T. CZECHOWSKI, M. FISZ, W. SADOWSKI, R. ZASĘPA (Warszawa)

O WYZNACZANIU WSPÓŁCZYNNIKA BEZPIECZEŃSTWA

1. Z doświadczenia wiadomo, że wytrzymałość określonego materiału konstrukcyjnego nie jest wielkością stałą. Jeśli więc z rozważań teoretycznych wynika, iż wytrzymałość ta dla jakiegoś materiału wynosi np. R_0, to w rzeczywistości poszczególne próby, jakim poddajemy ten materiał, wskazują na to, że wytrzymałość ta jest czasem większa, czasem mniejsza niż R_0. Fakt ten znany był od dość dawna i między innymi dlatego, ze względu na bezpieczeństwo, naprężenia dopuszczalne ustalano z reguły poniżej wielkości R_0, np. jako R_0/Γ, gdzie $\Gamma>1$.

Z uwagi na swoją rolę liczba Γ nosi nazwę współczynnika bezpieczeństwa. Tak np. przyjmując $\Gamma=3$, ustalamy naprężenie dopuszczalne trzykrotnie niższe, niż wynika to z rozważań teoretycznych. W ten sposób zabezpieczamy się poważnie przed ewentualną niespodzianką polegającą na tym, że rzeczywiste naprężenie będzie większe niż dopuszczalne.

Przez długi czas liczbę Γ wyznaczali dla poszczególnych materiałów konstrukcyjnych w sposób subiektywny autorzy odpowiednich przepisów konstrukcyjnych. Dopiero w pracach W. Wierzbickiego[1]) znajdujemy próbę zbudowania teorii, opartej na rachunku prawdopodobieństwa, pozwalającej na wyznaczenie współczynnika bezpieczeństwa w sposób obiektywny.

W ujęciu W. Wierzbickiego wytrzymałość określonego materiału konstrukcyjnego jest zmienną losową, tzn. wielkością mogącą przyjmować różne wartości, należące do poszczególnych przedziałów z określonymi prawdopodobieństwami. Zmienną tę oznaczać będziemy w dalszym ciągu symbolem R. Zakładamy (na podstawie doświadczenia niektórych badaczy), że ma ona rozkład normalny z wartością średnią R_0 i odchyleniem standardowym σ; taki rozkład oznaczymy symbolem $N(R_0,\sigma)$.

A zatem dystrybuantę rozkładu wytrzymałości danego materiału konstrukcyjnego wyznacza wzór

$$P(R<x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-(z-R_0)^2/2\sigma^2}\,dz,$$

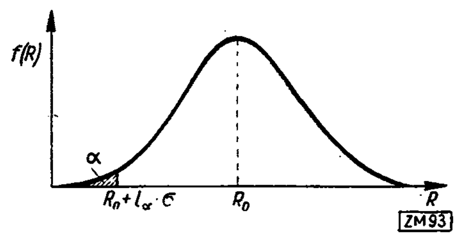
[1]) W szczególności należy wymienić prace [1] i [2]. Nadto piśmiennictwo do tego zagadnienia podano w pracy [3].

w którym $P(R<x)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że zaobserwowana wytrzymałość będzie mniejsza niż x.

Oznaczając przez k dopuszczalne naprężenie, określamy współczynnik bezpieczeństwa wytrzymałości materiału konstrukcyjnego jako[2])

$$\Gamma = \frac{R_0}{k}. \tag{1.1}$$

Oczywiście, dopuszczalne naprężenie powinno być wyznaczone tak, by rzeczywista wytrzymałość nie była mniejsza od naprężenia dopuszczalnego. Ponieważ wytrzymałość jest zmienną losową, więc nie możemy być pewni, że rzeczywista wytrzymałość nie będzie mniejsza niż wyznaczone przez nas naprężenie dopuszczalne. W tych warunkach możliwe jest jedynie takie wyznaczenie naprężenia dopuszczalnego, żeby było dostatecznie małe prawdopodobieństwo, że rzeczywista wytrzymałość będzie mniejsza niż naprężenie dopuszczalne. Oznaczając to prawdopodobieństwo przez α otrzymujemy warunek



Rys. 1

$$P(R<k) = \alpha. \tag{1.2}$$

Z warunku tego można wyznaczyć wielkość l_α, tak by

$$k = R_0 + l_\alpha \sigma.$$

Zauważyć tu należy, że ze względu na to, iż α jest małe (w każdym razie mniejsze od 0,5), to $l_\alpha<0$ (rys. 1). Wzór (1.1) określający współczynnik bezpieczeństwa przybiera teraz postać

$$\Gamma = \frac{R_0}{R_0 + l_\alpha \sigma}. \tag{1.3}$$

W praktyce nie znamy dokładnie wartości ani R_0, ani σ, nie możemy więc dokładnie wyznaczyć współczynnika bezpieczeństwa danego materiału. Współczynnik ten możemy jedynie oszacować na podstawie pewnej liczby doświadczeń, przeprowadzonych na materiale konstrukcyjnym. W związku z tym powstaje pytanie, ile takich doświadczeń należy przeprowadzić, by można było oszacować współczynnik bezpieczeństwa Γ z żądaną dokładnością ε i z odpowiednim współczynnikiem ufności.

[2]) Porównaj np. Wierzbicki [2].

Oszacowana wartość współczynnika bezpieczeństwa (oznaczamy ją przez γ) jest oczywiście zmienną losową, może ona bowiem przyjmować, przy danym l_a i danej liczbie doświadczeń, różne wielkości z prawdopodobieństwami zależnymi od R_0 i σ.

Chodzić nam będzie o znalezienie takiej liczby n doświadczeń, by przy ustalonym $\varepsilon>0$ i $0<\beta<1$

$$P(|\gamma-\Gamma|<\varepsilon)=\beta. \tag{1.4}$$

Praca niniejsza stanowi próbę rozwiązania tego zagadnienia.

Należy zauważyć, że rozpatrywany przez nas przypadek jest stosunkowo prosty, gdyż współczynnik bezpieczeństwa uzależniono tylko od wytrzymałości. Jest to pewne uproszczenie zagadnienia, bo w praktyce wchodzą w grę jeszcze inne zmienne losowe jak np. obciążenie. Bywają jednak sytuacje, kiedy można przyjąć, że obciążenie jest stałe, a jedyną zmienną losową wpływającą na współczynnik bezpieczeństwa jest wytrzymałość. Za przykład może tu posłużyć przewód energetyczny kolei elektrycznych, który zwykle zawiesza się na stalowej lince z jednej strony umocowanej, z drugiej zaś obciążonej stałym ciężarem. Wtedy w lince jest stałe obciążenie[3]).

2. Zajmiemy się najpierw zmienną losową γ, na podstawie której będziemy szacować Γ. Niech $r_1,r_2,\ldots,r_n$ oznaczają zaobserwowane wytrzymałości badanego materiału otrzymane na podstawie n przeprowadzonych doświadczeń. Za γ przyjmujemy

$$\gamma=\frac{\bar{r}}{\bar{r}+l_a s}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{r}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i, \quad s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})^2}\,. \tag{2.1}$$

Wzór (2.1) można napisać również w postaci

$$\gamma=\frac{\bar{r}\sqrt{n-1}/s}{\bar{r}\sqrt{n-1}/s+l_a\sqrt{n-1}}\,.$$

Podstawiając

$$t=\frac{\bar{r}}{s}\sqrt{n-1} \tag{2.2}$$

otrzymujemy

$$\gamma=\frac{t}{t+l_a\sqrt{n-1}}\,.$$

[3]) Uwagi te zawdzięczają autorzy prof. J. Oderfeldowi.

Wprowadzając pomocnicze oznaczenie $l_a\sqrt{n-1}=A$ możemy ostatecznie wzór (2.1) napisać w postaci

$$\gamma = \frac{t}{t+A}. \tag{2.3}$$

Zmienna losowa t, występująca we wzorze (2.3) a określona przez (2.2), ma rozkład niecentralny Studenta. Zmienna ta jest asymptotycznie normalna i ma rozkład

$$N\left(\frac{R_0}{\sigma}\sqrt{\nu};\ \sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{\sigma}\right)^2}\right)^{4)}.$$

Ponieważ wzór (1.3) napisać można w postaci

$$\Gamma = \frac{R_0/\sigma}{R_0/\sigma + l_a},$$

skąd

$$\frac{R_0}{\sigma} = \frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma},$$

więc gdy $n\to\infty$, można zastąpić zmienną t występującą w (2.3) przez zmienną o rozkładzie

$$N\left(\frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma}\sqrt{n};\ \sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma}\right)^2}\right).$$

3. Nim przejdziemy do znalezienia n, spełniającego relację (1.4), wprowadzimy pewne oznaczenia. Oznaczmy

$$\Gamma-\varepsilon = z_1, \qquad \Gamma+\varepsilon = z_2,$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest żądaną dokładnością oszacowania, jak we wzorze (1.4).

Korzystając z wzoru (2.3), można wyrażenie (1.4) napisać jako

$$P\left(z_1 < \frac{t}{t+A} < z_2\right) = \beta$$

lub

$$P\left(\frac{t}{t+A} < z_2\right) - P\left(\frac{t}{t+A} < z_1\right) = \beta. \tag{3.1}$$

---

4) Zobacz np. N. L. Johnson i B. L. Welch [4].

Z uwagi na znaczenie symbolów Γ i ε możemy przyjąć, nie zmniejszając ogólności założeń, że spełniają one relacje

$$1-z_1=1-\Gamma+\varepsilon<0, \tag{3.2}$$

$$1-z_2=1-\Gamma-\varepsilon<0, \tag{3.3}$$

Γ jest bowiem liczbą większą od jedności, natomiast ε jest stosunkowo małe. Wynika stąd

$$\frac{z_1}{1-z_1}=\frac{z_1-1+1}{1-z_1}=\frac{1}{1-z_1}-1<-1. \tag{3.6}$$

Analogicznie

$$\frac{z_2}{1-z_2}<-1. \tag{3.5}$$

Zanotujmy także, iż

$$A<0, \tag{3.6}$$

co wynika z uwagi, zrobionej w ustępie 1, orzekającej, że $l_a<0$.

4. Przejdziemy obecnie do znalezienia n. Zajmijmy się pierwszym składnikiem różnicy z lewej strony (3.1):

$$\begin{aligned}P\left(\frac{t}{t+A}<z_2\right)&=P\{t<z_2(t+A)\,|\,t>-A\}P(t>-A)+\\&\quad+P\{t>z_2(t+A)\,|\,t<-A\}P(t<-A)=\\&=P\{(1-z_2)t<z_2A\,|\,t>-A\}P(t>-A)+\\&\quad+P\{(1-z_2)t>z_2A\,|\,t<-A\}P(t<-A).\end{aligned}$$

Korzystając z założenia (3.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}P\left(\frac{t}{t+A}<z_2\right)&=P\left(t>A\frac{z_2}{1-z_2}\,\Big|\,t>-A\right)P(t>-A)+\\&\quad+P\left(t<A\frac{z_2}{1-z_2}\,\Big|\,t<-A\right)P(t<A).\end{aligned}$$

Pierwszy składnik sumy występującej z prawej strony ostatniej równości jest łącznym prawdopodobieństwem zdarzenia $t>Az_2/(1-z_2)$ oraz zdarzenia $t>-A$. Ze względu na (3.5) oraz ze względu na (3.6) łatwo zauważyć, iż realizacja zdarzenia $t>Az_2/(1-z_2)$ pociąga za sobą realizację zdarzenia $t>-A$. Wobec tego otrzymujemy

$$P\left(t>A\frac{z_2}{1-z_2}\,\Big|\,t>-A\right)P(t>-A)=P\left(t>A\frac{z_2}{1-z_2}\right).$$

Rozumując analogicznie, zauważymy, iż drugi składnik w rozpatrywanej sumie da się przedstawić w następujący sposób:

$$P\left(t < A\frac{z_2}{1-z_2} \,|\, t < -A\right)P(t < -A) = P(t < -A).$$

W rezultacie otrzymujemy

$$P\left(\frac{t}{t+A} < z_2\right) = P\left(t > A\frac{z_2}{1-z_2}\right) + P(t < -A). \tag{4.1}$$

W podobny sposób, opierając się na (3.4) oraz na (3.6), otrzymujemy

$$P\left(\frac{t}{t+A} < z_1\right) = P\left(t > A\frac{z_1}{1-z_1}\right) + P(t < -A). \tag{4.2}$$

Z uwagi na (4.1) i (4.2) — równość (3.1) równoważna z równością (1.4) przybiera teraz postać

$$P\left(t > A\frac{z_2}{1-z_2}\right) - P\left(t > A\frac{z_1}{1-z_1}\right) = \beta. \tag{4.3}$$

Prawdopodobieństwa występujące z lewej strony powyższej równości można obliczyć korzystając z tablic rozkładu normalnego, gdyż przy dostatecznie dużych n zmienną t możemy traktować jako zmienną o rozkładzie normalnym

$$N\left(\frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma}\sqrt{n};\ \sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma}\right)^2}\right).$$

Jeśli przez symbol $\Phi(x)$ oznaczymy dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0;1)$, to równość (4.3) przyjmie ostatecznie postać

$$\Phi\left(\frac{l_a\sqrt{n-1}\cdot\frac{\Gamma-\varepsilon}{1-\Gamma+\varepsilon} - \frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma}\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma}\right)^2}}\right) - \Phi\left(\frac{l_a\sqrt{n-1}\cdot\frac{\Gamma+\varepsilon}{1-\Gamma-\varepsilon} - \frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma}\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma l_a}{1-\Gamma}\right)^2}}\right) = \beta. \tag{4.4}$$

Wzór powyższy wyraża zależność między $\beta, \alpha, \varepsilon$ a n.

5. Dla celów praktycznych wygodnie jest przedstawić w postaci tabelarycznej zależność wyrażoną wzorem (4.4). Jako przykład podajemy

poniżej fragmenty odpowiednich tablic, w których — zgodnie z potrzebami praktyki — nie przyjmujemy stałej dokładności ε, lecz stałą dokładność względną, tzn. ε/Γ. Prawdopodobieństwo α, występujące we wzorze (1.2), przyjęliśmy za równe 0,0001. Należy zwrócić uwagę, iż wzór (4.4) jest wzorem asymptotycznym i że wobec tego wartości n, które podstawiamy, powinny być dostatecznie duże (wystarczy $n \geqslant 30$).

Współczynnik ufności jako funkcja n i Γ

$\varepsilon/\Gamma = 0{,}05$

n \ Γ	2	3	4
100	0,5160	0,2696	0,1740
500	0,8796	0,5615	0,3753
1000	0,9703	0,7778	0,5121

$\varepsilon/\Gamma = 0{,}1$

n \ Γ	2	3	4
100	0,8403	0,5127	0,3544
500	0,9955	0,8739	0,6982
1000	0,9999	0,9654	0,8495

$\varepsilon/\Gamma = 0{,}2$

n \ Γ	2	3	4
50	0,9298	0,6947	0,5047
100	0,9788	0,8358	0,6613
500	0,9999	0,9912	0,9444
1000	0,9999	0,9995	0,9887

$\varepsilon/\Gamma = 0{,}3$

n \ Γ	2	3	4
30	0,9945	0,7594	0,6000
50	0,9993	0,8281	0,7126
100	0,9999	0,9047	0,8346
500	0,9999	0,9974	0,9854

Z tabliczek tych widać, iż np. gdy $\alpha = 0{,}0001$, to chcąc mieć oszacowanie Γ (dla $\Gamma \leqslant 4$) ze współczynnikiem ufności powyżej 0,95 trzeba około 500 doświadczeń, jeśli dokładność względna oszacowania ma wynosić 0,2.

Oczywiście im większą chcemy mieć dokładność (przy danym współczynniku ufności), tym więcej potrzeba doświadczeń.

Tablice powyższe wskazują, iż na ogół nie można tu poprzestać na kilku, czy kilkudziesięciu doświadczeniach. Dla oszacowania współczynnika bezpieczeństwa należy wykonać, jak pokazują tabelki, kilkaset, a nawet i powyżej tysiąca doświadczeń (zwłaszcza przy dużej dokładności oszacowania). Należy tu zauważyć, że w przypadkach, gdy współczynnik bezpieczeństwa zależy od większej ilości zmiennych losowych, a nie tylko od wytrzymałości, potrzebna jest jeszcze większa liczba doświadczeń niż wynikałoby to z podanych tabelek.

Prace cytowane

[1] W. Wierzbicki, *Bezpieczeństwo budowli, jako zagadnienie prawdopodobieństwa*, Przegląd Techniczny 24 (1936), str. 690-691.

[2] W. Wierzbicki, *Wytrzymałość materiału ze statystycznego punktu widzenia,* Przegląd Techniczny 7-8 (1945), str. 7-9; 10 (1945), str. 7-9; 11 (1945), str. 2-5.

[3] — *W sprawie dopuszczalnych naprężeń stycznych w konstrukcjach stalowych,* Inżynieria i Budownictwo 1-2 (1950), str. 38-44.

[4] N. L. Johnson and B. L. Welch, *Applications of the non-central t-distribution,* Biometrika 31 (1940), str. 362-389.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 17. 7. 1953 r.

Т. ЧЕХОВСКИЙ, М. ФИШ, В. САДОВСКИЙ, Р. ЗАСЕМПА (Варшава)

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА

РЕЗЮМЕ

Прочность строительного материала — случайная величина и поэтому номинальные напряжения издавна устанавливались, как правило, гораздо ниже теоретической прочности R_0, например как R_0/Γ. Число Γ, благодаря своей роли, называется *коэффициентом запаса.*

Этот коэффициент в большинстве случаев устанавливался субъективно авторами соответсвующих строительных инструкций. Только лишь в работах В. Вежбицкого находим попытку создать теорию, основанную на теории вероятностей, для объективного определения коэффициента запаса.

Предлагаемая работа задается целью определить число испытаний необходимых для оценки коэффициента запаса при заранее установленным доверительным коэффициентом и определенной точности. Задача решена при условии, что прочность строительного материала—случайная величина распределена по нормальному закону (с неизвестной средней и неизвестной дисперсией). В результате получено формулу (4.4), при помощи которой составлено соответствующие таблицы, проливающие свет на число испытаний необходимых для определения коэффициента запаса.

L. CZECHOWSKI, M. FISZ, W. SADOWSKI, R. ZASĘPA (Warszawa)

ON DETERMINING THE SAFETY FACTOR

SUMMARY

The strength of any structural material is a random variable. For this reason nominal stresses have, for a long time, been determined, as a rule, below the theoretical strength R_0, *e.g.* as R_0/Γ. The number Γ, because of the rôle it plays, is called the *safety factor.* This factor has usually been determined in a subjective way by the authors of appropriate building regulations. It is only in the works of W. Wierzbicki

that we find an attempt to form a theory, based on the theory of probability, making it possible to determine the safety factor in an objective way.

This note aims at establishing the number of trials which should be made in order to estimate the safety factor with the *a priori* determined confidence factor and accuracy. The problem has been solved on the assumption that the strength of the structural material is a random variable with a normal distribution (the mean value and the standard deviation being unknown). As a result, formula (4.4) has been obtained; on its basis it has been possible to construct suitable tables, which may be a guide in determining the number of experiments necessary to determine the safety factor.