

JOANNA HUK (Wrocław)

O NUMERYCZNYM OBLICZANIU ROZKŁADU LICZBY JEDNOSTEK W SYSTEMIE $M/M/1$

1. Wstęp. Zgodnie z symboliką D. G. Kendalla symbol $M/M/1$ oznacza jednokanałowy system obsługi masowej z poissonowskim strumieniem zgłoszeń o stałej intensywności λ i wykładniczym rozkładem czasu obsługi z parametrem μ .

Niech $N(t)$ oznacza liczbę jednostek znajdujących się w systemie w chwili t (łącznie z jednostką znajdującą się w kanale obsługi). $N(t)$ jest procesem Markowa o przeliczalnej liczbie stanów. Prawdopodobieństwa stanów spełniają nieskończony układ równań różniczkowych (p. np. Saaty [7], str. 88)

$$(1) \quad \begin{aligned} P'_0(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P'_k(t) &= \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + \mu)P_k(t) + \mu P_{k+1}(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Układ równań (1) można rozwiązać jednoznacznie zakładając, że znany jest rozkład $\{P_k(0)\}$ stanów systemu w chwili początkowej $t = 0$. Wprowadzając funkcję tworzącą

$$P(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k$$

rozkładu $\{P_k(t)\}$, układ (1) możemy sprowadzić do jednego równania różniczkowego

$$(2) \quad z \frac{\partial P(z, t)}{\partial t} = (1 - z)[(\mu - \lambda z)P(z, t) - \mu P_0(t)].$$

Warunkiem początkowym dla równania (2) będzie funkcja $P(z, 0)$. Przyjmijmy najprostszy warunek

$$(3) \quad P(z, 0) = z^i$$

równoważny założeniu, że $N(0) = i$ z prawdopodobieństwem 1. Przy takim warunku początkowym rozwiązaniem równania (2) (p. [7], str. 93) jest

$$(4) \quad P_k(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \left[\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^{i-k} I_{k-i}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^{i-k+1} I_{k-i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \sum_{n=k+i+2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^n I_n(2\sqrt{\lambda\mu}t) \right] \quad (k = 0, 1, \dots),$$

gdzie

$$I_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2i+k}}{i!(i+k)!}$$

jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu k .

Jeśli $\rho = \lambda/\mu < 1$, to w (4) można przejść do granicy przy $t \rightarrow \infty$, co daje rozkład graniczny postaci

$$(5) \quad p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \rho^k (1 - \rho) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Z (5) widzimy, że przy t dążącym do nieskończoności rozkład prawdopodobieństw stanów systemu dąży do rozkładu geometrycznego niezależnie od stanu początkowego w chwili $t = 0$. Łatwo sprawdzić, że funkcje stałe

$$(6) \quad p_k(t) = \rho^k (1 - \rho) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

spełniają układ równań (1). Jeśli więc przyjmiemy graniczny rozkład (5) jako warunek początkowy w układzie (1), to otrzymamy jako rozwiązanie stałe prawdopodobieństwa (6) i proces stochastyczny $N(t)$ będzie stacjonarny. O systemie obsługi będziemy wtedy mówili, że *pracuje w warunkach stacjonarnych*.

Wobec zbieżności (5), dla systemu, w którym $\rho = \lambda/\mu < 1$, można przyjąć rozkład graniczny jako przybliżony rozkład prawdopodobieństw stanów w chwilach odległych od chwili początkowej. Dla momentów bliskich zera musimy uwzględnić zależność rozkładu prawdopodobieństw od czasu. Tu jednak, przy korzystaniu z wzoru (4), występują istotne trudności natury rachunkowej.

W niniejszej pracy przedyskutujemy dwie metody przybliżonego obliczania tych prawdopodobieństw, a także podzielimy się pewnymi spostrzeżeniami o szybkości zbieżności rozkładu $\{P_k(t)\}$ do rozkładu granicznego.

2. Metoda bezpośrednia. Metoda ta wykorzystuje do obliczeń numerycznych wzór (4). Dla ustalonych parametrów λ , μ i dla dowolnej chwili $t = T$ pozwala ona wyznaczyć rozkład $\{P_k(T)\}$ bez wyznaczania rozkładów w chwilach wcześniejszych $t < T$.

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że w chwili początkowej system jest pusty, a więc podstawimy $i = 0$ w warunku początkowym (3) i we wzorze (4).

Aby wykorzystać wzór (4) do numerycznych obliczeń, musimy zastąpić występującą tam sumę szeregu nieskończonego pewną sumą skończoną

$$\sum_{n=k+2}^M \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^n I_n(2\sqrt{\lambda\mu}t),$$

gdzie M jest dostatecznie dużą liczbą naturalną, taką że błąd spowodowany obcięciem sumy nieskończonej jest mały. Ważnym zagadnieniem jest oszacowanie tego błędu dla ustalonego M , bowiem razem z błędem przybliżonego obliczania wartości funkcji Bessela wyznacza on błąd bezpośredniej metody obliczania prawdopodobieństw $P_k(t)$. Takiego oszacowania błędu, dobrego dla szerokiego zakresu wartości parametrów $\lambda > 0$, $\mu > 0$ i $0 < t < \infty$, nie udało się znaleźć. Wydaje się jednak, że opisane tu postępowanie wyznacza rozkłady prawdopodobieństw z dokładnością wystarczającą w praktyce.

Zajmiemy się najpierw obliczaniem wartości zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego rodzaju. Ponieważ będą nam potrzebne wartości funkcji $I_k(x)$ dla $k = 0, 1, \dots, M$, wygodnie będzie obliczać je rekurencyjną metodą Millera [5].

W metodzie tej dla ustalonego x i dla dużej liczby naturalnej L tworzymy ciąg

$$(7) \quad I_k^*(x) = I_{k+2}^*(x) + \frac{2(k+1)}{x} I_{k+1}^*(x) \quad (k = L-1, L-2, \dots, 0)$$

przyjmując, że $I_{L+1}^*(x) = 0$ i $I_L^*(x) = 1$. Następnie obliczamy przybliżone wartości funkcji Bessela $I_k(x)$ ze wzoru

$$(8) \quad I_k(x) = I_k^*(x)/K(x) \quad (k = 0, 1, \dots, L),$$

gdzie czynnik $K(x)$ można wyznaczyć [1] z warunku

$$1 = I_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(x).$$

Stąd mamy w przybliżeniu

$$(9) \quad K(x) = I_0^*(x) + 2 \sum_{k=1}^L (-1)^k I_{2k}^*(x).$$

Opisane postępowanie będziemy stosowali do obliczania wartości funkcji $I_k(x)$ dla małych argumentów x . Dla dużych argumentów x wartości funkcji $I_k(x)$ będziemy obliczali z wzoru

$$(10) \quad I_k(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} R_k(x),$$

gdzie

$$(11) \quad R_k(x) \approx 1 - \frac{4n^2 - 1}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3)}{2!(8x)^2} - \dots$$

(p. [3], str. 3).

Wartości funkcji pomocniczych $R_k(x)$ dla $k \in [0, 20]$ można znaleźć w tablicach Foxa [3]. Dla naszych celów ten zakres parametru k nie jest wystarczający, więc opierając się na informacji Foxa, zawartych we wstępie do cytowanych tablic, wartości funkcji $R_k(x)$ będziemy obliczali z wzoru

$$(12) \quad R_k(x) = I_k^*(x)/B(x) \quad (k = 0, 1, \dots, L),$$

gdzie czynnik $B(x)$ wyznaczmy z wzoru (12) obliczając jedną z wartości $R_k(x)$, np. $R_0(x)$, z wzoru (11).

Przy obliczaniu $I_k^*(x)$ liczba naturalna L nie może być zbyt mała. Jeśli weźmiemy L za małe, to otrzymamy wartości funkcji Bessela z dużymi błędami. W praktyce liczba L nie może też być zbyt duża, bo grozi to powstaniem nadmiaru w obliczeniach na maszynie cyfrowej, a dokładności nie można nieograniczenie poprawiać ze względu na kumulację błędu maszynowego.

W praktyce wybieramy pewne liczby naturalne L_0 i H i obliczenia powtarzamy dla wartości L_j tworzących postęp arytmetyczny $L_j = L_0 + (j-1)H$ ($j = 1, 2, \dots$), tj. dla każdego j obliczamy wartości funkcji $I_k^j(x)$ ($k = 0, 1, \dots, L_j$).

Gdyby ostatecznym celem rachunku było wyznaczenie wartości zmodyfikowanych funkcji Bessela, należałoby się teraz zastanowić, dla jakiego $j = s$ przerwiemy postępowanie przyjmując ostatecznie, że

$$I_k(x) = I_k^s(x).$$

Ponieważ jednak szukamy rozkładu prawdopodobieństw (4), więc równocześnie z ciągiem $I_k^j(x)$ przybliżeń wartości funkcji Bessela tworzymy ciąg przybliżeń

$$(13) \quad P_k^j(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \left[\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^{-k} I_k^j(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^{-k+1} I_{k+1}^j(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \sum_{n=k+2}^{L_j} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right)^n I_n^j(2\sqrt{\lambda\mu}t) \right] \quad (j = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots).$$

Niech

$$F_t^j(y) = \sum_{k=0}^{[y]} P_k^j(t)$$

oznacza ciąg przybliżeń dystrybuant stanu systemu $N(t)$. Jako odległość dwu sąsiednich rozkładów z ciągu (13) przyjmijmy wielkość

$$(14) \quad d_j = \max_{0 \leq y < L_0} |F_t^j(y) - F_t^{j-1}(y)|,$$

gdzie ze względu na to, że funkcje $F_t^j(y)$ są przedziałami stałe, maximum wystarczy szukać w skończonym zbiorze liczb całkowitych.

Jeśli dla pewnego s jest $d_s < \varepsilon$ (gdzie $\varepsilon > 0$ jest z góry daną liczbą), to przyjmujemy, że odpowiedni rozkład $\{P_k^s(t)\}$ jest już dostatecznie bliski szukanego rozkładu $\{P_k(t)\}$ i zadowolimy się w praktyce uzyskanym przybliżeniem.

Wprowadzona definicja odległości dwu sąsiednich rozkładów z ciągu (13) ma tę wadę, że wymaga sporo dodatkowych obliczeń. Spróbujemy więc zastąpić ją inną definicją.

Ponieważ wartości funkcji $I_k(x)$ przy ustalonym x maleją wraz ze wzrostem k (p. [6]), łatwo jest wykazać, że gdy $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda/\mu < 1$, to dla ustalonego $t = T$ jest $P_k(T) > P_{k+1}(T)$. Pozwala to przypuszczać, że prostsza do obliczania odległość

$$(15) \quad D_j = |P_0^j(t) - P_0^{j-1}(t)|$$

różni się mało od odległości d_j (patrz tablica 1).

TABLICA 1. Odległości d_j i D_j zdefiniowane wzorami (14) i (15) dla różnych wartości parametrów λ , μ , T oraz $H = 20$.

Nr przy- kładu	λ	μ	T	ε	L_0	s	$d_s \cdot 10^8$	$D_s \cdot 10^8$
1	1	5	0,3	0,00001	20	1	42	34
2	1	5	0,4	0,00001	20	1	595	476
3	1	5	0,5	0,00001	20	2	nadmiar zmiennoprzecinkowy	
4	1	5	2	0,0001	40	1	1	1
5	1	5	3	0,0001	40	1	3781	3025
6	1	5	5	0,0001	40	2	22	17
7	2	5	3	0,0001	40	1	691	414
8	3	5	3	0,0001	40	1	121	48
9	4	5	3	0,0001	40	2	21	4

Opisany algorytm wyznaczania rozkładu prawdopodobieństw nie jest skomplikowany, a więc napisanie programu na maszynie cyfrową jest sprawą prostą. Pewne trudności może natomiast sprawić ustalenie war-

tości parametrów L_0 , H i ε . Trudno podać tu konkretny przepis na wybór wartości tych parametrów. Spróbujemy jedynie sformułować pewne wnioski na podstawie próbných obliczeń (przeprowadzonych na maszynie cyfrowej Elliott 803).

W naszej praktyce stosowaliśmy następującą zasadę wyboru H : dla małych argumentów $x = 2\sqrt{\lambda\mu}T$ przyjmujemy $H \in [10, 20]$ a dla dużych⁽¹⁾ argumentów przyjmujemy $H \in [20, 40]$. Uwagi dotyczące wyboru L_0 i ε poprzedzimy przykładem.

W celu wyznaczenia rozkładu prawdopodobieństw dla $\lambda = 2$, $\mu = 5$ i $T = 9$ wybraliśmy następujące wartości parametrów: $L_0 = 40$, $H = 20$ i $\varepsilon = 0,2$. Dla tych wartości parametrów już odległość $D_1 = 0,195$ spełnia nierówność $|D_1| < \varepsilon$. W otrzymanym rozkładzie prawdopodobieństw $P_0(9) = 0,5989$ i wartość ta jest mniejsza od $p_0 = 0,6$ z rozkładu granicznego (5), co wskazuje na to, że prawdopodobieństwa $P_k(9)$ są obciążone dużymi błędami. Jak łatwo bowiem wykazać, przy przyjętym warunku początkowym $P_0(0) = 1$ dla każdego t i $h > 0$ jest $P_0(t+h) < P_0(t)$.

Żeby poprawić dokładność obliczenia tego rozkładu, zmniejszymy wartość parametru ε , biorąc $\varepsilon = 0,001$. Ponieważ mamy tu $D_1 = 0,1948$, $D_2 = 0,0012$ i $D_3 = 0,000\ 000\ 06$, więc dalsza poprawa dokładności rozkładu przy ustalonych L_0 i H nastąpi wtedy, gdy weźmiemy $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-8}$.

Załóżmy, że zadowala nas dokładność rozkładu, który otrzymaliśmy dla $L_0 = 40$, $H = 20$ i $\varepsilon = 0,001$. Taki sam rozkład otrzymamy przyjmując $L_0 = 80$, $H = 20$ i $\varepsilon = 0,001$. Ponieważ mamy tu $D_1 = 6 \cdot 10^{-8}$, mogliśmy zamiast $\varepsilon = 0,001$ wziąć dowolną liczbę większą od D_1 , np. $\varepsilon = 0,2$. Stąd widać, że jeśli uda się dobrze wybrać wartość L_0 , tj. jeśli L_0 jest dostatecznie duże, to otrzymamy dostatecznie dokładny rozkład prawdopodobieństw, mimo że wartość ε jest duża.

W praktyce, dbając o wybór dostatecznie dużej wartości L_0 (ze względu na krótszy czas obliczeń), będziemy równocześnie wybierali ε z przedziału $(DM, 0,01]$, gdzie DM oznacza dokładność maszyny, na której przeprowadzamy obliczenia. Dla takich wartości ε , w przypadku wybrania za małej wartości parametru L_0 , nie otrzymamy rozkładu, w którym $P_0(T) < p_0$.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że przy stosowaniu metody bezpośredniej dla małych argumentów x mogą zdarzyć się przypadki nieosiągnięcia żądanej dokładności ε , mimo że wartość ε jest znacznie większa od dokładności maszyny (p. przykład 3 z tablicy 1).

⁽¹⁾ Małym argumentem jest $x = 2\sqrt{\lambda\mu}T < 10$. Stosujemy wtedy wzory (8) i (10). Dla $x = 2\sqrt{\lambda\mu}T \geq 10$ można już korzystać z asymptotycznej własności funkcji Bessela $I_k(x)$, tj. stosować wzory (11) i (12).

Będziemy uważali, że L_0 jest dobrze wybrane, jeśli dla H wybranego według podanej powyżej zasady odległość D_1 jest mniejsza od 0,01. Wartość „dobrego” L_0 zależy od parametrów rozkładu λ , μ i T .

W tabelicy 2 pokazujemy, jak zmieniają się odległości D_1 , D_2 i D_3 w zależności od λ , μ i T ⁽²⁾. Na podstawie przykładów z tej tabelicy można przypuszczać, że wartość parametru L_0 powinna być większa od $x = 2\sqrt{\lambda\mu T}$.

TABLICA 2. Odległości D_j dla różnych wartości parametrów λ , μ , T

Nr przy- kładu	λ	μ	T	x	L_0	L_1	L_2	L_3	$D_1 \cdot 10^4$	$D_2 \cdot 10^4$	$D_3 \cdot 10^7$
1	2	5	2	13	20	40	60	—	688	0	—
2	2	5	3	19	20	40	60	—	2194	0	—
3	2	5	4	26	20	40	60	80	3641	3	0
4	2	5	5	32	20	40	60	80	4623	32	0
5	2	5	6	37	—	40	60	80	—	172	7
6	2	5	7	44	—	40	60	80	—	530	165
7	2	5	8	51	—	40	60	80	—	1147	1833
8	1	5	5	22	20	40	60	80	7455	247	2
9	2	5	5	32	—	40	60	—	—	32	—
10	3	5	5	39	—	40	60	—	—	3	—
11	4	5	5	44	20	40	60	—	1305	0	—
12	4	8	2	23	20	40	60	—	1505	0	—
13	4	12	2	28	20	40	60	80	5525	43	0
14	4	20	2	36	—	40	60	80	—	4599	40
15	1	5	4	18	—	40	60	80	—	20	0
16	4	20	1	18	40	60	70	—	20	0	—
17	2	5	4	26	20	40	60	—	3641	32	—
18	4	40	1	26	55	70	85	—	706	2	—
19	3	5	4	31	20	40	60	—	1305	3	—
20	4	5	4	36	20	40	60	—	277	0	—
21	10	20	2	56	70	90	120	—	0	0	—
22	3	5	8	62	40	60	80	—	143	0	—
23	4	12	5	69	70	110	150	—	81	0	—
24	3	5	9	70	40	60	80	—	283	0	—
25	2	5	16	102	80	110	140	—	106	0	—
26	20	40	2	112	80	100	120	—	15	0	—
27	4	5	0,1	0,88	20	30	—	—	0	—	—
28	24	25	0,01	0,49	20	30	—	—	0	—	—
29	3	5	0,1	0,78	20	30	—	—	0	—	—
30	3	5	0,5	3,90	20	30	—	—	0	—	—
31	4	40	0,1	3,10	20	30	—	—	20	—	—

(2) W praktyce we wzorze (13) zamiast L_j przyjęliśmy $L_j - 10$.

Zauważmy jeszcze, że przy ustalonym j i L_0 odległości D_j rosną, gdy rośnie T przy ustalonych λ, μ lub gdy rośnie μ przy ustalonych T, λ (p. przykłady 1–7 i 12–14 w tabelicy 2). W tych samych warunkach odległości D_j maleją, jeśli przy ustalonych μ, T rośnie λ (p. przykłady 8–11 w tabelicy 2). Jeśli dysponujemy odpowiednim materiałem porównawczym, możemy wykorzystać ten fakt przy wyborze L_0 .

Czas wyznaczania rozkładu prawdopodobieństw metodą bezpośrednią na maszynie cyfrowej Elliott 803 waha się od kilkunastu sekund dla małych x do kilkunastu, a nawet kilkudziesięciu minut dla dużych x .

3. Metoda pośrednia. Drugą metodą, którą można zastosować do obliczania rozkładów $\{P_k(t)\}$, jest metoda pośrednia. Polega ona na numerycznym rozwiązaniu skończonego układu równań różniczkowych

$$(16) \quad \begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P_{k-1}'(t) &= \lambda P_{k-2}(t) - (\lambda + \mu) P_{k-1}(t) + \mu P_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ P_n'(t) &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t), \end{aligned}$$

który otrzymany obcinając nieskończony układ równań (1).

Układ równań (16) rozwiązujemy przy warunku początkowym

$$(17) \quad P_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0, \\ 0 & \text{dla } k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Aby tą metodą znaleźć rozkład prawdopodobieństw stanu systemu w chwili T , trzeba najpierw wyznaczyć rozkłady w pewnych chwilach wcześniejszych $t < T$.

Podzielmy przedział $[0, T]$ na M równych części. Rozkłady prawdopodobieństw w chwilach $t_j = jh$ ($j = 1, 2, \dots, M$; $h = T/M$), możemy wyznaczyć rekurencyjnie za pomocą jednej z metod przybliżonego rozwiązywania układu równań różniczkowych z danym warunkiem początkowym. Otrzymane w ten sposób wartości $P_k(T)$ obarczone są błędem zależnym od błędu powstałego na skutek zastąpienia nieskończonego układu równań (1) układem skończonym (16), od błędu własnego metody i od błędu numerycznego pochodzącego od zaokrągleń przybliżeń wartości prawdopodobieństw w punkcie t_j , który rozszerza się i przenosi na wartości prawdopodobieństw w następnych punktach.

Rozpatrzmy najpierw zależność błędu wartości $P_k(T)$ od liczby równań w układzie (16).

Założmy, że interesują nas prawdopodobieństwa

$$(18) \quad P_0(T), P_1(T), \dots, P_5(T)$$

dla ustalonych parametrów λ, μ, T . Rozwiązując układ (16) metodą Rungego-Kutty [2] z automatycznym wyborem kroku h kolejno dla $n = 5, 10, 20, 40$, otrzymamy ciąg $P_k^i(T)$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $k = 0, 1, \dots, 5$)

przybliżeń prawdopodobieństw (18). Korzystając z wzoru (14), w którym przyjmiemy $L_0 = 5$, obliczymy odległości d_1, d_2, d_3 każdej z par sąsiednich rozkładów $P_k^i(T)$, gdzie d_i oznacza odległość rozkładów $P_k^i(T)$ i $P_k^{i+1}(T)$. Z przykładów podanych w tabelicy 3 widać, że dla ustalonych λ, μ i T

TABLICA 3. Prawdopodobieństwa $P_k^i(T)$ obliczone metodą Rungego-Kutty

	k	$P_k^1(T)$	$P_k^2(T)$	$P_k^3(T)$	$P_k^4(T)$
$\lambda = 4$ $\mu = 20$ $T = 0,2$	0	,810 944 · 10 ⁰	,810 944 · 10 ⁰	,810 944 · 10 ⁰	,810 943 · 10 ⁰
	1	,156 068 · 10 ⁰	,156 068 · 10 ⁰	,156 068 · 10 ⁰	,156 068 · 10 ⁰
	2	,277 927 · 10 ⁻¹	,277 930 · 10 ⁻¹	,277 930 · 10 ⁻¹	,277 930 · 10 ⁻¹
	3	,444 762 · 10 ⁻²	,444 842 · 10 ⁻²	,444 842 · 10 ⁻²	,444 842 · 10 ⁻²
	4	,692 267 · 10 ⁻³	,631 236 · 10 ⁻³	,631 236 · 10 ⁻³	,631 236 · 10 ⁻³
	5	,748 427 · 10 ⁻⁴	,792 424 · 10 ⁻⁴	,792 424 · 10 ⁻⁴	,792 424 · 10 ⁻⁴
$d_1 = 0,000\ 003 \quad d_2 < 0,000\ 001 \quad d_3 < 0,000\ 001$					
$\lambda = 4$ $\mu = 8$ $T = 2$	0	,498 417 · 10 ⁰	,505 521 · 10 ⁰	,505 524 · 10 ⁰	,505 524 · 10 ⁰
	1	,246 937 · 10 ⁰	,251 838 · 10 ⁰	,251 841 · 10 ⁰	,251 841 · 10 ⁰
	2	,120 127 · 10 ⁰	,124 699 · 10 ⁰	,124 703 · 10 ⁰	,124 703 · 10 ⁰
	3	,562 648 · 10 ⁻¹	,611 907 · 10 ⁻¹	,611 976 · 10 ⁻¹	,611 976 · 10 ⁻¹
	4	,241 639 · 10 ⁻¹	,296 581 · 10 ⁻¹	,296 689 · 10 ⁻¹	,296 689 · 10 ⁻¹
	5	,806 216 · 10 ⁻²	,141 460 · 10 ⁻¹	,141 625 · 10 ⁻¹	,141 625 · 10 ⁻¹
$d_1 = 0,033\ 081 \quad d_2 = 0,000\ 044 \quad d_3 < 0,000\ 001$					
$\lambda = 4$ $\mu = 5$ $T = 0,2$	0	,597 390 · 10 ⁰	,597 390 · 10 ⁰	,597 390 · 10 ⁰	,597 390 · 10 ⁰
	1	,285 234 · 10 ⁰	,285 234 · 10 ⁰	,285 234 · 10 ⁰	,285 234 · 10 ⁰
	2	,912 055 · 10 ⁻¹	,912 056 · 10 ⁻¹	,912 056 · 10 ⁻¹	,912 056 · 10 ⁻¹
	3	,214 794 · 10 ⁻¹	,214 795 · 10 ⁻¹	,214 795 · 10 ⁻¹	,214 795 · 10 ⁻¹
	4	,396 955 · 10 ⁻²	,397 083 · 10 ⁻²	,397 083 · 10 ⁻²	,397 083 · 10 ⁻²
	5	,591 185 · 10 ⁻³	,601 829 · 10 ⁻³	,601 829 · 10 ⁻³	,601 829 · 10 ⁻³
$d_1 = 0,000\ 012 \quad d_2 < 0,000\ 001 \quad d_3 < 0,000\ 001$					
$\lambda = 4$ $\mu = 5$ $T = 3$	0	,243 744 · 10 ⁰	,260 599 · 10 ⁰	,260 625 · 10 ⁰	,260 625 · 10 ⁰
	1	,188 085 · 10 ⁰	,204 627 · 10 ⁰	,204 662 · 10 ⁰	,204 662 · 10 ⁰
	2	,138 286 · 10 ⁰	,157 186 · 10 ⁰	,157 246 · 10 ⁰	,157 246 · 10 ⁰
	3	,946 530 · 10 ⁻¹	,117 776 · 10 ⁰	,117 882 · 10 ⁰	,117 882 · 10 ⁰
	4	,572 227 · 10 ⁻¹	,858 490 · 10 ⁻¹	,860 358 · 10 ⁻¹	,860 358 · 10 ⁻¹
	5	,257 957 · 10 ⁻¹	,607 057 · 10 ⁻¹	,610 246 · 10 ⁻¹	,610 246 · 10 ⁻¹
$d_1 = 0,138\ 957 \quad d_2 < 0,000\ 732 \quad d_3 < 0,000\ 001$					

odległości d_i ($i = 1, 2, 3$) maleją wraz ze wzrostem i , co pozwala przypuszczać, że ciąg wektorów $(P_1^i(T), P_2^i(T), \dots, P_5^i(T))$ dla $i \rightarrow \infty$ jest zbieżny do wektora

$$(P_{0h}(T), P_{1h}(T), \dots, P_{5h}(T)).$$

Wskaźnik h oznacza, że wartości graniczne zależą od kroku h , z jakim wyznaczaliśmy wartości $P_k^i(t_j)$.

Dla $h \rightarrow 0$ mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_{kh}(T) = P_k(T) \quad (k = 0, 1, \dots, 5).$$

Jak widać z przykładów zamieszczonych w tabelicy 3, dla T bliskich zeru rozkłady $P_k^1(T)$, $P_k^2(T)$, $P_k^3(T)$ i $P_k^4(T)$ niewiele różnią się między sobą. Wynika to stąd, że rozwiązując układ (16) z warunkiem początkowym (17) metodą Rungego-Kutty, dla każdego n otrzymujemy w pierwszym kroku $P_k(t_1) > 0$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$ i $P_k(t_1) = 0$ dla $k = 5, 6, \dots, n$. W każdym następnym kroku liczba prawdopodobieństw równych zeru zmniejsza się o cztery. Po s krokach (s zależy od n) wszystkie wartości $P_k(t_s)$ dla $k = 0, 1, \dots, n$ są większe od zera.

Stąd np. prawdopodobieństwa $P_k^3(t_j)$, $P_k^4(t_j)$ dla $k = 0, 1, \dots, 20$ pokrywają się dla t_1, t_2, \dots, t_6 , natomiast dla t_7 różnią się tylko wartości $P_{20}^3(t_7)$, $P_{20}^4(t_7)$, a w następnych krokach błąd wartości $P_{20}^3(t_7)$ przenosi się na $P_{19}^3(t_7)$, $P_{18}^3(t_7)$ itd. Rośnie więc odległość rozkładów $P_k^3(t_j)$ i $P_k^4(t_j)$ dla $k = 0, 1, \dots, 20$.

Ponieważ odległości d_k dla ustalonego k rosną wraz z T , wydaje się, że błąd wartości $P_k(T)$ dla $k = 0, 1, \dots, n$ powstały na skutek obciążenia układu (1) jest mały, jeśli liczba równań n w układzie (16) przewyższa liczbę r interesujących nas prawdopodobieństw, przy czym różnica $n - r$ jest tym większa, im większe jest T .

W tabelicy 4 porównujemy rozkłady $\{P_k^1(T)\}$, $\{P_k^2(T)\}$ dla $\lambda = 1$, $\mu = 5$, które otrzymaliśmy metodą pośrednią przyjmując we wzorze (16) $n = 20, 40$ z rozkładem $\{P_k^3(T)\}$ otrzymanym metodą bezpośrednią. Wartości $P_k^i(T)$ dla $i = 1, 2, 3$ otrzymaliśmy przy założeniu $\varepsilon = \zeta = 0,000\ 01$, gdzie ε jest dokładnością wyznaczenia rozkładu metodą bezpośrednią, a ζ kieruje automatycznym wyborem kroku h w metodzie pośredniej. Mamy tu $P_k^1(0, 2) = P_k^2(0, 2)$ dla $k = 0, 1, \dots, 19$ i $P_k^1(5) = P_k^2(5)$ dla $k = 0, 1, \dots, 16$. Widać, że proces przenoszenia się błędu powstałego na skutek obciążenia układu (1) nie jest szybki. Różnica $n - r$ nie musi być więc duża.

Z praktycznego punktu widzenia prawdopodobieństwa mniejsze od 10^{-6} można uważać za równe zeru. W naszym przykładzie $P_k^1(5) = P_k^2(5) = 0$ dla $k = 9, 10, \dots, 20$. Liczba r interesujących nas prawdopodobieństw jest równa 8 i do wyznaczenia rozkładu $\{P_k(5)\}$ wystarczy przyjąć $n = 20$.

Pozostaje do przeanalizowania zagadnienie, jak ustalić liczbę r interesujących nas prawdopodobieństw? Na rys. 1 widać, że jeśli ε jest dostatecznie małe oraz dla pewnego s jest $p_s < \varepsilon$, to dla małych T zachodzi również nierówność $P_s(T) < \varepsilon$ a dla dużych T prawdopodobieństwa $P_s(T)$ i p_s różnią się mało. W przybliżeniu można więc przyjąć $r = s$.

TABLICA 4. Rozkłady $P_k^1(T)$, $P_k^2(T)$ otrzymane metodą pośrednią i rozkład $P_k^3(T)$ otrzymany metodą bezpośrednią dla $\lambda = 1$, $\mu = 5$ i dwu wartości T

k	$P_k^1(0,2)$	$P_k^2(0,2)$	$P_k^3(0,2)$	$P_k^1(5)$	$P_k^1(5)$	$P_k^1(5)$
0	,8814 · 10 ⁻⁰	,8814 · 10 ⁻⁰	,8807 · 10 ⁻⁰	,8013 · 10 ⁻⁰	,8013 · 10 ⁻⁰	,8000 · 10 ⁻⁰
1	,1097 · 10 ⁻⁰	,1097 · 10 ⁻⁰	,1097 · 10 ⁻⁰	,1603 · 10 ⁻⁰	,1603 · 10 ⁻⁰	,1600 · 10 ⁻⁰
2	,9066 · 10 ⁻²	,9066 · 10 ⁻²	,9063 · 10 ⁻²	,3205 · 10 ⁻¹	,3205 · 10 ⁻¹	,3200 · 10 ⁻¹
3	,5465 · 10 ⁻³	,5465 · 10 ⁻³	,5464 · 10 ⁻³	,6412 · 10 ⁻²	,6412 · 10 ⁻²	,6400 · 10 ⁻²
4	,2569 · 10 ⁻⁴	,2569 · 10 ⁻⁴	,2569 · 10 ⁻⁴	,1281 · 10 ⁻²	,1281 · 10 ⁻²	,1280 · 10 ⁻²
5	,9861 · 10 ⁻⁶	,9861 · 10 ⁻⁶	,9860 · 10 ⁻⁶	,2566 · 10 ⁻³	,2566 · 10 ⁻³	,2559 · 10 ⁻³
6	,3191 · 10 ⁻⁷	,3191 · 10 ⁻⁷	,3191 · 10 ⁻⁷	,5111 · 10 ⁻⁴	,5111 · 10 ⁻⁴	,5114 · 10 ⁻⁴
7	,8918 · 10 ⁻⁹	,8918 · 10 ⁻⁹	,8917 · 10 ⁻⁹	,1027 · 10 ⁻⁴	,1027 · 10 ⁻⁴	,1021 · 10 ⁻⁴
8	,2191 · 10 ⁻¹⁰	,2191 · 10 ⁻¹⁰	,2191 · 10 ⁻¹⁰	,2027 · 10 ⁻⁵	,2027 · 10 ⁻⁵	,2038 · 10 ⁻⁵
9	,4803 · 10 ⁻¹¹	,4803 · 10 ⁻¹²	,4802 · 10 ⁻¹²	,4111 · 10 ⁻⁶	,4111 · 10 ⁻⁶	,4059 · 10 ⁻⁶
10	,9498 · 10 ⁻¹⁴	,9498 · 10 ⁻¹⁴	,9497 · 10 ⁻¹⁴	,7944 · 10 ⁻⁷	,7944 · 10 ⁻⁷	,8063 · 10 ⁻⁷
11	,1711 · 10 ⁻¹⁵	,1711 · 10 ⁻¹⁵	,1711 · 10 ⁻¹⁵	,1634 · 10 ⁻⁷	,1634 · 10 ⁻⁷	,1595 · 10 ⁻⁷
12	,2829 · 10 ⁻¹⁷	,2829 · 10 ⁻¹⁷	,2829 · 10 ⁻¹⁷	,3055 · 10 ⁻⁸	,3055 · 10 ⁻⁸	,3141 · 10 ⁻⁸
13	,4322 · 10 ⁻¹⁹	,4322 · 10 ⁻¹⁹	,4323 · 10 ⁻¹⁹	,6360 · 10 ⁻⁹	,6360 · 10 ⁻⁹	6139 · 10 ⁻⁹
14	,6138 · 10 ⁻²¹	,6138 · 10 ⁻²¹	,6139 · 10 ⁻²¹	,1146 · 10 ⁻¹⁰	,1146 · 10 ⁻¹⁰	,1190 · 10 ⁻⁹
15	,8142 · 10 ⁻²³	,8142 · 10 ⁻²³	,8143 · 10 ⁻²³	,2377 · 10 ⁻¹⁰	,2377 · 10 ⁻¹⁰	,2281 · 10 ⁻¹⁰
16	,1013 · 10 ⁻²⁴	,1013 · 10 ⁻²⁴	,1013 · 10 ⁻²⁴	,4155 · 10 ⁻¹¹	,4155 · 10 ⁻¹¹	,4319 · 10 ⁻¹¹
17	,1187 · 10 ⁻²⁶	,1187 · 10 ⁻²⁶	,1187 · 10 ⁻²⁶	,8356 · 10 ⁻¹²	,8359 · 10 ⁻¹²	,8062 · 10 ⁻¹²
18	,1314 · 10 ⁻²⁸	,1314 · 10 ⁻²⁸	,1314 · 10 ⁻²⁸	,1435 · 10 ⁻¹²	,1440 · 10 ⁻¹²	,1481 · 10 ⁻¹²
19	,1378 · 10 ⁻³⁰	,1378 · 10 ⁻³⁰	,1377 · 10 ⁻³⁰	,2676 · 10 ⁻¹³	,2734 · 10 ⁻¹³	,2673 · 10 ⁻¹³
20	,1373 · 10 ⁻³²	,1374 · 10 ⁻³²	,1371 · 10 ⁻³²	,3976 · 10 ⁻¹⁴	,4674 · 10 ⁻¹⁴	,4734 · 10 ⁻¹⁴
Czas obl.	22 min	44 min	38 sek	67 min	133 min	8 min

Można przypuszczać, że wartości $P_k^1(T)$ z tablicy 4 są obarczone większym błędem niż wartości $P_k^3(T)$, mamy bowiem

$$(19) \quad \begin{aligned} \sum_{P_k^1 > \gamma} P_k^1(0,2) &= 1,000\ 778, & \sum_{P_k^1 > \gamma} P_k^1(5) &= 1,001\ 668, \\ \sum_{P_k^3 > \gamma} P_k^3(0,2) &= 0,999\ 999, & \sum_{P_k^3 > \gamma} P_k^3(5) &= 1,000\ 000, \end{aligned}$$

gdzie $\gamma = 0,000\ 001$.

Dla danej metody rozwiązywania układu równań różniczkowych błąd rozwiązań maleje, gdy $h \rightarrow 0$. Stąd należy szczególnie starannie wybierać krok h (lub parametr ζ kierujący automatycznym wyborem kroku h). Wybór za dużego h (lub ζ) ujawnia się szybko otrzymaniem ujemnych wartości niektórych prawdopodobieństw.

Z tych rozważań można wnioskować, że metoda pośrednia daje mniej dokładne wartości prawdopodobieństw $P_k(T)$ niż metoda bezpośrednia, a czas obliczeń jest znacznie dłuższy. Nie warto więc stosować jej do

wyznaczania rozkładu prawdopodobieństw w jednym tylko punkcie T . Warto ją natomiast stosować, gdy trzeba znaleźć rozkłady prawdopodobieństw w wielu punktach pewnego przedziału $(t_0, T]$. Jeśli $t_0 \neq 0$, to można znaleźć rozkład $\{P_k(t_0)\}$ z dużą dokładnością metodą bezpośrednią i przyjąć go w metodzie pośredniej jako warunek początkowy.

4. Szybkość zbieżności rozkładów prawdopodobieństw dla $t \rightarrow \infty$ do rozkładu granicznego. Niech

$$F_t(y) = \sum_{k=0}^{[y]} P_k(t)$$

oznacza dystrybuantę rozkładu $\{P_k(t)\}$ otrzymanego w sposób przybliżony metodą bezpośrednią lub pośrednią. Podobnie niech

$$F(y) = \sum_{k=0}^{[y]} p_k$$

oznacza dystrybuantę rozkładu granicznego (6).

Odległość $d_n(t)$ rozkładu $\{P_k(t)\}$, gdzie $k = 0, 1, \dots, n$, od rozkładu granicznego zdefiniujemy następująco:

$$(20) \quad d_n(t) = \max_{0 \leq y \leq n} |F_t(y) - F(y)|.$$

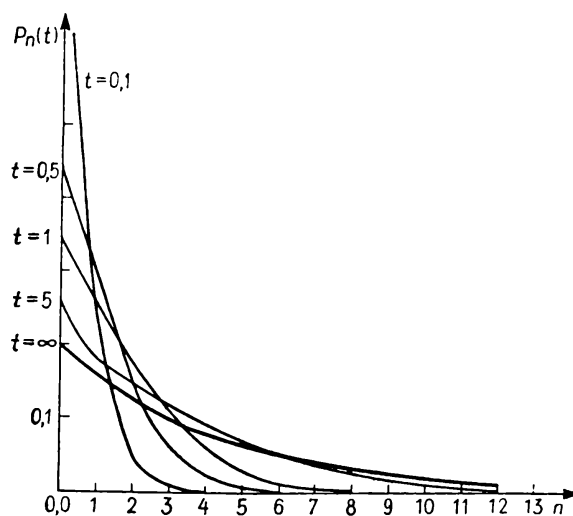
TABLICA 5. Szybkość zbieżności rozkładu $P_k(T)$ do rozkładu granicznego
($A = d_n(t) \cdot 10^4$, $B = d_n(t+1)/d_n(t)$)

t	$\lambda=1, \mu=5$		$\lambda=2, \mu=5$		$\lambda=3, \mu=5$		$\lambda=4, \mu=5$	
	A	B	A	B	A	B	A	B
2	6,297		84,15		484,8		2012	
		0,13		0,33		0,55		0,75
3	0,825		27,81		265,5		1517	
		0,15		0,37		0,59		0,79
4	0,124		10,19		156,9		1194	
		0,16		0,39		0,63		0,81
5	0,020		3,97		97,2		965	
		0,20		0,40		0,64		0,83
6	0,004		1,62		62,2		803	
		0,5		0,42		0,66		0,84
7	0,002		0,68		40,8		677	
		1		0,43		0,67		0,85
8	0,002		0,29		27,2		575	
		0,5		0,44		0,68		0,86
9	0,001		0,13		18,5		494	
		2		0,44		0,69		0,87
10	0,002		0,05		12,7		428	

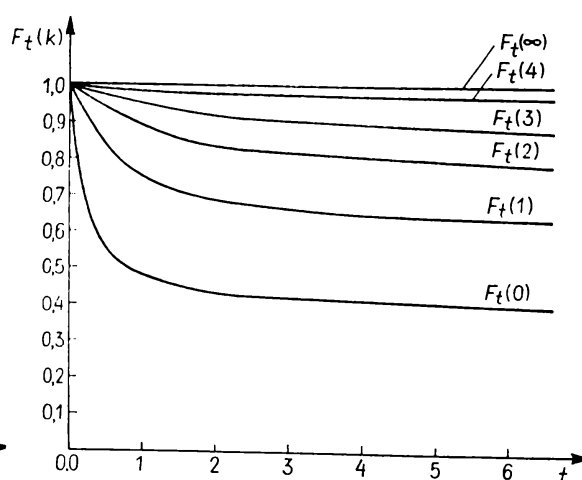
Zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = p_k$ pociąga za sobą zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} d_n(t) = 0$ dla każdego n . Szybkość zbieżności rozkładów $\{P_k(t)\}$ do $\{p_k\}$ można więc mierzyć szybkością zbieżności do zera tej odległości.

W tabelicy 5 podajemy otrzymane dla różnych parametrów λ i μ wartości $d_n(t) \cdot 10^4$, gdzie $d_n(t)$ obliczono z wzoru (20), w którym n wybrano tak, aby spełnione były nierówności $p_k < 0,001$ dla $k < n$. Jak widać z tej tabelicy, im bliższe jedności jest ρ (przy ustalonym μ), tym wolniejsza jest zbieżność rozkładu $\{P_k(t)\}$ do rozkładu granicznego.

Dla ustalonych λ i μ stosunek $d_n(t+1)/d_n(t)$ jest w przybliżeniu stały⁽³⁾, a więc w przybliżeniu odległości $d_n(t)$ dążą do zera geometrycznie.



Rys. 1. Zbieżność rozkładów $P_n(t)$ do rozkładu granicznego ($\lambda = 4, \mu = 5$).



Rys. 2. Zbieżność wartości dystrybucyj $F_t(k)$ do wartości dystrybucyj $F(k)$.

Dla ρ bliskiego zera, zbieżność prawdopodobieństw $P_k(t)$ do prawdopodobieństw granicznych p_k jest bardzo szybka. Jeśli przyjąć, że rozkład $\{p_k\}$ jest dostateczną aproksymacją rozkładu $\{P_k(t)\}$, gdy $d_n(t) < 10^{-5}$, wówczas jeżeli $\lambda = 1$ i $\mu = 5$, to można korzystać z rozkładu granicznego dla $t > 4$, a jeżeli $\lambda = 2$ i $\mu = 5$, to jest tak dla $t > 9$.

Zbieżność wartości dystrybucyj $F_t(y)$ rozkładu $\{P_k(t)\}$ do wartości dystrybucyj $F(y)$ rozkładu granicznego $\{p_k\}$ dla $\lambda = 3, \mu = 5$ i $y = 0, 1, 2, 3, 4$ pokazana jest na rysunku 2.

Prace cytowane

[1] W. G. Bickley, L. J. Comrie, J. C. P. Miller, D. H. Sadler and A. J. Thompson, *Bessel functions. Part II: Functions of positive integer orders*, Cambridge 1952.

[2] L. Collatz, *Metody numeryczne i graficzne rozwiązywania równań różniczkowych*, Warszawa 1960.

⁽³⁾ Większe odchylenia dla $\lambda = 1$ i $\mu = 5$ spowodowane są błędami zaokrągleń wartości $P_k(7), P_k(8), P_k(9)$ i $P_k(10)$.

- [3] L. Fox, *A short table for Bessel functions of integer orders and large arguments*, Cambridge 1954.
- [4] D. G. Kendall, *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain*, Ann. Math. Stat. 24 (1953), str. 338-354.
- [5] G. N. Lance, *Numerical methods for high speed computers*, London 1960.
- [6] F. E. Relton, *Applied Bessel functions*, London and Glasgow 1946.
- [7] T. L. Saaty, *Elements of queueing theory with applications*, New York 1962.

INSTYTUT MATEMATYCZNY
UNIwersytetu Wrocławskiego

Praca wpłynęła 28. 5. 1969
Nowa wersja 16. 12. 1969

ИОАННА ХУК (Вроцлав)

**ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
СОСТОЯНИЙ В СИСТЕМЕ $M/M/1$**

РЕЗЮМЕ

В работе рассмотрены два метода приближенного вычисления распределения вероятностей состояний в системе $M/M/1$.

Первый метод, названный *непосредственным*, использует формулу (4), в которой бесконечный ряд заменен конечным. Значения модифицированной функции Бесселя вычисляются методом Миллера.

Второй метод, названный *посредственным*, решает методом Рунге-Кутты отсеченную систему дифференциальных уравнений (1) с начальным условием $P_0(0) = 1$ и $P_k(0) = 0$ при $k = 1, 2, \dots$

В работе даны сравнение распределений $\{P_k(t)\}$ полученных обоими методами, как и замечания о скорости схода этих распределений к предельным.

JOANNA HUK (Wrocław)

**ON THE NUMERICAL DETERMINATION OF THE STATE DISTRIBUTION IN THE
SYSTEM $M/M/1$**

SUMMARY

The paper deals with two methods of approximate determination of the distribution of state probabilities in the system of type $M/M/1$.

The first method, called *direct*, is based on equation (4) in which the infinite sum is replaced by a finite one. The modified Bessel function is calculated by Miller's method.

In the second method, called *indirect*, the truncated system of differential equations (1) with initial condition $P_k(0) = 0$ for $k = 1, 2, \dots$, and $P_0(0) = 1$ is solved by the Runge-Kutta method.

The distributions of $\{P_k(t)\}$ obtained with both methods are compared and remarks concerning the speed of convergence of these distributions to the limiting one are given.
