ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XI, 2 (1970)

E. NEUMAN (Wrocław)

OPTIMAL QUADRATURES FOR A CERTAIN CLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS

Let the function $f(z)$ belong to Hardy's space H_2, i. e. let $f(z)$ be analytic inside the circle $|z| < 1$ and continuous on $|z| = 1$. Let us assume that $f(z)$ is real for real values of the argument. If $-1 < a < b < 1$, then

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \tag{1}$$

is an error in the quadrature formula with abscissae x_i ($a \leqslant x_i \leqslant b$) and weights a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Obviously, $E(f)$ is a linear functional. Wilf [3] proved the inequality

$$|E(f)| \leqslant \sqrt{W}\,\|f\|, \tag{2}$$

where

$$W = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^j\right)^2, \tag{3}$$

$$\|f\| \leqslant \max_{|z|=1} |f(z)|. \tag{4}$$

In the paper [3] the interval $[a, b] = [0, 1]$ was considered. In Hardy's space H_2 the problem of quadratures with remainders of the minimum norm was considered by Valentin [2] and Yanagihara [4]. The above papers, quoted in [1], are not available to the author. If we consider the case of a_i and x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) running over a compact region in the Euclidean $2n$-space then W attains its minimum in this region. In order to calculate this minimum, we set

$$\frac{\partial W}{\partial a_i} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

The above conditions give (see [3], eqs. (9), (10))

$$\frac{1}{x_l}\log\frac{1-ax_l}{1-bx_l} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-x_l x_i}, \tag{5}$$

$$\frac{b-a}{x_l(1-ax_l)(1-bx_l)} - \frac{1}{x_l^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i}{(1-x_l x_i)^2} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

THEOREM. *Optimal quadratures giving a minimum value of W are exact for all rational functions $P(x)/Q(x)$ where the degree of the numerator is smaller than that of the denominator. The zeros of the denominator are double at most and equal to some of the numbers $1/x_l$.*

Proof. Since

$$\int_a^b \frac{dx}{1-xx_l} = \frac{1}{x_l} \log \frac{1-ax_l}{1-bx_l}$$

therefrom we get (in virtue of eq. (5))

$$\int_a^b \frac{dx}{1-xx_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-x_l x_i} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Putting (5) into (6) we obtain

$$\frac{b-a}{(1-ax_l)(1-bx_l)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1-x_l x_i)^2}.$$

On the other hand

$$\int_a^b \frac{dx}{(1-xx_l)^2} = \frac{b-a}{(1-ax_l)(1-bx_l)},$$

then, finally,

$$\int_a^b \frac{dx}{(1-xx_l)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{(1-x_i x_l)^2} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Equations (7) and (8) form the thesis of our theorem.

References

[1] R. E. Barnhill, J. A. Wixom, *Quadratures with remainders of minimum norm*, II, Math. of Comput. 21 (1967), pp. 382-387.

[2] R. A. Valentin, *Applications of functional analysis to optimal numerical approximation for analytic functions*, Ph. D. thesis, Brown University, Providence, R. I., 1965.

[3] H. S. Wilf. *Exactness conditions in numerical quadrature*, Number. Math. 6 (1964), pp. 315-319.

[4] H. Yanagihara, *A new method of numerical integration of Gaussian type*, Bull. Fukuoka Gakugei Univ., 3 (1956), pp. 19-25.

UNIVERSITY OF WROCŁAW
DEPT. OF APPLIED MATHEMATICS

Received on 28. 3. 1968

E. NEUMAN (Wrocław)

OPTYMALNE KWADRATURY DLA PEWNEJ KLASY FUNKCJI ANALITYCZNYCH

STRESZCZENIE

W pracy rozważa się kwadratury optymalne w sensie minimum wartości bezwzględnej reszty (1) wzoru numerycznego całkowania funkcji $f(z)$ analitycznej w kole $|z| < 1$ i ciągłej na jego brzegu ($f(z)$ przyjmuje wartości rzeczywiste dla argumentów rzeczywistych). Wilf [3] podał oszacowanie (2), gdzie W i $\|f\|$ są określone wzorami (3) i (4).

Udowodniono, że kwadratura optymalna, tj. minimizująca W, jest dokładna dla wszystkich funkcji wymiernych $P(x)/Q(x)$, w których stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika, a zera mianownika są co najwyżej podwójne i równe liczbom $1/x_l$ (wszystkim lub niektórym).

Э. НЕЙМАН (Вроцлав)

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРЫ В ОДНОМ КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрены квадратуры, оптимальные в смысле минимума абсолютной величины остатка (1) формулы численного интегрирования функции $f(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$, непрерывной при $|z| = 1$ и вещественной для вещественных аргументов. Вильф [3] доказал оценку (2), где W и $\|f\|$ определены формулами (3) и (4).

Доказано, что оптимальная квадратура, т. е. квадратура минимизирующая W, точна для всех рациональных функций $P(x)/Q(x)$, в которых степень числителя меньше степени знаменателя и в которых знаменатель имеет нули не более чем двойные и равные числам $1/x_l$ (всем или некоторым из них).
