac{xy}{r^2} dx dy + \left[ 1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2} \right] dy^2 \right\}$$

и используя её для преобразования второй квадратичной формы, убеждаемся в том, что последняя в переменных  $u, v$  действительно имеет изометрический вид:

$$(2.4) \quad \Pi = \frac{n\varrho^{\frac{n}{\sqrt{n-1}}-2}}{\sqrt{1+n^2\varrho^{2\sqrt{n-1}}}} (du^2 + dv^2).$$

При получении этого выражения мы воспользовались обозначением  $\varrho^2 = u^2 + v^2$  и равенством

$$(2.5) \quad \varrho = r^{\sqrt{n-1}},$$

которое следует из формул (2.2).

В силу (2.4) коэффициенты  $L, M, N$  второй квадратичной формы поверхности (2.1) в координатах  $u, v$  определяются следующим образом

$$(2.6) \quad L(u, v) = N(u, v) = \frac{n\varrho^{\frac{n}{\sqrt{n-1}}-2}}{\sqrt{1+n^2\varrho^{2\sqrt{n-1}}}}; \quad M(u, v) = 0.$$

*Замечание.* Интересно отметить, что переход от координат  $x, y$  к изометрически сопряженным координатам  $u, v$  по формуле (2.2) имеет вид преобразования подобия с коэффициентом растяжения, равным  $r^{\sqrt{n-1}-1}$ .

2. Обратим внимание на специфику формулы (2.2). Якобиан преобразования от старых переменных  $x, y$  к новым переменным  $u, v$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = r^{2\sqrt{n-1}-2} \begin{vmatrix} 1 + \frac{x^2}{r^2} (\sqrt{n-1}-1), & (\sqrt{n-1}-1) \frac{xy}{r^2} \\ (\sqrt{n-1}-1) \frac{xy}{r^2}, & 1 + \frac{y^2}{r^2} (\sqrt{n-1}-1) \end{vmatrix} = \sqrt{n-1} r^{2\sqrt{n-1}-2}$$

обращается в нуль в точке уплощения ( $x = y = 0$ ), поскольку  $\sqrt{n-1}-1 > 0$  при  $n > 2$ . Несмотря на это формула (2.2) ставит в соответствие точке уплощения начало координат  $u = v = 0$  плоскости  $u, v$ , и наоборот.

Таким образом, на поверхности (2.1) удалось построить изометрически сопряженные координаты, причем с неизбежностью необходимо примириться с тем, что якобиан преобразования в точке уплощения равен нулю. Это значит, что исходная система координат  $x, y$  и вновь построенная  $u, v$  являются неравноправными. С этим фактом приходится считаться в дальнейшем.

3. Рассмотрим теперь задачу построения изометрически сопряженных координат на поверхности (2.1), исходя из уравнения Бельтрами, [11]:

$$(2.7) \quad \partial_z w - q(z) \partial_{\bar{z}} w = 0, \quad z \in D,$$

где

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \quad i^2 = -1,$$

$$\partial_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

и

$$(2.8) \quad q(z) = \frac{L - N + 2iM}{L + N + 2\sqrt{LN - M^2}}.$$

Как известно, существование изометрически сопряженных координат на поверхности эквивалентно существованию так называемых гомеоморфных решений  $w = w(z)$  уравнения (2.7). Такие решения устанавливают взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие области  $D$  плоскости  $z = x + iy$  на область  $\Delta$  плоскости  $w = u + iv$ .

Подставляя в (2.8) вместо  $L, M, N$  их выражения из (2.3), получим

$$q(z) = q_0 e^{2i\varphi},$$

где  $\varphi = \arg z$  и

$$q_0 = \frac{n-2}{n+2\sqrt{n-1}} < 1.$$

В любой области, не содержащей точки уплощения, коэффициент уравнения Бельтрами по модулю строго меньше единицы и является достаточно гладкой функцией. Этих условий достаточно, чтобы на соответствующей части поверхности построить изометрически сопряженную параметризацию.

Для уравнения

$$(2.9) \quad \partial_z w - q_0 e^{2i\varphi} \partial_{\bar{z}} w = 0$$

одно из его гомеоморфных решений задается формулами (2.2). В комплексной записи оно имеет вид

$$(2.10) \quad w = |z|^{\sqrt{n-1}} e^{i\varphi}$$

и остается гомеоморфизмом в области, содержащей точку уплощения. Однако, если мы рассмотрим уравнение (2.9) в этой области, то его коэффициент из-за наличия сомножителя  $e^{2i\varphi}$  имеет ограниченный разрыв при  $z = 0$ , т.е. в точке уплощения. В этом и проявляется одна из особенностей точки уплощения.

### § 3. Изометрически сопряженная система координат на общей поверхности

Рассмотрим теперь поверхность

$$(3.1) \quad z = (x^2 + y^2)^{n/2} \cdot f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Мы предполагаем, что для неё справедливы все те условия, которые сформулированы во введении к разделу 1.

Подсчитаем коэффициенты  $E, F, G$  и  $L, M, N$  первой и второй квадратичных форм поверхности:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} E &= 1 + (r^n f_x + n x r^{n-2} f)^2, \\ F &= (r^n f_x + n x r^{n-2} f)(r^n f_y + n y r^{n-2} f), \\ G &= 1 + (r^n f_y + n y r^{n-2} f)^2; \\ L &= \frac{r^{n-2}}{\sqrt{a}} \left\{ \left[ 1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2} \right] n f + 2 n x f_x + r^2 f_{xx} \right\}, \\ (3.3) \quad M &= \frac{r^{n-2}}{\sqrt{a}} \left\{ n(n-2) \frac{xy}{r^2} f + n(xf_y + yf_x) + r^2 f_{xy} \right\}, \\ N &= \frac{r^{n-2}}{\sqrt{a}} \left\{ \left[ 1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2} \right] n f + 2 n y f_y + r^2 f_{yy} \right\}. \end{aligned}$$

В формулах (3.3) использовано обозначение  $a = EG - F^2$ .

1. Перейдем к построению изометрически сопряженной параметризации  $u, v$  на поверхности (3.1). Отыскание таких координат сводится к доказательству существования гомеоморфных решений уравнений Бельтрами (2.7), коэффициент которого  $q(z)$  выражается по формуле (2.8). Подставляя в (2.8) выражения  $L, M, N$  из (3.3) получим

$$q(z) = \frac{n(n-2)fe^{2i\varphi} + 4nzf_z + 4r^2f_{z\bar{z}}}{n^2f + 2nrf_r + r^2(f_{xx} + f_{yy}) + 2n\sqrt{n-1}f\sqrt{1+\Pi}},$$

где  $\varphi = \arg z$ ;  $f_z$  и  $f_{z\bar{z}}$  — частные производные первого и второго порядков по  $\bar{z}$  и

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{n^2(n-1)f^2} \{ &2n^2rff_r + nff_{xx}[r^2 + (n-2)y^2] + nff_{yy}[r^2 + (n-2)x^2] + \\ &+ 2nr^2[yf_yf_{xx} + xf_xf_{yy}] + r^4(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) - n^2(xf_y + yf_x)^2 - \\ &- 2n(n-2)xyff_{xy} - 2nr^2(xf_y + yf_x)f_{xy} \}. \end{aligned}$$

Представим  $q(z)$  в следующем виде

$$(3.4) \quad q(z) = q_0 e^{2i\varphi} + q^*(z),$$

$$(3.5) \quad q_0 = \frac{n-2}{n+2\sqrt{n-1}} < 1.$$

Конкретный вид функции  $q^*(z)$  нам не понадобится в дальнейшем. Нам достаточно будет знать, что  $q^*(z) \in C^1$  при  $|z| > 0$  и  $q^*(z) = O(|z|)$ , когда  $z \rightarrow 0$ . Укажем также, что  $|q(z)| < 1$  для всех  $z \in \bar{D}$ . Справедливость этого неравенства при  $z = 0$  очевидно следует из (3.4), (3.5). Для всех остальных значений  $z$  оно также справедливо, поскольку поверхность (3.1) вне точки уплощения имеет положительную кривизну.

Итак, при изучении вопроса о существовании изометрически сопряженной параметризации на поверхности (3.1) мы имеем дело с уравнениями Бельтрами, коэффициент которого  $q(z)$  строго меньше единицы во всей области  $D$ , принадлежит классу  $C^1$  вне  $z = 0$ , а в точке  $z = 0$  имеет ограниченный разрыв, см. (3.4). Согласно Б. В. Боярскому [9] (его результат воспроизведен в монографии И. Н. Векуа [11]) гомеоморфные решения уравнения Бельтрами существуют для более широкого класса коэффициентов, а именно для ограниченных ( $|q| < 1$ ) и измеримых функций. Следовательно, вопрос о существовании изометрически сопряженных координат на поверхности (3.1) решен положительно.

В дальнейшем нам потребуется знать дополнительное асимптотическое поведение гомеоморфизма и его частных производных при  $z \rightarrow 0$ . Этим мы будем заниматься в следующем пункте.

2. Используем изометрически сопряженные координаты поверхности (2.1) в качестве промежуточных внутренних координат на поверхности (3.1). Условимся к тому же вместо прежних обозначений  $u, v$  ( $w = u + iv$ ) использовать  $\xi, \eta$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ). Тогда формула (2.10) запишется так

$$(3.6) \quad \zeta = |z|^{1/\sqrt{n-1}} e^{i\varphi}.$$

Обратимся к уравнению (2.7), в котором  $q(z)$  определена равенством (3.4). Производя в этом уравнении замену переменных по формуле (3.6), получим

$$(3.7) \quad \partial_\zeta w - G(\zeta) \cdot \partial_\zeta w = 0, \quad \zeta \in D_\zeta,$$

где  $D_\zeta$  — образ области  $D$  при отображении (3.6) и

$$G(\zeta) = \frac{q^*(z)}{1 - q_0^2 - q_0 q^*(z) e^{-2i\varphi}}.$$

С помощью (3.6), обратного к нему равенства

$$(3.8) \quad |z| = |\zeta|^{1/\sqrt{n-1}} e^{i\varphi}$$

и свойств функции  $q^*(\zeta)$  легко устанавливаются следующие свойства коэффициента  $G(\zeta)$ :  $G(\zeta) \in C^1$  вне  $\zeta = 0$  и  $G(\zeta) = O(|\zeta|^{1/\sqrt{n-1}})$ ,  $\zeta \rightarrow 0$ . Из последнего соотношения следует что  $|G(\zeta)| \leq G_0 < 1$  по крайней мере в некоторой окрестности точки  $\zeta = 0$ . Не ограничивая общности, будем считать это неравенство выполнимым для  $\zeta \in \bar{D}_\zeta$ .

Таким образом, в переменной  $\zeta$  мы пришли к тому случаю уравнения Бельтрами, который уже достаточно хорошо изучен. Основываясь на результатах И. Н. Векуа (см. [11], гл. 2 § 4), мы можем убедиться в том, что справедлива следующая

**Лемма 1.1.** Уравнение (3.7) имеет гомеоморфное решение класса  $C_\alpha^1$ ,  $\alpha = 1/\sqrt{n-1}$ , с помощью которого область  $D_\zeta$  отображается на круг  $|w| < R$ , при этом точке  $\zeta = 0$  соответствует  $w = 0$  и

$$(3.9) \quad \begin{aligned} w &= \zeta + O(|\zeta|^{1+1/\sqrt{n-1}}), \quad \partial_\zeta w = 1 + O(|\zeta|^{1/\sqrt{n-1}}), \\ \partial_{\bar{\zeta}} w &= O(|\zeta|^{1/\sqrt{n-1}}), \quad \zeta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3. Рассматривая теперь функцию  $w(\zeta(z))$ , где  $\zeta(z)$  задана равенством (3.6), а  $w(\zeta)$  взята из леммы 1.1, получим гомеоморфизм уравнения (2.7). Асимптотическое поведение гомеоморфизма и его частных производных при  $z \rightarrow 0$  уже нетрудно изучить, располагая явным видом зависимости  $\zeta$  от  $z$  и формулами (3.9). Поскольку этими результатами мы будем пользоваться в § 4, сформулируем их в виде отдельной леммы.

**Лемма 1.2.** *Уравнение Бельтрами*

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \partial_{\bar{z}} w - [q_0 e^{2i\varphi} + q^*(z)] \partial_z w &= 0, \quad z \in D, \\ q_0 &= \frac{n-2}{n+2\sqrt{n-1}}, \quad n > 2, \end{aligned}$$

имеет гомеоморфное решение  $w(z)$ , частные производные которого удовлетворяют вне  $z = 0$  условию Гельдера с показателем  $\alpha'$  сколь угодно близким к единице. Этим гомеоморфизмом область  $D$  отображается на круг  $|w| < R$ , при этом точке  $z = 0$  соответствует  $w = 0$  и

$$(3.11) \quad w = |z|^{\sqrt{n-1}} e^{i\varphi} + O(|z|^{\sqrt{n-1}+1}),$$

$$(3.12) \quad \partial_z w = \frac{\sqrt{n-1}+1}{2} |z|^{\sqrt{n-1}} + O(|z|^{\sqrt{n-1}+1/\sqrt{n-1}-1}), \quad z \rightarrow 0.$$

Обратная функция  $z = z(w)$  такова, что  $\partial_{\bar{w}} z$  и  $\partial_w z$  удовлетворяют условию Гельдера для  $|w| > 0$ ,

$$(3.13) \quad \partial_{\bar{w}} z + (q_0 e^{2i\varphi} + q^*(z)) \partial_w z = 0, \quad |w| < R,$$

и имеют место соотношения

$$(3.14) \quad z = |w|^{1/\sqrt{n-1}} e^{i\varphi} + O(|w|^{2/\sqrt{n-1}}),$$

$$(3.15) \quad \partial_w z = \frac{\sqrt{n-1}+1}{2\sqrt{n-1}} |w|^{1/\sqrt{n-1}-1} \cdot \{1 + O(|w|^{1/(n-1)})\}, \quad w \rightarrow 0.$$

Действительно, формулы (3.11), (3.12) следуют из (3.9) и (3.6), причем для вывода формулы (3.12) используется тождество

$$\partial_z w = \partial_\zeta w \cdot \partial_z \zeta + \partial_{\bar{\zeta}} w \cdot \partial_z \bar{\zeta}.$$

С помощью этого тождества и соответствующего тождества для  $\partial_{\bar{z}} w$  доказывается также, что  $\partial_z w$  и  $\partial_{\bar{z}} w$  удовлетворяют вне  $z = 0$  условию Гельдера с показателем, сколь угодно близким к единице.

Рассмотрим теперь обратную функцию  $z = z(w)$ . Разрешив относительно  $\zeta$  первое из соотношений (3.9), получим

$$(3.16) \quad \zeta = w + O(|w|^{1+1/\sqrt{n-1}}), \quad w \rightarrow 0.$$

Подставляя (3.16) в (3.8), получим (3.14).

Далее воспользуемся формулами

$$(3.17) \quad \partial_w z = \frac{1}{J} \overline{\partial_z w}, \quad \partial_{\bar{w}} z = -\frac{1}{J} \partial_{\bar{z}} w,$$

где  $J = |\partial_z w|^2 - |\partial_{\bar{z}} w|^2$  — якобиан преобразования  $w = w(z)$ . Из (3.17) с учетом (3.10) следует, что  $z(w)$  удовлетворяет уравнению (3.13).

Справедливость (3.15) устанавливается из первой формулы (3.17) следующей цепочкой тождеств, основанной на соотношениях (3.10) и (3.12):

$$\begin{aligned} \partial_w z &= \frac{\overline{\partial_z w}}{|\partial_z w|^2 - |\partial_{\bar{z}} w|^2} \equiv \frac{\overline{\partial_z w}}{(1 - |q_0 e^{2i\varphi} + q^*(z)|^2) \cdot |\partial_z w|^2} \equiv \\ &\equiv \frac{(\partial_z w)^{-1}}{1 - q_0^2 + O(|z|)} \equiv \frac{(\sqrt{n-1} + 1) |z|^{1-\sqrt{n-1}} \cdot [1 + O(|z|^{1/\sqrt{n-1}})]}{2\sqrt{n-1} \cdot [1 + O(|z|)]} \equiv \\ &\equiv \frac{\sqrt{n-1} + 1}{2\sqrt{n-1}} |z|^{1-\sqrt{n-1}} \cdot [1 + O(|z|^{1/\sqrt{n-1}})], \quad z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Если теперь заменить  $z$  через  $w$  по формуле (3.14), то получим (3.15).

На этом доказательство леммы 1.2 завершается.

*Замечание.* Если в формуле (3.1) положить  $f(x, y) \in C^m(\bar{D})$ ,  $m \geq 3$ , то гомеоморфизм  $w = w(z)$  уравнения (3.10) вне  $z = 0$  будет принадлежать классу  $C_a^{m-2}$ , где  $a$  — положительное число, сколь угодно близкое к единице. Это замечание является очевидным следствием высокой гладкости вспомогательного гомеоморфизма (3.6) вне  $z = 0$  и теоремы 2.12 из монографии И. Н. Векуа [11].

#### § 4. Уравнения бесконечно малых изгибаний общей поверхности

В этом параграфе будет доказано, что бесконечно малые изгибыния поверхности (3.1) описываются уравнением вида

$$(4.1) \quad \partial_{\bar{w}} U^* - \frac{b(w)}{2w} \overline{U^*} = 0,$$

где

$$(4.2) \quad U^*(w) = w^2 K^{1/4}(w) \cdot (\delta M + i\delta L),$$

$$(4.3) \quad b(0) = \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}.$$

Что касается поверхности (2.1), то для неё  $b(w) \equiv b(0)$ .

Наше доказательство основывается на уравнении (1.2). Нам, очевидно, необходимо изучить свойства коэффициента  $B(w)$  для поверхности (3.1). Для этой цели подсчитаем геометрические величины, участвующие в определении  $B(w)$  по формуле (1.3). Сначала проделаем это в старой системе

координат  $z = x + iy$ , затем применяя формулы преобразования геометрических величин при переходе от одних переменных к другим, получим их выражения в изометрически сопряженной параметризации  $w = u + iv$ .

1. Согласно формулам (3.2) имеем

$$(4.4) \quad \begin{aligned} a^-(z) &= E - G + 2iF \equiv \gamma^-(z), \\ a(z) &= EG - F^2 \equiv 1 + \gamma(z). \end{aligned}$$

Мы не приводим конкретного вида выражений для  $\gamma^-(z)$  и  $\gamma(z)$  по той причине, что они не пригодятся нам в дальнейшем. Нам будет достаточно знать, что  $\gamma^-(z), \gamma(z) \in C^2(\bar{D})$ , и  $\gamma^-(z), \gamma(z) = O(r^{2n-2}), z \rightarrow 0$ .

Нам понадобится также величина

$$(4.5) \quad a^+(z) = E + G \equiv 2 + \gamma^+(z),$$

где

$$\gamma^+(z) \in C^2(\bar{D}) \quad \text{и} \quad \gamma^+(z) = O(r^{2n-2}), \quad z \rightarrow 0.$$

Далее

$$(4.6) \quad \begin{aligned} K(z) &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \equiv \frac{r^{2n-4}}{a^2} \cdot \{n^2(n-1)f^2 + k(z)\}, \\ H(z) &= \frac{LG - 2MF + NE}{2a} \equiv \frac{r^{n-2}}{2a^{3/2}} \cdot \{n^2f + h(z)\}, \\ \frac{H(z)}{\sqrt{K(z)}} &\equiv \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \{1 + l(z)\}, \\ \mathcal{E}(z) &= H^2 - K \equiv \frac{n^2(n-2)^2}{4} r^{2n-4} f^2 \{1 + e(z)\}, \\ \frac{K(z)}{\mathcal{E}(z)} &\equiv \frac{4(n-1)}{(n-2)^2} \{1 + g(z)\}, \end{aligned}$$

где  $k(z), h(z), l(z), e(z), g(z) \in C^1(\bar{D})$  и при  $z = 0$  имеют нуль первого порядка.

2. Поскольку гауссова кривизна  $K$  и средняя кривизна  $H$  являются геометрическими скалярами, см. например [22], то их выражения в сопряженно изометрической системе координат  $w$  получаются из первых двух соотношений (4.6) по формулам  $K(w) = K[z(w)]$ ,  $H(w) = H[z(w)]$ . В частности, с учетом (3.14) имеем

$$(4.7) \quad K(w) = O(|w|^{2(n-2)/\sqrt{n-1}}), \quad w \rightarrow 0.$$

Иначе обстоит дело с величинами  $a(z)$ ,  $a^+(z)$  и  $a^-(z)$ . Их значения существенно зависят от выбора системы координат. Действительно, если  $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$  является уравнением поверхности  $S$  в векторной форме, то  $a^+(z) = 4(\partial_z \vec{r} \cdot \partial_{\bar{z}} \vec{r})$ ,  $a^-(z) = 4(\partial_z \vec{r})^2$ ;  $4a(z) = [a^+(z)]^2 - |a^-(z)|^2$ , см. [11], стр. 128, (6.55). На основе этих равенств получаем

$$(4.8) \quad \begin{aligned} a^-(w) &= \overline{a^-(z)} \cdot (\partial_w z)^2 + 2a^+(z) \cdot \partial_w z \cdot \overline{\partial_w z} + a^-(z) \overline{(\partial_w z)^2}, \\ a(w) &= a(z) \cdot \{|\partial_w z|^2 - |\partial_{\bar{w}} z|^2\}^2. \end{aligned}$$

Исходя из формулы (1.4), мы можем теперь установить свойства функции  $e^{i\psi(w)}$ . На основе (4.8), пятой из формул (4.6) и леммы 1.2 получим

$$(4.9) \quad e^{i\psi(w)} = -\frac{w}{\bar{w}} \cdot (1 + p(w)),$$

где  $p(w)$  при  $|w| > 0$  удовлетворяет условию Гельдера и  $p(w) = O(|w|^{1/\sqrt{n}-1})$ ,  $w \rightarrow 0$ . Совершенно очевидно, что  $|1 + p(w)| \equiv 1$ .

Изучим еще один сомножитель, входящий в формулу (1.3):

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{w}} \left( \operatorname{Arch} \frac{H}{\sqrt{K}} \right) &= \left( \operatorname{Arch} \frac{H}{\sqrt{K}} \right)_z \cdot \partial_w z + \left( \operatorname{Arch} \frac{H}{\sqrt{K}} \right)_z \partial_w z \equiv \\ &\equiv \left[ \left( \operatorname{Arch} \frac{H}{\sqrt{K}} \right)_z - (q_0 e^{2i\varphi} + q^*) \cdot \left( \operatorname{Arch} \frac{H}{\sqrt{K}} \right)_z \right] \cdot \partial_w z. \end{aligned}$$

Здесь мы будем использовать уравнение (3.13) для того, чтобы исключить  $\partial_w z$ . Подставив далее вместо  $H/\sqrt{K}$  её значение из третьей формулы (4.6) и применив лемму 1.2, получим, что

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \partial_{\bar{w}} \left( \operatorname{Arch} \frac{H}{\sqrt{K}} \right) &\in C \quad \text{для} \quad |w| > 0 \quad \text{и} \\ \partial_w \left( \operatorname{Arch} \frac{H}{\sqrt{K}} \right) &= O(|w|^{1/\sqrt{n}-1}), \quad w \rightarrow 0. \end{aligned}$$

И, наконец, изучим отношение  $\partial_w K/4K$ , которое также необходимо знать для определения  $B(w)$ :

$$\frac{\partial_w K}{4K} = \frac{1}{4K} [K_z \partial_w z + K_{\bar{z}} \partial_{\bar{w}} z] \equiv \frac{1}{4K} [K_z - (q_0 e^{-2i\varphi} + q^*) K_{\bar{z}}] \partial_w z.$$

Как и раньше, мы использовали (3.13). Непосредственное дифференцирование гауссовой кривизны  $K(z)$ , которая задана первой формулой (4.6), дает

$$\frac{K_z}{K} = \frac{n-2}{z} + k_1(z), \quad \frac{K_{\bar{z}}}{K} = \frac{n-2}{\bar{z}} + k_2(z),$$

где  $k_1(z), k_2(z) \in C(\bar{D})$ . Пользуясь этими равенствами и леммой 1.2, получим, что  $\partial_w K/4K \in C$  при  $|w| > 0$  и

$$(4.11) \quad \frac{1}{4K} \partial_w K = \frac{n-2}{4\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{w} + O(|w|^{-1/\sqrt{n}-1}), \quad w \rightarrow 0.$$

Теперь мы располагаем всем необходимым для описания свойств коэффициента  $B(w)$ . Поскольку в каждом слагаемом формулы (1.3) сомножители непрерывны при  $|w| > 0$ , непрерывным при  $|w| > 0$  будет и  $B(w)$ . Кроме того, с помощью формул (4.9), (4.10), (4.11) устанавливается поведение  $B(w)$  в точке  $w = 0$ :

$$B(w) = -\frac{n-2}{4\sqrt{n-1}} \left( \frac{w}{\bar{w}} \right)^2 \cdot \frac{1}{w} + O(|w|^{-\delta}), \quad w \rightarrow 0.$$

Для дальнейшего  $B(w)$  удобно писать в виде

$$(4.12) \quad B(w) = -\frac{1}{2} \left( \frac{w}{\bar{w}} \right)^2 \cdot \frac{\bar{b}(w)}{w},$$

где  $b(w)$  — непрерывная функция, удовлетворяющая в точке  $w = 0$  условию Гельдера с показателем  $1 - \delta$ ,  $\delta = \max(1/\sqrt{n-1}, 1-1/\sqrt{n-1})$  и  $b(0)$  определена равенством (4.3).

Подставив (4.12) в (1.2), получим

$$(4.13) \quad \partial_{\bar{w}} U - \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{w}}{w} \right)^2 \cdot \frac{b(w)}{\bar{w}} \cdot \bar{U} = 0.$$

Нам остается ввести искомую функцию  $U^*(w)$  по равенству (4.2), чтобы из уравнения (4.13) получить (4.1). Отметим, что  $U^*(w) = w^2 U(w)$  и что уравнение (4.1) задано в круге  $|w| < R$ , поскольку именно на эту область отображается поверхность  $S$ , с помощью изометрически сопряженных координат (см. лемму 1.2).

3. В отличие от предыдущего пункта, при исследовании  $B(w)$  для поверхности (2.1) уже недостаточно иметь только асимптотики геометрических величин, а необходимо получать их точные выражения. Опуская вычисления, мы приводим ниже формулы для величин, участвующих при подсчете  $B(w)$ :

$$(4.14) \quad \begin{aligned} a(w) &= \frac{1}{n-1} (1 + n^2 |w|^{2\sqrt{n-1}}) \cdot |w|^{4/\sqrt{n-1}-4}; \\ a^-(w) &= -\frac{n-2-n^2|w|^{2\sqrt{n-1}}}{n-1} \cdot |w|^{2/\sqrt{n-1}-4} \cdot w^2; \\ H(w) &= \frac{n^2(1+n|w|^{2\sqrt{n-1}}) \cdot |w|^{(n-2)/\sqrt{n-1}}}{2(1+n^2|w|^{2\sqrt{n-1}})^{3/2}}; \\ K(w) &= \frac{n^2(n-1) |w|^{2(n-2)/\sqrt{n-1}}}{(1+n^2|w|^{2\sqrt{n-1}})^2}; \\ e^{i\psi(w)} &= -\frac{w^2}{|w|^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в (1.3), мы вновь приходим к формуле (4.12) с той лишь особенностью, что  $b(w) \equiv b(0) = (n-2)/2\sqrt{n-1}$ .

4. Для того чтобы пользоваться в дальнейшем уже устоявшимся обозначениями теории обобщенных аналитических функций, условимся в следующем: сопряженно изометрические координаты впредь будем обозначать через  $z = x+iy$ , а искомую функцию через  $w(z)$ , вместо прежних обозначений  $w = u+iv$  и  $U^*(w)$ . И теперь уже в новых обозначениях подведем итоги настоящего параграфа.

Пусть  $S$  — односвязная поверхность положительной кривизны с изолированной точкой уплощения, заданная уравнением (3.1). Всякому бесконечно

малому изгибуанию этой поверхности, определяемому вариациями  $\delta L$ ,  $\delta M$ ,  $\delta N$  коэффициентов второй квадратичной формы, соответствует в изометрически сопряженных координатах комплекснозначная функция

$$(4.15) \quad w(z) = z^2 K^{1/4}(z) \cdot (\delta M + i\delta L),$$

непрерывно дифференцируемая вне  $z = 0$  и удовлетворяющая уравнению

$$(4.16) \quad \partial_{\bar{z}} w - \frac{b(z)}{2\bar{z}} \bar{w} = 0.$$

Коэффициент  $b(z)$  — непрерывен и удовлетворяет в точке  $z = 0$  условию Гельдера; при этом  $b(0)$  определен равенством (4.3).

Комплекснозначную функцию  $w(z)$  для поверхности (2.1) мы будем обозначать через  $\Phi(z)$ ; она удовлетворяет уравнению

$$(4.17) \quad \partial_{\bar{z}} \Phi - \frac{b(0)}{2\bar{z}} \bar{\Phi} = 0,$$

которое мы будем называть модельным уравнением (по отношению к (4.16)).

### § 5. Формулировка условий на деформацию края

Пусть  $S$  — поверхность положительной кривизны и  $z = x + iy$  изометрически сопряженная система координат на ней. Обозначим через  $k_s$  и  $\tau_s$  соответственно нормальную кривизну и геодезическое кручение некоторой кривой  $\mathcal{L}$  на поверхности. Согласно И. Н. Векуа (см. [11], гл. 5, § 7, формулы (7.50) и (7.26)) для вариаций этих величин имеем соотношения

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \delta k_s &= -\operatorname{Re} \left[ i \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 \cdot (\delta M + i\delta L) \right], \\ \delta \tau_s &= \operatorname{Re} \left[ i \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz}{dl} \cdot (\delta M + i\delta L) \right]. \end{aligned}$$

С учетом (4.15) формулы (5.1) приводятся к виду

$$(5.2) \quad \delta k_s = \operatorname{Re}(\gamma_1 w) \quad \text{и} \quad \delta \tau_s = \operatorname{Re}(\gamma_2 w),$$

где

$$\gamma_1 = -iz^{-2} \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 \cdot K^{-1/4}(z) \quad \text{и} \quad \gamma_2 = iz^{-2} \frac{dz}{dl} \cdot \frac{dz}{ds} K^{-1/4}(z).$$

В случае, если  $\mathcal{L}$  является граничной кривой поверхности (3.1), то приращения аргументов функций  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  при однократном обходе  $\mathcal{L}$  будут равны нулю.

В дальнейшем мы даем решение следующей задачи. Отыскать бесконечно малые изгибания поверхности (3.1), удовлетворяющие на её краю условиям

$$(5.3) \quad \lambda(s) \delta k_s + \mu(s) \delta \tau_s = h(s),$$

где  $\lambda(s)$ ,  $\mu(s)$ ,  $h(s)$  — заданные функции длины дуги.

В силу (5.2) краевое условие (5.3) эквивалентно соотношению

$$(5.4) \quad \operatorname{Re}(\bar{g}(z) \cdot w) = h(z) \quad \text{на} \quad |z| = R,$$

где  $g(z)$  и  $h(z)$  — заданные функции (черта над  $g(z)$  обозначает комплексное сопряжение).

Без ограничения общности вместо (5.4) будем рассматривать *краевое условие*

$$(5.5) \quad \operatorname{Re}(z^{-m}w) = h(z) \quad \text{на} \quad |z| = R,$$

где  $m$  — индекс функции  $g(z)$ . В этом случае, вообще говоря (подробно см. § 5 из раздела 3), условие (4.3) будет иметь место не для  $b(0)$ , а для  $|b(0)|$ :

$$(5.6) \quad |b(0)| = \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}.$$

Таким образом, упомянутая геометрическая задача сводится к нахождению решения  $w(z)$  уравнения (4.16) при условиях (5.5) и (5.6).

Для случая поверхности положительной кривизны ( $K \geq K_0 > 0$ ) аналитическая задача, соответствующая краевому условию (5.3), была подробно изучена в монографии И. Н. Векуа [11]. Её приложение к исследованию конечных изгибаний поверхности дано в работе Г. С. Бархина и В. Т. Фоменко [3]. Их результаты включают в себя частные случаи, изученные ранее И. Нитшем [26] и К. М. Беловым [4].

## РАЗДЕЛ 2

Настоящий раздел условно можно разбить на две части. В первой части (§§ 1–3) устанавливается ряд предложений относительно бесконечно малых изгибаний модельной поверхности. По своему содержанию эти предложения примыкают к исследованиям Н. В. Ефимова [13]–[17] и других авторов [12], [25], [30], [5], [48] посвященным локальной неизгибающей (жесткости) аналитических поверхностей в классе аналитических деформаций.

Во второй части (§§ 4–6) некоторые утверждения, справедливые для модельной поверхности, обобщаются на поверхности общего вида. Здесь же дается вспомогательный материал для раздела 3.

### § 1. Общее выражение бесконечно малых изгибаний модельной поверхности

1. Предположим, что в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  поверхность  $S$  определяется уравнением  $z = z(x, y)$ . Тогда, как известно [18], её бесконечно малые изгибаия описываются векторным полем  $\vec{\tau}$ , компоненты которого  $\xi, \eta, \zeta$  удовлетворяют системе уравнений:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \xi_x + z_x \zeta_x &= 0, & \eta_y + z_y \zeta_y &= 0, \\ \xi_y + \eta_x + z_x \zeta_y + z_y \zeta_x &= 0. \end{aligned}$$

Из (1.1) следует, что вертикальная компонента  $\zeta$  вектора  $\vec{\tau}$  удовлетворяет уравнению с частными производными второго порядка:

$$(1.2) \quad z_{xx}\zeta_{yy} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{yy}\zeta_{xx} = 0.$$

Если  $\zeta(x, y)$  будет найдено, то две другие компоненты  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  определяются из (1.1) путем квадратур, [27].

## 2. Рассмотрим поверхность

$$(1.3) \quad z = r^n \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

в окрестности точки  $O(0, 0, 0)$ . Здесь  $n$  — любое действительное число,  $n > 2$ . Уравнение (1.2) в применении к поверхности (1.3) имеет вид:

$$\left[1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2}\right] \zeta_{yy} - 2(n-2) \frac{xy}{r^2} \zeta_{xy} + \left[1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2}\right] \zeta_{xx} = 0.$$

Переходя к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , мы получим

$$(1.4) \quad r^2 \zeta_{rr} + (n-1)r\zeta_r + (n-1)\zeta_{\varphi\varphi} = 0.$$

Пусть  $U$  — круговая окрестность точки  $(0, 0)$ . Предполагая, что  $\zeta(x, y) \in C^2(U)$ , разложим  $\zeta(x, y)$  в ряд Фурье:

$$(1.5) \quad \zeta(x, y) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi.$$

По отношению к неизвестным коэффициентам Фурье  $A_0(r)$ ,  $A_k(r)$ ,  $B_k(r)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из (1.4) мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} rA_0'' + (n-1)A_0' &= 0, \\ r^2 A_k'' + (n-1)rA_k' - k^2(n-1)A_k &= 0, \\ r^2 B_k'' + (n-1)rB_k' - k^2(n-1)B_k &= 0, \end{aligned}$$

где штрихи над буквами обозначают дифференцирование по  $r$ . Интегрирование этой системы с учетом ограниченности  $A_0(r)$ ,  $A_k(r)$ ,  $B_k(r)$  в точке  $r = 0$  дает

$$(1.6) \quad A_0(r) = a_0, \quad A_k(r) = a_k r^{v_k}, \quad B_k(r) = b_k r^{v_k},$$

где  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  — произвольные постоянные и

$$(1.7) \quad v_k = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + k^2(n-1)} - \frac{n-2}{2}.$$

Рассматривая бесконечно малые изгибания с точностью до тривиальной составляющей, обеспечим нормировку  $\zeta(0, 0) = \zeta_x(0, 0) = \zeta_y(0, 0) = 0$ . Тогда тривиальные изгибания суть те и только те, для которых  $\zeta(x, y) \equiv 0$ .

Требования нормировки приводят к тому, что  $A_0 = A_1 = B_1 = 0$ . Если теперь подставить (1.6) в (1.5), то мы получим в окрестности точки  $(0, 0)$  многообразие всех решений уравнения (1.4) из класса регулярности  $C^2$ :

$$(1.8) \quad \zeta(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) r^k.$$

*Замечание.* При  $n = 2$ , когда уплощения нет,  $\nu_k = k$  и (1.8) дает аналитическую функцию.

## § 2. Поверхности вида $S_0$ и $S_1$

Условимся говорить, что бесконечно малое изгибание поверхности (1.3) принадлежит классу  $C^p$  или  $C^A$  (принадлежность к  $C^A$  обозначает аналитичность), если хотя бы только третья компонента  $\zeta = \zeta(x, y)$  принадлежит  $C^p$  или  $C^A$ .

1. **Теорема 2.1.** *Пусть  $p \geq 2$  — любое натуральное число. Тогда для любой поверхности (1.3) существует окрестность точки  $(0, 0)$  и нетривиальное бесконечно малое изгибание, которое в этой окрестности принадлежит классу  $C^p$ .*

Действительно, каждая гармоника ряда (1.8) определяет бесконечно малое изгибание поверхности  $S$ . Для тех значений  $k$ , для которых  $\nu_k > p$ , соответствующее изгибание принадлежит, очевидно, классу  $C^p$ .

2. Пусть  $k \geq 3$  — фиксированное целое число и  $N_k$  — конечное множество вещественных (рациональных) чисел  $n$  ( $n > 2$ ), которые определяются по формуле

$$(2.1) \quad n = 2 + 4q \cdot \frac{k+q}{k^2 - k - 2q} \quad (q = 1, 2, \dots, (k^2 - k)/2 - 1).$$

Пусть  $N = \bigcup_{k=3}^{\infty} N_k$ . Обозначая любую поверхность вида (1.3) буквой  $S$ , будем различать поверхности вида  $S_0$  и вида  $S_1$ , для которых соответственно  $n \in N$  и  $n \notin N$ .

**Теорема 2.2.** *Поверхности вида  $S_0$  неэластичны, а поверхности вида  $S_1$  локально эластичны в классе  $C^A$ .*

*Доказательство.* Предположим, что при некотором  $n$  поверхность вида (1.3) в окрестности точки  $(0, 0)$  допускает аналитическое изгибание

$$\zeta(x, y) = \sum_{m=2}^{\infty} \Phi^{(m)}(x, y),$$

где  $\Phi^{(m)}(x, y)$  — однородная форма степени  $m$  по  $x$  и  $y$ . Тогда ввиду специфики поверхности (1.3) каждая из этих форм есть решение уравнения (1.4) для поверхности (1.3). Рассмотрим одну из них и положим  $x = r \cos \varphi$  и  $y = r \sin \varphi$ . Мы получим

$$(2.2) \quad \Phi^{(m)}(x, y) = r^m f_m(\varphi),$$

где  $f_m(\varphi)$  — регулярная периодическая функция с периодом  $2\pi$ . Подставляя (2.2) в (1.4), получим

$$(2.3) \quad (n-1)f_m''(\varphi) + (m^2 - 2m + m \cdot n)f_m(\varphi) = 0.$$

Отсюда

$$m^2 - 2m + m \cdot n = k^2(n-1),$$

где  $k$  — целое число. В зависимости от изменения  $n$  ( $2 < n < \infty$ ) пределы изменения  $k$  будут такими:  $m < k^2 < m^2$ . И поскольку  $m \geq 2$ , то  $k \geq 3$ .

Определяя  $f_m(\varphi)$  из уравнения (2.3) и внося его выражение в (2.2), получим

$$\Phi^{(m)}(x, y) = r^m(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Из (2.4) находим:  $m = \nu_k$ , где  $\nu_k$  задана формулой (1.7). Следовательно  $\Phi^{(m)}(x, y)$  будет иметь вид

$$\Phi^{(m)}(x, y) = r^{\nu_k}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Таким образом, поверхность вида (1.3) допускает аналитическое бесконечно малое изгибание тогда и только тогда, когда хотя бы одна гармоника ряда (1.8) является аналитической функцией. Но для этого необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $k$  было

$$\nu_k = k + 2q,$$

где  $q$  — натуральное число. Тогда

$$r^{\nu_k}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = [a_k \operatorname{Re}(x+iy)^k + b_k \operatorname{Im}(x+iy)^k](x^2 + y^2)^q.$$

Далее, из формулы (1.7) следует:  $k < \nu_k < k^2$ . Тогда из (2.5) получим  $0 < q < \frac{1}{2}(k^2 - k)$ . С учетом этого после совместного решения (1.7) и (2.5) относительно  $n$  приходим к (2.1). Теорема 2.2 доказана.

### § 3. Свойства бесконечно малых изгибаний из класса регулярности $C^p$ поверхностей вида $S_1$

В этом параграфе будут доказаны следующие утверждения.

**Теорема 2.3.** Для поверхностей вида  $S_1$  бесконечно малое изгибание класса  $C^p$ ,  $p \geq 2$ , является малой величиной, характеризуемой соотношением

$$\zeta(x, y) = O(r^{\nu_{k_{n,p}}+1}), \quad r \rightarrow 0,$$

где

$$\nu_{k_{n,p}+1} = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2(k_{n,p}+1)^2(n-1)} - \frac{n-2}{2}$$

и  $k_{n,p}$  определяется из неравенства

$$(3.1) \quad \sqrt{\frac{p(p+n-2)}{n-1}} - 1 < k_{n,p} \leq \sqrt{\frac{p(p+n-2)}{n-1}}.$$

Эта теорема допускает не только асимптотическое, но и количественное (оценочное) выражение. Именно, справедлива

**Теорема 2.4.** Для поверхности вида  $S_1$  предположим, что  $\zeta(x, y) \in C^p$  и что на окружности  $r = R$  имеет место оценка  $|\zeta| \leq M$ . Тогда для любой точки  $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ ,  $r < R$ ,

$$(3.2) \quad |\zeta(x, y)| < \frac{4MR}{R-r} \left( \frac{r}{R} \right)^{\nu_{k_{n,p}}+1}.$$

**Теорема 2.5.** Поверхности вида  $S_1$  локально жестки в классе  $C^\infty$ .

1. *Доказательство* теоремы 2.3. Пусть поверхность относится к виду  $S_1$ . Тогда равенство (2.5) невозможно. В таком случае если  $\zeta(x, y) \in C^p$  ( $p \geq 2$ ), то в выражении (1.8)  $a_2 = b_2 = \dots = a_{k_{n,p}} = b_{k_{n,p}} = 0$ , где натуральное число  $k_{n,p}$  определяется неравенствами  $\nu_{k_{n,p}} \leq p < \nu_{k_{n,p}+1}$  (разрешая его относительно  $k_{n,p}$ , мы придем к (3.1)). Следовательно,  $\zeta = O(r^{\nu_{k_{n,p}}+1})$ ,  $r \rightarrow 0$ .

*Замечание.* При выполнении условий теоремы 2.3 очевидно, что  $\zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy} = O(r^{\nu_{k_{n,p}}+1-2})$ ,  $r \rightarrow 0$ . Этим фактом мы воспользуемся в дальнейшем.

2. *Доказательство* теоремы 2.4. Из соотношения (1.8) следует, что

$$R^{v_k} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\zeta]_{r=R} \cos k\varphi d\varphi, \quad R^{v_k} \cdot b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\zeta]_{r=R} \sin k\varphi d\varphi.$$

При условиях теоремы 2.4 получаем оценки

$$|a_k|, |b_k| < \frac{2M}{R^{v_k}}.$$

Отсюда и вследствие того, что  $\zeta(x, y) \in C^p$ , из равенства (1.8) имеем

$$(3.3) \quad |\zeta(x, y)| < 4M \left( \frac{r}{R} \right)^{\nu_{k_{n,p}}+1} \cdot \sum_{k_{n,p}+1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^{\nu_k - \nu_{k_{n,p}}+1}.$$

Из (3.3) с учетом неравенства

$$\nu_{k+q} - \nu_k \geq q$$

получаем оценку (3.2).

3. *Доказательство* теоремы 2.5. Для круговой окрестности точки  $(0, 0)$  имеем  $\zeta = 0$  вследствие  $\zeta \in C^\infty$  и теоремы 2.3 (или теоремы 2.4). Но тогда  $\zeta \equiv 0$  в любой окрестности точки  $(0, 0)$ , так как ввиду эллиптического характера задачи вне точки  $(0, 0)$  функция  $\zeta(x, y)$  аналитична во всех точках  $(x, y) \neq (0, 0)$ , [6].

#### § 4. Свойство малости деформаций из класса $C^p$ общей поверхности

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  поверхность, заданную уравнением

$$(4.1) \quad z = r^n f(x, y), \quad n > 2,$$

где  $f(x, y)$  — достаточно гладкая функция в области  $D$ , для которой точка  $(0, 0)$ , является внутренней, причем  $f(0, 0) \neq 0$ . Предположим также, что поверхность (4.1) вне точки  $(0, 0)$  имеет положительную кривизну.

Так же как и в § 2, обозначая любую поверхность вида (4.1) буквой  $S$ , будем различать поверхности вида  $S_0$  и вида  $S_1$ , если соответственно  $n \in N$  и  $n \notin N$ . Важно отметить, что это разбиение осуществляется независимо от  $f(x, y)$ .

В настоящем параграфе для поверхностей вида  $S_1$  мы обобщаем тот результат, который высказан в замечании к теореме 2.3. Именно справедлива

**Теорема 2.6.** Для поверхностей вида  $S_1$  любое бесконечно малое изгибание класса  $C^p$ ,  $p \geq 2$ , удовлетворяет соотношению

$$(4.2) \quad \zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy} = O(r^{p-2}), \quad r \rightarrow 0.$$

*Доказательство.* Для поверхности (4.1) уравнение (1.2) принимает вид:

$$(4.3) \quad \left[ 1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2} + 2x \frac{f_x}{f} + r^2 \frac{f_{xx}}{nf} \right] \zeta_{yy} - 2 \left[ (n-2) \frac{xy}{r^2} + \frac{xf_y + yf_x}{f} + r^2 \frac{f_{xy}}{nf} \right] \zeta_{xy} + \left[ 1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2} + 2y \frac{f_y}{f} + r^2 \frac{f_{yy}}{nf} \right] \zeta_{xx} = 0.$$

Поскольку  $\zeta(x, y) \in C^p$ , то мы можем в окрестности точки  $(0, 0)$  разложить  $\zeta(x, y)$  в отрезок ряда Тейлора с остаточным членом, [47]:

$$(4.4) \quad \zeta(x, y) = \zeta(0, 0) + \frac{\partial \zeta(0, 0)}{\partial x} x + \frac{\partial \zeta(0, 0)}{\partial y} y + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \left( \frac{\partial^{p-1} \zeta(0, 0)}{\partial x^{p-1}} x^{p-1} + \dots + \frac{\partial^{p-1} \zeta(0, 0)}{\partial y^{p-1}} y^{p-1} \right) + R(x, y),$$

где  $R(x, y) \in C^p$  и  $R(0, 0) = 0$ . Легко видеть, что

$$(4.5) \quad R_{xx}, R_{xy}, R_{yy} = O(r^{p-2}), \quad r \rightarrow 0.$$

Для удобства запишем (4.4) в форме

$$(4.6) \quad \zeta(x, y) = \sum_{k=0}^{p-1} \Phi^{(k)}(x, y) + R(x, y),$$

где

$$\Phi^{(k)}(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^k \frac{\partial^k \zeta(0, 0)}{\partial x^s \partial y^{k-s}} x^s y^{k-s}.$$

Докажем, что  $\Phi^{(k)}(x, y) \equiv 0$ ,  $k = 2, \dots, p-1$ . Тогда из (4.5) и (4.6) будет следовать (4.2).

Подставив (4.6) в (4.3), получим

$$(4.7) \quad \left[ 1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2} \right] \Phi_{yy}^{(2)} - 2(n-2) \frac{xy}{r^2} \cdot \Phi_{xy}^{(2)} + \left[ 1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2} \right] \Phi_{xx}^{(2)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ 2x \frac{f_x}{f} + r^2 \frac{f_{xx}}{nf} \right] \Phi_{yy}^{(2)} - 2 \left[ \frac{xf_y + yf_x}{f} + r^2 \frac{f_{xy}}{nf} \right] \Phi_{xy}^{(2)} + \left[ 2y \frac{f_y}{f} + r^2 \frac{f_{yy}}{nf} \right] \Phi_{xx}^{(2)} + \\
& + \left[ 1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2} + 2x \frac{f_x}{f} + r^2 \frac{f_{xx}}{nf} \right] \cdot \left( \sum_{k=3}^{p-1} \Phi_{yy}^{(k)} + R_{yy} \right) - \\
& - 2 \left[ (n-2) \frac{xy}{r^2} + \frac{xf_y + yf_x}{f} + r^2 \frac{f_{xy}}{nf} \right] \cdot \left( \sum_{k=3}^{p-1} \Phi_{xy}^{(k)} + R_{xy} \right) + \\
& + \left[ 1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2} + 2y \frac{f_y}{f} + r^2 \frac{f_{yy}}{nf} \right] \cdot \left( \sum_{k=3}^{p-1} \Phi_{xx}^{(k)} + R_{xx} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Первые три слагаемых этого уравнения, с одной стороны, и все прочие слагаемые, с другой стороны, имеют различные порядки малости при  $r \rightarrow 0$ . Поэтому, если мы от прямоугольных координат  $x, y$  перейдем к полярным координатам  $r, \varphi$  и затем совершим предельный переход при  $r \rightarrow 0$ , то получим

$$\left[ 1 + (n-2) \frac{x^2}{r^2} \right] \Phi_{yy}^{(2)} - 2(n-2) \frac{xy}{r^2} \Phi_{xy}^{(2)} + \left[ 1 + (n-2) \frac{y^2}{r^2} \right] \Phi_{xx}^{(2)} = 0.$$

Однако это уравнение в силу теоремы 2.5 имеет только тривиальное решение:  $\Phi^{(2)} \equiv 0$ .

Полагая в (4.7)  $\Phi^{(2)} \equiv 0$ , мы можем вновь полученному уравнению придать прежнюю форму с той лишь разницей, что вместо  $\Phi^{(2)}$  будет фигурировать  $\Phi^{(3)}$ , а суммирование под знаками суммы будет начинаться с  $k = 4$ . Повторяя те же самые рассуждения, что и раньше, получим  $\Phi^{(3)} \equiv 0$ . И далее аналогично  $\Phi^{(k)}(x, y) \equiv 0$ ,  $k = 4, \dots, p-1$ . Теорема 2.6 доказана.

*Замечание.* В дальнейшем мы воспользуемся довольно очевидным утверждением, в определенном смысле обратным к теореме 2.6. Именно, пусть  $\zeta(x, y) \in C^p$ ,  $p > 3$ , вне точки  $(0, 0)$ , причем в самой этой точке  $\zeta$  дважды непрерывно дифференцируема. Тогда из условия (4.2) легко следует, что  $\zeta(x, y) \in C^p$  также и в точке  $(0, 0)$ .

### § 5. Выражение вариаций $\delta L$ , $\delta M$ , $\delta N$ коэффициентов второй квадратичной формы поверхности через компоненту изгибающегося поля

Предположим, что  $\tilde{\tau} = (\xi, \eta, \zeta)$  — поле бесконечно малых изгибаний поверхности  $S$ , заданной уравнением  $z = z(x, y)$ . В настоящем параграфе для вариаций  $\delta L$ ,  $\delta M$ ,  $\delta N$  коэффициентов второй квадратичной формы этой поверхности мы устанавливаем формулы

$$(5.1) \quad \delta L = \zeta_{xx} \sqrt{a}, \quad \delta M = \zeta_{xy} \sqrt{a}, \quad \delta N = \zeta_{yy} \sqrt{a},$$

где  $a$  — дискриминант первой квадратичной формы  $S$ .

Обозначая для удобства через  $\pi_{11}$ ,  $\pi_{12}$ ,  $\pi_{22}$  соответственно коэффициенты  $L$ ,  $M$ ,  $N$  второй квадратичной формы, мы будем иметь [22]:

$$(5.2) \quad \pi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{a}} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{ij}), \quad i, j = 1, 2,$$

где  $\vec{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор поверхности  $S$ , а индексами 1 и 2 обозначено дифференцирование по  $x$  и  $y$ .

Учитывая, что по определению  $\vec{\tau} = \delta\vec{r}$ , из (5.2) получим

$$(5.3) \quad \delta\pi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{a}} [(\vec{\tau}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{ij}) + (\vec{r}_1, \vec{\tau}_2, \vec{r}_{ij}) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{\tau}_{ij})].$$

Раскроем смешанные произведения

$$(\vec{\tau}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{ij}) = \xi_x z_{ij}, \quad (\vec{r}_1, \vec{\tau}_2, \vec{r}_{ij}) = \eta_y z_{ij}, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{\tau}_{ij}) = \zeta_{ij} - z_x \xi_{ij} - z_y \eta_{ij}.$$

После чего (5.3) преобразуется к виду

$$(5.4) \quad \delta\pi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{a}} [\zeta_{ij} + (\xi_x + \eta_y) z_{ij} - z_x \xi_{ij} - z_y \eta_{ij}].$$

Нам остается из системы (1.1) выразить  $\xi_x$ ,  $\eta_y$ ,  $\xi_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  через  $\zeta(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \xi_x + \eta_y &= -z_x \zeta_x - z_y \zeta_y, \\ \xi_{xx} &= -z_{xx} \zeta_x - z_x \zeta_{xx}, \quad \eta_{xx} = -z_{xx} \zeta_y - z_y \zeta_{xx}, \\ \xi_{xy} &= -z_{xy} \zeta_x - z_x \zeta_{xy}, \quad \eta_{xy} = -z_{xy} \zeta_y - z_y \zeta_{xy}, \\ \xi_{yy} &= -z_{yy} \zeta_x - z_x \zeta_{yy}, \quad \eta_{yy} = -z_{yy} \zeta_y - z_y \zeta_{yy}. \end{aligned}$$

Преобразуя (5.4) с помощью этих выражений, мы придем к (5.1).

*Замечание.* Поскольку  $z_{xx} = L\sqrt{a}$ ,  $z_{xy} = M\sqrt{a}$ ,  $z_{yy} = N\sqrt{a}$ , то с учетом формул (5.1) уравнение (1.2) может быть переписано в виде

$$L\delta M - 2M\delta M + N\delta L = 0.$$

Полученное соотношение — ничто иное, как условие обращения в нуль вариации гауссовой кривизны при бесконечно малых изгибаниях поверхности.

## § 6. Определение классов деформаций общей поверхности в изометрически сопряженных координатах

В разделе 1 для изучения бесконечно малых изгибаний поверхности мы ввели в качестве искомых функций вариации её коэффициентов второй квадратичной формы. Для того чтобы установить связь с исследованиями разделов 1–3 в настоящем параграфе мы формулируем в декартовых координатах классы регулярности изгибающего поля и затем определяем, каким требованиям должны подчиняться вариации  $\delta L$ ,  $\delta M$ ,  $\delta N$  в изометрически сопряженных координатах.

1. Пусть  $(x, y)$  и  $(u, v)$  — две различные системы координат на поверхности. Нам необходимо различать вариации коэффициентов второй квадра-

тичной формы в координатах  $(x, y)$  и  $(u, v)$ . Обозначим их соответственно  $\delta L(x, y)$ ,  $\delta M(x, y)$ ,  $\delta N(x, y)$  и  $\delta L(u, v)$ ,  $\delta M(u, v)$ ,  $\delta N(u, v)$ . Поскольку эти вариации являются компонентами ковариантного тензора 2-ой валентности, см. [22], то связь между ними задается формулами:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \delta L(u, v) &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \delta L(x, y) + 2 \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \delta M(x, y) + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \delta N(x, y), \\ \delta M(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \delta L(x, y) + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \delta M(x, y) + \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \delta N(x, y), \\ \delta N(u, v) &= \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \delta L(x, y) + 2 \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \delta M(x, y) + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \delta N(x, y). \end{aligned}$$

Если же поменять местами  $u \leftrightarrow x$  и  $v \leftrightarrow y$ , то мы получим обратные соотношения. Все эти соотношения помогают определить класс деформаций в одних переменных по условиям на класс деформаций, сформулированным в других переменных. В дальнейшем рассматриваются только поверхности вида  $S_1$ .

2. Применим формулы (6.1) к модельной поверхности (1.3). В качестве  $(u, v)$  будем рассматривать изометрически сопряженные координаты, которые задаются формулами (2.2) из раздела 1. Подсчитывая из этих формул частные производные и подставляя в (6.1), получим

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \delta L(u, v) &= \varrho^{2/\sqrt{n-1}-2} \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 1 \right) \frac{u^2}{\varrho^2} \right\} \delta L(x, y) + \right. \\ &\quad + 2 \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 1 \right) \frac{u^2}{\varrho^2} \right\} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 1 \right) \frac{uv}{\varrho^2} \cdot \delta M(x, y) + \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 1 \right)^2 \cdot \frac{u^2v^2}{\varrho^4} \cdot \delta N(x, y) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\varrho^2 = u^2 + v^2$ . Две другие формулы мы приводить не будем, поскольку они аналогичны (6.2) и дают аналогичные свойства для  $\delta M(u, v)$  и  $\delta N(u, v)$ . Если теперь воспользоваться равенствами (5.1), где  $a(x, y) = 1 + n^2 r^{2n-4}$ , то из (6.2) получим

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \delta L(u, v) &= \varrho^{2/\sqrt{n-1}-2} \sqrt{1 + n^2 \varrho^{2/\sqrt{n-1}}} \cdot \left[ \left( 1 + c \frac{u^2}{\varrho^2} \right)^2 \zeta_{xx} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( 1 + c \frac{u^2}{\varrho^2} \right) c \cdot \frac{uv}{\varrho^2} \cdot \zeta_{xy} + c^2 \cdot \frac{u^2v^2}{\varrho^4} \cdot \zeta_{yy} \right]. \end{aligned}$$

В этой формуле мы заменили  $r$  через  $\varrho$  по равенству  $\varrho = r^{\sqrt{n-1}}$  и применили обозначение  $c = 1/\sqrt{n-1} - 1$ .

Предположим, что  $\zeta(x, y) \in C^p$ ,  $p \geq 3$ . В силу теоремы С. Н. Бернштейна [6] изгибающее поле  $\zeta(x, y)$  поверхности (1.3) вне точки уплощения будет принадлежать классу  $C^4$ . Очевидно, что этому же классу, но только в пере-

менных  $u, v$  будут принадлежать  $\delta L(u, v), \delta M(u, v), \delta N(u, v)$  вне  $(0, 0)$ . Что касается требований на эти вариации в точке уплощения, то они вытекают из (6.3) с учетом теоремы 4.3

$$(6.4) \quad \delta L(u, v), \delta M(u, v), \delta N(u, v) = O(\varrho^{r_{\alpha, p+1}/\sqrt{n-1}-2}), \quad \varrho \rightarrow 0.$$

3. Теперь аналогично предыдущему пункту выясним условия, которым должны подчиняться  $\delta L(u, v), \delta M(u, v), \delta N(u, v)$  для поверхности (4.1). В качестве  $(u, v)$  будем рассматривать изометрически сопряженные координаты, которые построены в § 3 из раздела 1.

Предположим, что  $f(x, y) \in C^m(D)$ , причем  $m > \max(3, n)$ . Кроме того пусть  $\zeta(x, y) \in C^p(D)$ ,  $3 \leq p < m$ . Тогда в силу теоремы А. В. Погорелова [27] изгибающее поле  $\zeta(x, y)$  поверхности (4.1) вне точки уплощения будет принадлежать классу  $C_\alpha^{m-1}$ , где  $\alpha$  — показатель условия Гельдера, сколь угодно близкий к единице. Из формул (5.1) следует  $\delta L(x, y), \delta M(x, y), \delta N(x, y) \in C_\alpha^{m-3}$ . Если теперь воспользоваться замечанием к лемме 1.2 из раздела 1, то из (6.1) получим:  $\delta L(u, v), \delta M(u, v), \delta N(u, v) \in C_\alpha^{m-3}$  вне точки  $(0, 0)$ . Нам осталось изучить свойства этих вариаций в точке уплощения. Из (6.1) с учетом соотношений (4.2), (5.1) и леммы 1.2 из раздела 1 имеем

$$(6.5) \quad \delta L(u, v), \delta M(u, v), \delta N(u, v) = O(\varrho^{p/\sqrt{n-1}-2}), \quad \varrho \rightarrow 0.$$

4. Для описания бесконечно малых изгибаний поверхности (4.1) в разделе 1 с помощью формулы (4.15) введена комплекснозначная функция  $w(z)$ :

$$(6.6) \quad w(z) = z^2 K^{1/4}(z) \cdot (\delta M(z) + i \delta L(z))$$

(для перехода к привычным обозначениям здесь мы вновь изометрически сопряженные координаты обозначили через  $(x, y)$ ,  $z = x + iy$ ).

Поскольку  $K(z) \in C_\alpha^{m-3}$  при  $|z| > 0$  и  $K(z) = O(|z|^{2(n-2)/\sqrt{n-1}})$ ,  $z \rightarrow 0$ , (см. (4.7) из раздела 1), то на основе предыдущего пункта  $w(z) \in C_\alpha^{m-3}$  вне точки  $z = 0$  и

$$(6.7) \quad w(z) = O(|z|^{(n-2+2p)/2\sqrt{n-1}}), \quad z \rightarrow 0.$$

Если, в свою очередь, для поверхности вида  $S_1$  имеет место (6.7) и  $w(z) \in C_\alpha^{m-3}$  вне  $z = 0$ , то, как легко видеть, вертикальная компонента  $\zeta$  изгибающего поля должна удовлетворять (4.2), а потому, в силу замечания к теореме 2.6,  $\zeta$  будет принадлежать классу  $C^p$  в точке уплощения.

### РАЗДЕЛ 3

#### § 1. Основные результаты по теории решений обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной точкой

Как доказано в § 4 раздела 1, изучение бесконечно малых изгибаний общей поверхности положительной кривизны с точкой уплощения приводит к необходимости исследования системы:

$$(1.1) \quad \partial_{\bar{z}} w - \frac{b(z)}{2\bar{z}} \bar{w} = 0, \quad z \in G,$$

где  $G$  — многосвязная область комплексной плоскости  $z$ , содержащая внутри точку  $z = 0$  и ограниченная конечным числом простых замкнутых контуров  $\Gamma$  Ляпунова,  $b(0) \neq 0$ . Решения  $w(z)$  рассматриваются из класса функций, непрерывных в  $G + \Gamma$  и непрерывно дифференцируемых по  $z$  в области  $G$  за исключением начала координат. Этот класс обозначается через  $C(G + \Gamma) \cap C_z(G - 0)$ .

Из-за наличия особенности первого порядка в коэффициенте уравнения (1.1) теория обобщенных аналитических функций оказывается не применимой в данном случае и возникает необходимость построения специального аналитического аппарата.

Исследование (1.1) осуществляется в тесной связи с модельным уравнением

$$(1.2) \quad \partial_{\bar{z}} \Phi - \frac{b(0)}{2\bar{z}} \bar{\Phi} = 0, \quad z \in G.$$

Доказано, что между множествами непрерывных в области  $G$  решений уравнений (1.1) и (1.2) устанавливается взаимно однозначное соответствие посредством интегрального уравнения

$$(1.3) \quad w(z) = \Phi(z) + P_G \bar{w}, \quad z \in G,$$

где

$$P_G \bar{w} = S_G \left( \frac{b(z) - b(0)}{2\bar{z}} w(z) \right)$$

и

$$S_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left[ \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\bar{\zeta}} \bar{f}(\zeta) \right] d\xi d\eta,$$

а ядра  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  представляются в явном виде с помощью рядов (ввиду громоздкости их выражений они здесь не приводятся). Устанавливается, что оператор  $S_G$  вполне непрерывен из  $L_p(G + \Gamma)$ ,  $p > 2$ , в  $C(G + \Gamma)$ , а  $P_G$  вполне непрерывен из  $C(G + \Gamma)$  в  $C(G + \Gamma)$ .

Благодаря (1.3) изучение какого-либо вопроса для уравнения (1.1) редуцируется к аналогичному вопросу для уравнения (1.2). Именно таким путем обнаруживается совпадение общих картин асимптотического поведения в окрестности точки  $z = 0$  непрерывных решений уравнений (1.1) и (1.2). В частности, имеет место

**Лемма.** *Если непрерывное решение  $w(z)$  уравнения (1.1) имеет при  $z = 0$  нуль бесконечного порядка, то  $w(z) \neq 0$ .*

На основе (1.3) получены решения краевых задач Римана–Гильберта и линейного сопряжения. Приведем формулировку и окончательные результаты по решению задачи Римана–Гильберта.

**ЗАДАЧА.** Требуется отыскать функцию  $w(z) \in C(G + \Gamma) \cap C_z(G - 0)$ , удовлетворяющую в области  $G$  уравнению (1.1), и на границе  $\Gamma$  краевому условию

$$(1.4) \quad \operatorname{Re}[\overline{g(z)} \cdot w] = h(z).$$

Предполагается, что  $g(z)$  и  $h(z)$  — заданные функции из класса Гельдера  $C_\nu(\Gamma)$ ,  $0 < \nu \leq 1$ ,  $|g(z)| \neq 0$  на  $\Gamma$ .

Доказана

**Теорема 3.1.** Пусть  $\operatorname{Ind}_\Gamma g(z) \equiv 0$ . Тогда для  $b(0) > 0$  или  $\operatorname{Im} b(0) \neq 0$ , решение краевой задачи существует и единствено. Для  $b(0) < 0$  однородная задача ( $h = 0$ ) имеет точно одно нетривиальное решение, а для существования решения неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения одного условия разрешимости на  $h(z)$ .

Пусть  $m = \operatorname{Ind}_\Gamma g(z) > 0$ . Тогда однородная задача ( $h = 0$ ) имеет  $2m$  линейно независимых решений, а неоднородная разрешима при любых  $h(z)$ .

Пусть  $m = \operatorname{Ind}_\Gamma g(z) < 0$ . Тогда однородная задача имеет только нулевое решение, а для существования решений неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы  $h(z)$  удовлетворяла  $2|m|$  вещественным условиям.

Отметим, что теория решений модельной системы (1.2) строится на основе обобщенной интегральной формулы Коши:

$$(1.5) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} \Phi(\zeta) d\zeta - \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\zeta} \overline{\Phi(\zeta)} d\bar{\zeta}$$

и обобщенного интеграла типа Коши (последний получается из (1.5), если в правой части вместо  $\Phi(\zeta)$  писать  $\nu(\zeta)$ ).

## § 2. Изучение влияния точки уплощения на бесконечно малые изгибания поверхности

Влияние точки уплощения на бесконечно малые изгибания обнаруживается только на поверхностях вида  $S_1$ , см. определение из § 4 раздела 2. Поэтому в дальнейшем только они являются объектами исследования.

Как показано в § 6 раздела 2, принадлежность изгибающего поля классу регулярности  $C^p(D)$  приводит к дополнительному условию на комплекснозначную искомую функцию в точке уплощения, именно

$$(2.1) \quad w(z) = O(|z|^{(n-2+2p)/2\sqrt{n-1}}), \quad z \rightarrow 0.$$

В частности, если речь идет о поверхности вида  $S_1$  для которой  $f(x, y) \in C^\infty$  (будем обозначать её через  $S_1^\infty$ ) и бесконечно малые изгибания рассматриваются из класса  $C^\infty$ , то в силу (2.1)  $w(z)$  должна иметь в точке  $z = 0$  нуль бесконечного порядка. Но тогда  $w(z) \equiv 0$  в силу леммы предыдущего параграфа, потому утверждение теоремы 2.5, справедливое для модельных поверхностей, распространяется на более обширный класс поверхностей.

**Теорема 3.2.** *Поверхности вида  $S_1^{(\infty)}$  локально жестки в классе  $C^{(\infty)}$ .*

На основе аналитических результатов предыдущего параграфа получено решение геометрической задачи о нахождении бесконечно малых изгибаний односвязной поверхности вида  $S_1$  с заданием вдоль края линейной комбинации вариаций нормальной кривизны и геодезического кручения

$$(2.2) \quad \lambda(s) \delta k_s + \mu(s) \delta \tau_s = h(s).$$

Это условие равносильно заданию вдоль края вполне определенной линейной комбинации из вариаций коэффициентов 2-ой квадратичной формы  $\delta L$ ,  $\delta M$ ,  $\delta N$ . Если принять во внимание соотношения (5.1) из раздела 2, то (2.2) будет отвечать также заданию линейной комбинации вторых производных от вертикальной компоненты  $\zeta(x, y)$  вектора изгибающего поля.

Введем в рассмотрение комплекснозначную функцию  $g = \lambda\bar{\gamma}_1 + \mu\bar{\gamma}_2$  ( $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  определены соответствующими формулами из § 5 раздела 2). Обозначим через  $m$  — деленное на  $2\pi$  приращение аргумента функции  $g$  при однократном обходе граничной кривой. Будем предполагать, что в уравнении поверхности  $S_1$

$$z = r^n f(x, y), \quad n > 2,$$

$f(x, y) \in C^q(D)$ , где  $f(0, 0) > 0$  и  $q$  — достаточно большое целое число, причем  $q > \max(3, n)$ , а изгибающие поля поверхности  $S_1$  принадлежат классу  $C^p(D)$ ,  $3 \leq p < q$ .

Приведем итоговую теорему по разрешимости геометрической задачи с условием (2.2). Она является следствием теоремы 3.1 из § 1 с учетом дополнительного требования (2.1) на поведение функции  $w(z)$  в точке уплощения.

**Теорема 3.3.** *Пусть  $m > k_{n,p}$ . Тогда любая поверхность вида  $S_1$  допускает  $2(m - k_{n,p}) - 1$  — параметрическое семейство бесконечно малых изгибаний, удовлетворяющих краевому условию (2.2).*

*Пусть  $m \leq k_{n,p}$ . Поверхность  $S_1$  является жесткой, если её деформации на краю подчинены однородному условию (2.2) ( $h(s) = 0$ ) и имеет единственное бесконечно малое изгибание, если  $h(s) \neq 0$  удовлетворяет  $2(k_{n,p} - m) + 1$  вещественным условиям.*

Рассмотрим число  $k_{n,p}$ , которое фигурирует в теореме 3.3 и определено неравенствами (3.1) из § 3 раздела 2. Возьмем конкретную поверхность вида  $S_1$  ( $n$  — фиксировано) и рассмотрим её деформации из различных классов регулярности. Из определения и теоремы 3.3 очевидно следует, что повышение требования к гладкости изгибающего поля (т.е.  $p \rightarrow \infty$ ) приводит к возрастанию числа ограничений ( $k_{n,p} \rightarrow \infty$ ), налагаемых на существование бесконечно малых изгибаний поверхности вида  $S_1$ .

Итак, в общих чертах влияние точки уплощения проявляется в том, что её наличие повышает сопротивляемость поверхности бесконечно малым изгибаниям, усиливает её жесткость.

**§ 3. Поверхности положительной кривизны с более общкой структурой в окрестности своей изолированной точки уплощения**

Предложенный в разделе 1 способ исследования бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны со специальной структурой в окрестности точки уплощения путем описания деформаций через решения обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой может быть использован и в более общем случае. Действительно, пусть в прямоугольной декартовой системе координат поверхность  $S$  задана уравнением

$$(3.1) \quad z_1 = r_1^n f(\varphi) + h(x_1, y_1), \quad (x_1, y_1) \in D,$$

где  $n > 2$ ,  $x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\varphi}$ ,  $f(\varphi)$  — бесконечно дифференцируемая периодическая (с периодом  $2\pi$ ) функция,  $h(x_1, y_1)$  — достаточно регулярная функция, для которой  $h(x_1, y_1) = O(r_1^{n+\alpha})$ ,  $r_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha > 0$ , а частные производные первого и второго порядка имеют при  $r_1 = 0$  нули соответственно порядков  $n+\alpha-1$  и  $n+\alpha-2$ . Кроме того предполагается, что поверхность в  $\bar{D} - (0, 0)$  имеет положительную гауссову кривизну.

На такой поверхности существует изометрически сопряженная параметризация  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ , в которой точке уплощения соответствует начало координат  $z = 0$ . Как и раньше, по формуле (6.6) из раздела 2 бесконечно малым изгибаниям сопоставляется искомая функция  $w(z)$ . Доказывается, что

$$(3.2) \quad \partial_z w - \frac{b(z)}{2z} w = 0, \quad z \in G,$$

где  $z = 0 \in G$ ,  $b(z) \in C(G - 0)$  и

$$(3.3) \quad b(z) = \frac{1}{\kappa} \beta(\varphi) + O(|z|^\gamma), \quad z \rightarrow 0.$$

Здесь  $\beta(\varphi)$  — комплекснозначная функция, которая явным образом выражается через  $f(\varphi)$  и её производные,

$$\kappa = 2\pi n(n-1) : \int_0^{2\pi} \sqrt{-(n-1)^2 f'^2 + n(n-1) f f'' + n^2(n-1) f^2} \frac{d\varphi}{f(\varphi)}$$

и  $\gamma > 0$  — вполне определенное число.

Вполне понятно, что асимптотическое поведение (3.3) коэффициента  $b(z)$  в окрестности точки  $z = 0$  является более сложным, чем это имело место прежде. В частном случае, когда в равенстве (3.3)

$$\frac{1}{\kappa} \beta(\varphi) \equiv \beta_m e^{im\varphi},$$

где  $\beta_m$  — произвольное комплексное и  $m$  — целое число, соответствующий аналитический аппарат для исследования уравнения (3.2) построен в работе [31].

Однако в других, даже простейших частных случаях (к примеру, когда или

$$\frac{1}{\kappa} \beta(\varphi) = \beta_0 + \beta_1 e^{i\varphi}$$

или

$$\frac{1}{\kappa} \beta(\varphi) = \beta_{-k} e^{-ik\varphi} + \beta_k e^{ik\varphi}$$

и т.п.) в настоящее время отсутствуют какие-либо результаты по теории уравнения (3.2), не говоря уж об общем случае.

В заключение укажем, что основные материалы разделов 1–3 опубликованы в работах [20], [31]–[46].

### Литература

- [1] А. Д. Александров, *Об одном классе замкнутых поверхностей*, Матем. сб. 4 (46) (1938), 69–77.
- [2] —, *Геометрия и топология в Советском Союзе*, ИУМН 2, 5 (21) (1947).
- [3] Г. С. Бархин и В. Т. Фоменко, *Об изгибании поверхностей положительной кривизны с краем*, Сиб. матем. ж. 4 (1) (1963), 32–47.
- [4] К. М. Белов, *Об однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем*, ДАН СССР 127 (2) (1959), 239–241.
- [5] Р. Я. Берри, *Об одном целочисленном инварианте бинарных форм четвертой степени*, УМН 7, 3 (49) (1952), 125–130.
- [6] С. Н. Бернштейн, *Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка эллиптического типа*, Собрание сочинений, т. 3, 1960, 24–110.
- [7] В. Бляшке, *Дифференциальная геометрия*, ОНТИ, 1935.
- [8] —, *Die Starrheit der Eiflächen*, Math. Z. 9 (1921).
- [9] Б. В. Боярский, *Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений 1-го порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами*, Матем. сб. 43 (85) (1957), 451–503.
- [10] Б. В. Боярский и И. Н. Векуа, *Доказательство жесткости кусочно регулярных замкнутых выпуклых поверхностей неотрицательной кривизны*, ИАН СССР, сер. матем. 22 (2) (1958), 165–176.
- [11] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, Москва 1959.
- [12] А. Г. Дорфман, *Решение уравнения изгибания для некоторых классов поверхностей*, УМН 12, 2 (74) (1957), 147–150.
- [13] Н. В. Ефимов, *Изгибание окрестности параболической точки поверхности*, Матем. сб. 6 (48) (1939), 427–474.
- [14] —, *Доказательство существования поверхности, неизгибающейся в малом*, ДАН СССР 27 (1940), 314–317.
- [15] —, *Исследование изгибания поверхности с точкой уплощения*, Матем. сб. 19 (61) (1946), 416–488.
- [16] —, *Качественные вопросы теории деформаций поверхности в малом*, Тр. Матем. ин-та АН СССР 30 (1949), 1–128.
- [17] —, *О жесткости в малом*, ДАН СССР 60 (5) (1948).
- [18] —, *Качественные вопросы теории деформации поверхностей*, УМН 3, 2 (24) (1948), 47–158.

- [20] Н. В. Ефимов и З. Д. Усманов, *Бесконечно малые изгибиания поверхности с точкой уплощения*, ДАН СССР 208 (1) (1973).
- [21] В. Ф. Каган, *Основы теории поверхностей*, ч. 2, ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
- [22] —, *Основы теории поверхностей*, ч. I, ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
- [23] [Г. Либман] H. Liebmann, *Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung*, Sitzber. der Bayerische Ak. d. Wiss. ("Münchener Berichten"), 1919, 267–291.
- [24] —, *Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen*, ibid., 1920, 21–48.
- [25] З. Г. Макарова, *Исследование целочисленного инварианта  $N$  бинарных форм степени  $n > 4$* , Матем. сб. 33 (75) (1953), 233–240.
- [26] [Й. Нитше] J. Nitsche, *Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem*, Arch. Math. I. 4 (4) (1953), 331–334; II. 6 (1) (1954), 13–14; III. 6 (2) (1955), 144–150.
- [27] А. В. Погорелов, *Бесконечно малые изгибиания выпуклых поверхностей*, Изд. Харьк. ун-та, Харьков, 1959.
- [28] [Э. Рембс] E. Rembs, *Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen*, Math. Z. 36 (1932).
- [29] —, *Unverbiegbare offene Flächen*, Sitzber. d. Preuss. Ak. d. Wiss., 1930, 123–133.
- [30] В. А. Тартаковский, *Об  $N$ -инвариантах Н. В. Ефимова из теории изгибиания поверхностей*, Матем. сб. 32 (74) (1953), 225–248.
- [31] З. Д. Усманов, *Исследование обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой*, Изв. АН Тадж. ССР 1 (43) (1972), 3–6.
- [32] —, *Исследование модельной обобщенной системы Коши–Римана с сингулярными коэффициентами*, ibid. 11 (11) (1968), 6–10.
- [33] —, *О бесконечно малых изгибианиях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения*, Матем. сб. 83 (125) (12) (1970), 596–615.
- [34] —, *Интегральное уравнение для одного класса обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой*, Докл. АН Тадж. ССР 14 (10) (1971), 12–15.
- [35] —, *Краевая задача для обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой*, ДАН СССР 197 (2) (1971).
- [36] —, *Задача Дирихле для обобщенной системы Коши–Римана в сингулярном случае*, Докл. АН Тадж. ССР 14 (11) (1971), 16–20.
- [37] —, *Задача Римана–Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой*, II, Изв. АН Тадж. ССР 3 (41) (1971), 10–14.
- [38] —, *Задача Римана–Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой*, I, Докл. АН Тадж. ССР 15 (4) (1972), 10–13.
- [39] —, *К теории уравнения  $2\bar{z}\partial_z\varphi - \lambda\bar{\varphi} = 0$* , ibid. 15 (5) (1972), 13–16.
- [40] —, *К задаче сопряжения обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой*, 15 (6) (1972), 13–17.
- [41] —, *К вопросу о деформации поверхности с точкой уплощения*, Матем. сб. 89 (131), 1 (9), 61–82.
- [42] —, *Эффективное решение одного двумерного интегрального уравнения с однородным ядром и его приложения*, Дифференциальные уравнения 8 (12) (1972).
- [43] —, *Об одном классе обобщенных систем Коши–Римана с сингулярной точкой*, Сибирский матем. ж. 14 (5) (1973), 1076–1087.
- [44] —, *Исследование уравнений теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения*, Труды семинара прикладной математики Тбилисского университета, аннотации докладов 8 (1973), 85–87.
- [45] —, *Структура нулей обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой*, Изв. АН Тадж. ССР 3 (53), (1974), 7–10.

- [46] З. Д. Усманов, *К вопросу о жесткости в малом в классе  $C^\infty$* , Мат. заметки 22 (5) (1977), 643–648.
- [47] Г. М. Фихтенгольц, *Основы математического анализа, т. I*, Госиздат техн. теор. литературы, Москва 1955.
- [48] [Р. И. Хесли] R. I. Hoesli, *Spezielle Flächen mit Flächpunkten*, Compositio Math. 8 (2) (1950).
- [49] [Г. Шильт] H. Schilt, *Über die Isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze*, ibid. 5 (1937).

*Presented to the Semester  
Differential Geometry  
(September 17–December 15, 1979)*

---