ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVII (1980)

La continuité de la section d'un ensemble semi-analytique et compact

par ZOFIA DENKOWSKA (Kraków)

Résumé. Soient E un sous-ensemble de $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$, $E_t = \{x \in \boldsymbol{R}^n;\ (x, t) \in E\}$, m la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{R}^n$, $\dot{-}$ la différence symétrique de deux ensembles.

Dans ce travail on obtient les résultats suivants:

(1) Si E est compact et $m((\mathrm{fr}\,E)_{t_0}) = 0$, on a: $m(E_t \dot{-} E_{t_0}) \to 0$ lorsque $t \to t_0$, $t \in \boldsymbol{R}^n$ (théorème (2.1)).

(2) Si E est semi-analytique dans $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ et $m(E_t \dot{-} E_{t_0}) \to 0$ lorsque $t \to t_0$, on a $m\big((\mathrm{fr}\,E)_{t_0}\big) = 0$ (théorème (3.1)).

(3) Si E est semi-analytique et compact dans $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$, on a $m(E_t \dot{-} E_{t_0}) \to 0$ lorsque $t \to t_0$, $t \in \boldsymbol{R}$ si et seulement si $\mathrm{int}\big((\mathrm{fr}\,E)_{t_0}\big) = \emptyset$.

Les exemples (4.2) et (4.3) montrent que dans le théorème (3.1) les conditions: „$m = 1$ et E est semi-analytique" ne sauraient être omises.

Dans ce travail nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que la section d'un sous-ensemble de $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ soit continue. La continuité d'une section en $t_0 \in \boldsymbol{R}^m$ signifie que $m(E_t \dot{-} E_{t_0}) \to 0$ lorsque $t \to t_0$, $t \in \boldsymbol{R}^m$. Nous utilisons ici le symbole $\dot{-}$ pour la différence symétrique des ensembles.

La définition de E_t est la suivante:

$$E_t = \{x \in \boldsymbol{R}^n;\ (x, t) \in E\}$$

c'est-à-dire que E_t est la projection de la section $\{y = t\} \cap E$ sur $\boldsymbol{R}^n$.

Nous allons montrer que pour la continuité en t_0 de la section d'un sous-ensemble compact de $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ il suffit que $\mathrm{int}\big((\mathrm{fr}\,E)_{t_0}\big)$ soit vide. Or, cette condition n'est pas nécessaire pour les sous-ensembles compacts. Si nous supposons que la dimension $m = 1$ et que l'ensemble E est compact et semi-analytique, la condition ci-dessus sera nécessaire et suffisante. Nous donnerons au Section 4 des exemples qui prouvent que „$m = 1$ et E est semi-analytique" sont des hypothèses qui ne peuvent pas être omises.

1. Nous exposerons d'abord les notations, les définitions et les faits de la théorie des ensembles semi-analytiques qui nous seront utiles. Tous les théorèmes sur les ensembles semi-analytiques sont empruntés au travail [1]. Soit E un sous-ensemble de $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$. Posons $E_t = \{x \in \boldsymbol{R}^n; (x, t) \in E\}$. Observons que:

$$(A \cup B)_t = A_t \cup B_t, \quad (A \cap B)_t = A_t \cap B_t$$

où A, B sont des sous-ensembles de $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$. Nous utilisons le symbole $\dot{-}$ pour la différence symétrique de deux ensembles i.e.

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

On vérifie facilement que pour $A = A' \cup A''$, $B = B' \cup B''$ on a $A \dot{-} B \subset (A' \dot{-} B') \cup (A'' \dot{-} B'')$.

Un sous-ensemble A de $\boldsymbol{R}^k$ est dit *semi-analytique* s'il existe, pour chaque point de $\boldsymbol{R}^k$, un voisinage U et des fonctions f_i, g_{ij}, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r$, analytiques dans U tels que

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r} \{x \in U; g_{ij}(x) > 0, f_i(x) = 0\}.$$

Voici maintenant une liste des propriétés des ensembles semi-analytiques:

(1.2) Le complémentaire d'un ensemble semi-analytique est semi-analytique.

L'intersection d'une famille finie d'ensembles semi-analytiques est semi-analytique. La réunion d'une famille localement finie d'ensembles semi-analytiques est semi-analytique.

(1.3) L'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un ensemble semi-analytique sont semi-analytiques.

(1.4) L'image réciproque d'un ensemble semi-analytique par une application analytique est semi-analytique.

On appelle partition d'un ensemble $Q \subset \boldsymbol{R}^k$ la famille $\{Q_j\}$ d'ensembles disjoints telle que $Q = \bigcup Q_j$.

Soit $\mathcal{N}$ une partition d'un ensemble $Q \subset \boldsymbol{R}^k$. Prenons $A \subset \boldsymbol{R}^k$.

On dit que la partition $\mathcal{N}$ est *compatible* avec A si et seulement si pour chaque $\Gamma \in \mathcal{N}$ on a $\Gamma \subset A$, ou $\Gamma \cap A = \emptyset$. Pour que la partition $\mathcal{N}$ soit compatible avec A il faut et il suffit que $A \cap Q = \bigcup \Gamma_j$, $\{\Gamma_j\} \subset \mathcal{N}$.

Nous utiliserons le théorème suivant (l'un des plus importants dans la théorie des ensembles semi-analytiques).

THÉORÈME (1.5). *Soient $A_1, \ldots, A_p$ des sous-ensembles semi-analytiques de $\boldsymbol{R}^k$ et $a \in \boldsymbol{R}^k$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage Q du point a, de diamètre plus petit que ε, pour lequel on peut trouver une partition finie $\mathcal{N}$ de Q, satisfaisant aux conditions suivantes*:

(i) *Les membres Γ_j de la partition $\mathcal{N}$ sont semi-analytiques et sont aussi des variétés analytiques.*

La partition $\mathcal{N}$ est compatible avec $A_1, \ldots, A_p$.

(ii) *Si $\Gamma \in \mathcal{N}$, $\dim \Gamma = s$, $(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q$ est une réunion de membres de dimension $< s$.*

(iii) *On a $a \in \overline{\Gamma}$ pour chaque $\Gamma \in \mathcal{N}$.*

La partition $\mathcal{N}$ décrite ci-dessus est appelée partition normale au point a compatible avec $A_1, \ldots, A_p$.

En utilisant le théorème (1.5) on peut montrer que l'adhérence d'un ensemble semi-analytique est semi-analytique, que chaque ensemble semi--analytique est localement connexe et qu'il admet un nombre fini de composantes connexes.

Soient Q un voisinage du point a, $\mathcal{N}$ une partition normale au point a et un point $b \in Q$. Notons V_i = la réunion des membres de dimension i. Alors $Q = V_0 \cup \ldots \cup V_k$.

THÉORÈME (1.6). *Il existe un voisinage Q' de b, de diamètre plus petit que ε (quel que soit $\varepsilon > 0$) qui satisfait aux conditions suivantes:*

(i) *Les ensembles $V_i' = V_i \cap Q'$ ont un nombre fini de composantes connexes.*

(ii) *Ces composantes forment une partition normale $\mathcal{N}'$ de Q'.*

Une telle partition $\mathcal{N}'$ est appelée partition normale induite au point b par la partition $\mathcal{N}$.

On voit que si $\Gamma \in \mathcal{N}$, $\Gamma \cap Q' \neq \emptyset$, $\dim \Gamma = n$, alors $\Gamma \cap Q'$ est la réunion de membres $\Gamma' \in \mathcal{N}'$ de dimension n. Comme $V_0 \cup \ldots \cup V_{i-1}$ est fermé dans Q (à cause de la propriété (ii) de la partition normale, théorème (1.5)), on a $Q' \cap (V_0 \cup \ldots \cup V_{i=1}) = \emptyset$ pour $b \in V_i$ et un voisinage suffisamment petit Q' de b.

On dit qu'un point $a \in E$ est un *point régulier* de E de dimension k, si pour un voisinage U de a, $U \cap E$ est une sous-variété analytique de dimension k. En utilisant le théorème (1.5) on peut montrer que l'ensemble des ponts réguliers de dimension k d'un ensemble semi-analytique est semi-analytique.

Soit A un ensemble semi-analytique. On définit la dimension de A en x, $\dim_x A$, comme le maximum des dimensions des points réguliers dans un voisinage suffisamment petit de x. Cette définition est correcte en vertue du corollaire suivant du théorème (1.5).

COROLLAIRE. *Quel que soit $x \in \overline{A}$, il existe un voisinage U de x contenant des points réguliers seulement de dimension $\leqslant n$ et l'ensemble des points réguliers de A est dense dans A. Admettons* $\dim_x A = -1$ *si $x \notin \overline{A}$ et posons par définition:*

$$\dim A = \max \textit{ des dimensions des points réguliers de } A$$

$$= \max \{\dim_x A, \, x \in A\}.$$

Le théorème (1.5) entraîne la proposition suivante:

PROPOSITION (1.7). *Lorsque U est un voisinage suffisamment petit de a, et $\mathcal{N}$ est une partition narmale au point a, compatible avec E, on a*

$$\dim_x A = \max\{\dim\Gamma;\ \Gamma \subset A,\ \Gamma\in\mathcal{N}\}.$$

Voici une liste des propriétés de la dimension d'un ensemble semi-analytique:

(1.8) A, B sont des ensembles semi-analytiques

$$A \subset B \Rightarrow \dim_x A \leqslant \dim_x B, \qquad \dim A \leqslant \dim B,$$
$$\dim_x(A\cup B) = \max(\dim_x A, \dim_x B),$$
$$\dim(A\cup B) = \max(\dim A, \dim B),$$
$$\dim_x \bar{A} = \dim_x A, \qquad \dim\bar{A} = \dim A.$$

On voit facilement que

(1.9) $\{x\in A;\ x$ est un point régulier de dimension $k\} = \operatorname{int} A$ pour $A\subset \boldsymbol{R}^k$, semi-analytique.

Nous utiliserons le théorème suivant de Lelong:

(1.10) Tout ensemble semi-analytique relativement compact de dimension k est de k dimension mesure de Lebesgue finie égale à la mesure de sa partie régulière de dimension k.

Les démonstrations de tous les théorèmes cités ci-dessus se trouvent dans le travail [1].

Nous donnerons ici la démonstration d'un simple corollaire:

(1.11) *Soit A un ensemble semi-analytique contenu dans $\boldsymbol{R}^k$. Alors $m(A) > 0$ si et seulement si $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. ($m$ signifie la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{R}^k$).*

On voit facilement que $\operatorname{int} A\neq\emptyset$ entraîne $m(A)>0$. Admettons donc que $m(A)>0$. Si A n'est pas borné, nous représentons $\boldsymbol{R}^k$ comme la réunion d'une suite croissante de boules U_i. Comme $m(A)>0$, il existe une boule U de cette suite telle que $m(A\cap U)>0$. En vertu de (1.10) la mesure de $A\cap U$ est finie et égale à la mesure de sa partie régulière qui est, d'après (1.9), justement $\operatorname{int}(A\cap U) = (\operatorname{int} A)\cap U$. Nous avons donc les inégalités

$$m(\operatorname{int} A) \geqslant m\big(\operatorname{int}(A\cap U)\big) = m(A\cap U) \geqslant 0.$$

Donc $\operatorname{int} A$ est non vide.

2. Maintenant nous allons montrer que $m\big((\operatorname{fr} E)_{t_0}\big) = 0$ est une condition suffisante pour que la section d'un ensemble compact soit continue.

On peut admettre $t_0 = 0$.

THÉORÈME (2.1). *Soit E un sous-ensemble compact de $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$. Notons m la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{R}^n$. Si $m\big((\operatorname{fr} E)_0\big) = 0$ alors*

(i) $m\big((\operatorname{fr} E)_t \dot{-} (\operatorname{fr} E)_0\big) \to 0$ *lorsque* $t \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}^m$,

(ii) $m_i'\big((\operatorname{int} E)_t \dot{-} (\operatorname{int} E)_0\big) \to 0$ *lorsque* $t \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}^m$.

Remarque. Comme $E = \operatorname{fr} E \cup \operatorname{int} E$, en vertu de (1.1) on déduira du théorème ci-dessus que

(iii) $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ lorsque $t \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}^m$.

Démonstration du théorème (2.1). Nous allons d'abord démontrer un lemme.

LEMME (2.2). *Soit* $\{A_n\}$ *une suite de sous-ensembles mesurables d'une espace métrique* (X, m). *Notons* $\limsup A_s = \bigcap_{s=1}^{\infty} \big(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_{s+r}\big) = \{x \in X;\ x$ *appartient à un nombre infini de* $A_s\}$. *Si* $m\big(\bigcup_{s=1}^{\infty} A_s\big) < \infty$, *alors on a* $m(\limsup A_s) \geqslant \limsup m(A_s)$.

Démonstration du lemme. Comme la suite des ensembles $\big\{\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{s+r}\big\}$ est décroissante, et que ce sont des ensembles de mesure finie, on a ([2]):

$$m\Big(\bigcap_{s=1}^{\infty} \big(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_{s+r}\big)\Big) = \inf_s \Big\{m\big(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_{s+r}\big)\Big\}.$$

Il en résulte que

$$m(\limsup A_s) = \inf\Big\{m\big(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_{s+r}\big)\Big\}.$$

Nous allons démontrer que $\inf m\big(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_{s+r}\big) \geqslant \limsup m(A_s)$. Observons que pour chaque s_0 $\limsup m(A_s) \leqslant m\big(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_{s_0+r}\big)$. Ceci résulte du fait que $m(A_s) \leqslant m\big(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_{s_0+r}\big)$ pour $s \geqslant s_0$. Ainsi on a $m(\limsup A_s) = \inf m\big(\bigcup_{r=0}^{\infty} A_{s+r}\big) \geqslant \limsup m(A_s)$. Passons maintenant à la démonstration du théorème (2.1). Nous allons démontrer (i).

Comme $(\operatorname{fr} E)_t \dot{-} (\operatorname{fr} E)_0 = \big((\operatorname{fr} E)_t \setminus (\operatorname{fr} E)_0\big) \cup \big((\operatorname{fr} E)_0 \setminus (\operatorname{fr} E)_t\big)$, il suffit de montrer que $m\big((\operatorname{fr} E)_t \setminus (\operatorname{fr} E)_0\big) \to 0$ et $m\big((\operatorname{fr} E)_0 \setminus (\operatorname{fr} E)_t\big) \to 0$ lorsque $t \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}^m$. Observons que $(\operatorname{fr} E)_0 \setminus (\operatorname{fr} E)_t \subset (\operatorname{fr} E)_0$, donc $m\big((\operatorname{fr} E)_0 \setminus (\operatorname{fr} E)_t\big) = 0$. Supposons maintenant que $m\big((\operatorname{fr} E)_t \setminus (\operatorname{fr} E)_0\big)$ ne soit pas convergente vers 0. Alors il existe une suite $\{c_s\} \subset \boldsymbol{R}^m$, $c_s \to 0$ telle que $(\operatorname{fr} E)_{c_s} \setminus (\operatorname{fr} E)_0$ est de mesure plus grande qu'un $\varepsilon > 0$. Appliquons maintenant le lemme (2.2) aux ensembles $A_s = (\operatorname{fr} E)_{c_s}$ dans l'espace $(\boldsymbol{R}^n, m)$. Ils vérifient la condition $m\big(\bigcup_{s=1}^{\infty} A_s\big) < \infty$ puisque E est compact.

Le lemme (2.2) entraîne l'inégalité suivante:

$$m\big(\limsup (\operatorname{fr} E)_{c_s}\big) \geqslant \limsup m\big((\operatorname{fr} E)_{c_s}\big).$$

Comme pour chaque s on a $m\big((\mathrm{fr}\,E)_{c_s}\big) \geqslant m\big((\mathrm{fr}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{fr}\,E)_0\big) > \varepsilon$, on en déduit que $\limsup m\big((\mathrm{fr}\,E)_{c_s}\big) > \varepsilon$, d'où $m\big(\limsup (\mathrm{fr}\,E)_{c_s}\big) > \varepsilon$.

Nous allons démontrer que $\limsup(\mathrm{fr}\,E)_{c_s}$ est contenu dans $(\mathrm{fr}\,E)_0$. Prenons un point $x \in \limsup(\mathrm{fr}\,E)_{c_s}$. Pour un tel point il existe une suite $\{c_{s_i}\} \subset \{c_s\}$ telle que $x \in (\mathrm{fr}\,E)_{c_{s_i}}$ pour chaque indice s_i. Cela signifie que $(x, c_{s_i}) \in \mathrm{fr}\,E$ pour chaque s_i.

Comme $\mathrm{fr}\,E$ est un ensemble fermé, il en résulte que la limite $(x, 0)$ appartient aussi à $\mathrm{fr}\,E$ i.e. $x \in (\mathrm{fr}\,E)_0$. Ainsi nous avons montré que $\limsup(\mathrm{fr}\,E)_{c_s} \subset (\mathrm{fr}\,E)_0$. Or, l'ensemble $\limsup(\mathrm{fr}\,E)_{c_s}$ est de mesure positive donc il ne peut pas etre contenu dans $(\mathrm{fr}\,E)_0$, de mesure 0 par hypothèse, ce qui donne une contradiction. Donc $m\big((\mathrm{fr}\,E)_t \setminus (\mathrm{fr}\,E)_0\big) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Passons maintenant à la dèmonstration de (ii). Dans ce cas aussi il suffit de montrer que

$$(*) \qquad m\big((\mathrm{int}\,E)_t \setminus (\mathrm{int}\,E)_0\big) \to 0 \quad \text{lorsque } t \to 0$$

et

$$(**) \qquad m\big((\mathrm{int}\,E)_0 \setminus (\mathrm{int}\,E)_t\big) \to 0 \quad \text{lorsque } t \to 0.$$

Le résultat $(*)$ s'obtient facilement comme dans le cas (i). Supposons que $(*)$ ne soit pas vrai. Par conséquent il existe une suite $\{c_s\} \subset \boldsymbol{R}^m$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\lim c_s = 0$ et $m\big((\mathrm{int}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0\big) > \varepsilon$ pour tout s. Posons dans le lemme (2.2) $A_s = (\mathrm{int}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0$. D'après (2.2) on a donc

$$m\Big(\limsup\big((\mathrm{int}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0\big)\Big) \geqslant \limsup\Big\{m\big((\mathrm{int}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0\big)\Big\} > \varepsilon.$$

Nous allons montrer que $\limsup\big((\mathrm{int}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0\big) \subset (\mathrm{fr}\,E)_0$. Soit $x \in \limsup(\mathrm{int}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0$. Pour un tel point x il existe une sous-suite $\{c_{s_i}\} \subset \{c_s\}$ telle que pour chaque s_i $x \in (\mathrm{int}\,E)_{c_{s_i}} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0$. Par conséquent $(x, 0) \in \mathrm{int}\,E$ et $\{(x, c_{s_i})\} \subset \mathrm{int}\,E$. Comme E est fermé la limite $(x, 0)$ de (x, c_{s_i}) appartient à E. Ainsi on a $(x, 0) \in \mathrm{fr}\,E$.

Nous avons obtenu le résultat: $\limsup\big((\mathrm{int}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0\big) \subset (\mathrm{fr}\,E)_0$. Or, l'ensemble $\limsup\big((\mathrm{int}\,E)_{c_s} \setminus (\mathrm{int}\,E)_0\big)$ est de mesure positive et $m\big((\mathrm{fr}\,E)_0\big) = 0$, ce qui mène à une contradiction.

Il reste donc à prouver $(**)$. Il s'agit de montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|t| < \delta \Rightarrow m\big((\mathrm{int}\,E)_0 \setminus (\mathrm{int}\,E)_t\big) < \varepsilon.$$

$$\big(|t| = \sqrt{(t_1)^2 + \ldots + (t_m)^2}\big).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. L'ensemble $(\mathrm{int}\,E)_0$ étant mesurable, il existe un ensemble fermé K contenu dans $(\mathrm{int}\,E)_0$ tel que $m\big((\mathrm{int}\,E)_0 \setminus K\big) < \varepsilon$ ([2]). Comme E est compact, il en est de même de K.

L'ensemble compact $K \times \{0\}^m$ est contenu dans $\mathrm{int}\,E$ puisque $x \in K \Rightarrow x \in (\mathrm{int}\,E)_0 \Leftrightarrow (x, 0) \in \mathrm{int}\,E$. Donc il existe un $\delta > 0$ tel que l'ensemble

$$C_\delta = \big\{(x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m;\ \varrho\big((x, t), K \times \{0\}^m\big) < \delta\big\}$$

est contenu dans $\operatorname{int} E$ (ϱ désigne la métrique dans $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$). Nous montrerons que c'est le δ cherché pour notre ε. On a:

$$(\operatorname{int} E)_0 \setminus (\operatorname{int} E)_t = \big((\operatorname{int} E)_0 \setminus (\operatorname{int} E)_t\big) \cap \big((\operatorname{int} E)_0 \setminus K\big) \cup \big((\operatorname{int} E)_0 \setminus (\operatorname{int} E)_t\big) \cap K.$$

Comme le premier de ces deux ensembles est contenu dans $(\operatorname{int} E)_0 \setminus K$, il en résulte que sa mesure est plus petite que ε. Nous allons montrer que pour $t \in \boldsymbol{R}^m$ tels que $|t| < \delta$ le second ensemble est vide. En effect, soit $x \in K$. Alors $(x, 0) \in K \times \{0\}^m$. Soit $t \in \boldsymbol{R}^m$, $|t| < \delta$. Par conséquent $\varrho\big((x, t), (x, 0)\big) < \delta$. Comme $(x, 0) \in K \times \{0\}^m$, il en résulte que $(x, t) \in C_\delta \subset \operatorname{int} E$, d'où l'on obtient $x \in (\operatorname{int} E)_t$.

Donc $K \subset (\operatorname{int} E)_t$ pour $|t| < \delta$. On en déduit que pour $|t| < \delta$ l'ensemble $\big((\operatorname{int} E)_0 \setminus (\operatorname{int} E)_t\big) \cap K$ est vide.

Remarque. Le théorème (2.1) n'est plus vrai si l'on suppose seulement E fermé au lieu de supposer E compact.

Pour le montrer il suffit de prendre l'exemple suivant:

Soit T_k le triangule de sommets $\big((k, 0), (k-1, 1), (k+1, 1)\big)$ dans $\boldsymbol{R}^2$. Soit $E = \bigcup_{k \in 2N} T_k$. L'ensemble E est fermé, non compact et il vérifie la condition $m\big((\operatorname{fr} E)_0\big) = 0$ (m étant la mesure de Lebesque dans $\boldsymbol{R}$).

Or, la mesure de $E_t \dot{-} E_0$ est infini pour $t \in (0, 1)$.

COROLLAIRE (2.3). *Soit E un ensemble semi-analytique compact. Pour que $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ lorsque $t \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}^m$ il suffit que* $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big) = \emptyset$.

Démonstration. Il suffit de montrer que les deux conditions: $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big) = \emptyset$ et $m\big((\operatorname{fr} E)_0\big) = 0$ sont équivalentes pour un ensemble semi-analytique. Or, cela est bien vrai d'après (1.11).

3. Nous allons démontrer le

THÉORÈME (3.1). *Soit E un sous-ensemble semi-analytique de $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$. Si $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ lorsque $t \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}$ on a* $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big) = \emptyset$ *(m désigne la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{R}^n$).*

Démonstration. Observons que

$$E_t \cap K \dot{-} E_0 \cap K = (E_t \dot{-} E_0) \cap K \subset E_t \dot{-} E_0$$

pour chaque sous-ensemble $K \subset \boldsymbol{R}^n$. Alors $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ lorsque $t \to 0$ implique que $m(E_t \cap K \dot{-} E_0 \cap K) \to 0$ lorsque $t \to 0$ pour chaque $K \subset \boldsymbol{R}^n$.

Supposons maintenant que $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big) \neq \emptyset$. Nous allons montrer qu'il existe alors un ensemble $K \subset \boldsymbol{R}^n$ tel que $m(E_t \cap K \dot{-} E_0 \cap K)$ ne converge pas vers 0 lorsque $t \to 0$.

Soit $a \in \operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big)$. Comme les ensembles $(\operatorname{fr} E)_0$ et $\{t = 0\} \cap \operatorname{fr} E$ sont analytiquement isomorphes, on a $(a, 0) \in \operatorname{int}(\{t = 0\} \cap \operatorname{fr} E)$ dans $\boldsymbol{R}^n \times \{0\}$. On prend maintenant la partition normale $\mathcal{N} = \{\Gamma_j\}$ compatible avec les ensembles: $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E$, E, $\{t = 0\} \cap \operatorname{fr} E$ semi-analytiques à cause de (1.2), (1.3).

Comme $(a, 0) \in \operatorname{int}(\{t = 0\} \cap \operatorname{fr} E)$, $(a, 0)$ est un point régulier de dimension n de l'ensemble $\{t = 0\} \cap \operatorname{fr} E$. Le théorème (2.7) entraîne l'existence d'un tel membre Γ_0 de $\mathcal{N}$ que

$$\Gamma_0 \subset \{t = 0\} \cap \operatorname{fr} E, \quad \dim \Gamma_0 = n.$$

Il y a deux cas possibles:

(i) $\Gamma_0 \subset E$,

(ii) $\Gamma_0 \cap E = \emptyset$.

Considérons d'abord le cas (i). Dans ce cas $\Gamma_0 \cap (\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E) = \emptyset$. Comme la partition normale $\mathcal{N}$ est compatible avec $R^{n+1} \setminus E$, on obtient:

$$(\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E) \cap V = \bigcup \Gamma; \quad \Gamma \in \mathcal{N}' \subset \mathcal{N}.$$

Il en résulte que

$$\overline{(\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E)} \cap V = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{N}'} \overline{\Gamma} \cap V = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{N}'} (\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap V \cup \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{N}'} \Gamma.$$

(V est le voisinage dont $\mathcal{N}$ est la partition.)

Observons que $\Gamma_0 \subset \operatorname{fr} E = \operatorname{fr}(\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E)$, ce qui implique $\Gamma_0 \subset \subset \overline{(\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E)}$. Comme Γ_0 est disjoint de $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E$, on a $\Gamma_0 \subset \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{N}'} (\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap V$, d'où l'on déduit qu'il existe un membre $(\overline{\Gamma'} \setminus \Gamma') \cap V$ coupant Γ_0.

En vertu de (1.5) on a $(\overline{\Gamma'} \setminus \Gamma') \cap V = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{N}^*} \Gamma$, $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$. Comme Γ_0 coupe cette réunion il s'ensuit qu'il coupe aussi un de ses membres. Les membres de la partition normale étant disjoints, Γ_0 appartient à $\mathcal{N}^*$. Par conséquent $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma'} \setminus \Gamma'$ et, comme $\dim \Gamma_0 = n$, on a $\dim \Gamma' = n+1$. Nous avons ainsi établi, dans le cas où $\Gamma_0 \subset E$, l'existence d'un tel membre Γ' de la partition $\mathcal{N}$ que

$$\Gamma' \subset \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E, \quad \Gamma_0 \subset \overline{\Gamma'} \setminus \Gamma', \quad \dim \Gamma' = n+1.$$

Passons maintenant au cas (ii). On peut répéter toute la construction, en remplacant $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E$ par E. On voit alors qu'il existe un $\Gamma'' \in \mathcal{N}$ tel que:

$$\Gamma'' \subset E, \quad \Gamma_0 \subset \overline{\Gamma''} \setminus \Gamma'', \quad \dim \Gamma'' = n+1.$$

Comme $\Gamma_0 \subset \{t = 0\}$, on peut choisir le point $(b, 0) \in \Gamma_0$. En vertu du théorème (1.6), comme $\dim \Gamma_0 = n$, on peut trouver un voisinage Q' de $(b, 0)$ disjoint des membres de $\mathcal{N}$ de dimensions plus petites que n.

On prend pour Q' la partition normale $\mathcal{N}_{(b,0)}$ induite dans $(b, 0)$ par la partition $\mathcal{N}$. Dans $\mathcal{N}_{(b,0)}$ il n'y a que des membres de dimension n et $n+1$. Nous allons démontrer que $\Gamma_0 \cap Q'$ est le seul membre de dimension n de la partition $\mathcal{N}_{(b,0)}$. Comme $(b, 0) \in \Gamma_0 \cap Q'$, $\Gamma_0 \cap Q'$ n'est pas vide et en vue de (1.6) il est la réunion des membres de dimension n de la partition $\mathcal{N}_{(b,0)}$. Soit Γ un tel membre. Alors Γ est fermé dans Q'. Sinon, l'ensemble non vide $(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap Q'$ serait la réunion de membres de $\mathcal{N}_{(b,0)}$ de dimensions plus petites que n. Or, il n'y a pas de tels membres dans $\mathcal{N}_{(b,0)}$.

Selon le théorème (1.5), $(b, 0)$ appartient à la cohérence de chaque membre de $\mathscr{N}_{(b,0)}$. Comme les membres de dimension n sont fermés dans Q' et disjoints, il n'existe qu'un seul membre de dimension n dans $\mathscr{N}_{(b,0)}$, notamment $\Gamma_0 \cap Q'$. Ainsi on a

$$Q' = \Gamma_0 \cap Q' \cup \text{ la réunion des membres de dim } n+1 \text{ de } \mathscr{N}_{(b,0)}.$$

Prenons le voisinage de $(b, 0)$ de la forme $K \times (-c, c)$ contenu dans Q'. Comme Γ_0 est une sous-variété de $\boldsymbol{R}^n \times \{0\}$ de dimension n, il est ouvert dans $\boldsymbol{R}^n \times \{0\}$ et on peut admettre que $K \times \{0\} \subset \Gamma_0$.

Les ensembles $K \times (0, c)$ et $K \times (-c, 0)$ sont disjoints de Γ_0, donc ils sont contenus dans la réunion des membres de dimension $n+1$. Observons que chacun d'eux est contenu dans un seul membre car les membres de $\mathscr{N}_{(b,0)}$ et les ensembles en question sont tous ouverts et connexes.

Considérons le membre Γ de la partition $\mathscr{N}$. Nous allons montrer que chacun des ensembles $K \times (0, c)$, $K \times (-c, 0)$ est contenu dans Γ ou bien disjoint de lui. Supposons que $K \times (0, c) \cap \Gamma \neq \emptyset$. En vertu de (1.6) on obtient:

$$\Gamma \cap Q' = \text{la réunion de certains membres de } \mathscr{N}_{(b,0)} \text{ de dim } n+1.$$

Comme $K \times (0, c)$ est contenu dans un seul membre de $\mathscr{N}_{(b,0)}$, il est contenu dans le membre de la réunion ci-dessus qu'il coupe, d'où il résulte que $K \times (0, c) \subset \Gamma$.

Revenons maintenant aux deux cas considérés dans notre démonstration. Prenons d'abord le cas (i). Alors $\Gamma_0 \subset E$ et il existe un $\Gamma' \in \mathscr{N}$ tel que $\dim \Gamma' = n+1$, $\Gamma' \subset \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E$, $\Gamma_0 \subset \overline{\Gamma'} \setminus \Gamma'$. Supposons que les ensembles $K \times (0, c)$, $K \times (-c, 0)$ soient tous les deux disjoints de Γ'. En vertu de l'inclusion $K \times \{0\} \subset \Gamma_0 \subset \overline{\Gamma'} \setminus \Gamma'$ on obtient ainsi que $K \times (-c, c) \cap \cap \Gamma' = \emptyset$. Or $K \times (-c, c)$ est un voisinage de $(b, 0) \in \Gamma_0 \subset \overline{\Gamma'}$. Donc on peut admettre que, par exemple, $K \times (0, c) \cap \Gamma' \neq \emptyset$ (le cas où $K \times \times (-c, 0) \cap \Gamma' \neq \emptyset$ étant analogue). Comme $\Gamma_0 \subset E$ on a $E_0 \cap K = K$, puisque $K \times \{0\} \subset \Gamma_0 \subset E$. L'inclusion

$$K \times (0, c) \subset \Gamma' \subset \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus E$$

implique $E_t \cap K = \emptyset$ lorsque $t \in (0, c)$. Ainsi on obtient

$$m\big((E_0 \dot{-} E_t) \cap K\big) = m\big((E_0 \setminus E_t) \cap K\big) = m(K) \qquad \text{lorsque } t \in (0, c).$$

K est ouvert et non vide dans $\boldsymbol{R}^n$, donc $m(K) > 0$. Nous avons trouvé dans le cas (i) un ensemble $K \subset \boldsymbol{R}^n$ tel que $m\big((E \dot{-} E_0) \cap K\big)$ ne tend pas vers 0 lorsque $t \to 0$.

Passons maintenant au cas (ii), i.e. au cas où $\Gamma_0 \cap E = \emptyset$. On prend le membre Γ'' dont nous avons montré l'existence. L'un des ensembles $K \times (0, c)$, $K \times (-c, 0)$ est contenu dans Γ'', ce qui résulte d'un raisonnement analogue à celui du cas précédent. Supposons que ce soit $K \times (0, c)$.

On a donc

$$K \times (0, c) \subset \Gamma'' \subset E,$$

d'où il résulte $E_t \cap K = K$ lorsque $t \in (0, c)$. D'autre part, $E_0 \cap K = \emptyset$, puisque $K \subset \Gamma_0$ et $\Gamma_0 \cap E = \emptyset$. Dans le cas (ii) on obtient donc

$$m\big((E_t \dot{-} E_0) \cap K\big) = m\big((E_t \setminus E_0) \cap K\big) = m(K) \quad \text{lorsque } t \in (0, c).$$

Comme $m(K) > 0$ il en résulte que $m\big((E_t \dot{-} E_0) \cap K\big)$ ne tend pas vers 0 lorsque $t \to 0$, ce qui termine la démonstration.

Le théorème (3.1) et le corollaire (2.3) impliquent immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE (3.2). *Soit E un ensemble semi-analytique compact dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Alors $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ lorsque $t \to 0$ si et seulement si* $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big) = \emptyset$.

4. Nous allons démontrer que pour que le théorème (3.1) soit vrai les conditions „$m = 1$ et E est semi-analytique" sont indispensables. Dans ce but nous construirons deux exemples. L'exemple (4.2) est celui d'un ensemble semi-analytique et compact dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ tel que $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ lorsque $t \to 0$, $t \in \mathbf{R}^2$, mais $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big) \neq \emptyset$. Dans l'exemple (4.3) on construit un ensemble E compact dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tel que $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ lorsque $t \to 0$, $t \in \mathbf{R}$ mais $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big) \neq \emptyset$ (d'où il résulte que $m\big((\operatorname{fr} E)_0\big) \neq 0$).

Pour construire l'exemple (4.2) nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant:

LEMME (4.1). *Soit $F \subset \mathbf{R}^n$ l'ensemble*

$$F = \{(x, z);\, g_2(x) < z < g_1(x)\},$$

où

$$g_1(x) = D\big(-(x-d)^2 + b\big), \quad g_2(x) = D\big(-(x-d)^2 + b\big) - C,$$
$$D > 0, \quad b > 0, \quad D \cdot b > C > 0.$$

Alors $m(F_a) = m\big(\{x \in \mathbf{R};\, (x, a) \in F\}\big) \leqslant 2\sqrt{C/D}$ pour $a \in \mathbf{R}$ (m est la mesure de Lebesque dans $\mathbf{R}$).

EXEMPLE (4.2). On prend les deux polynomes suivants:

$$f_1(x, y) = y \cdot \big(-(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}\big), \quad f_2(x, y) = y \cdot \big(-(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}\big) - y^2.$$

Observons que $f_1(x, y) > f_2(x, y)$ si $y \neq 0$, $f_1(x, 0) = f_2(x, 0) = 0$.

Quand $y > 0$ on a:

$$f_1(x, y) > 0 \text{ si et seulement si } x \in (0, 1).$$

Notons W un ensemble semi-analytique ouvert dans $\mathbf{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z);\, 0 < x < 1,\, 0 < y < \tfrac{1}{5},\, f_2(x, y) < z < f_1(x, y)\}.$$

On prend comme E l'ensemble semi-analytique:

$$E = K \setminus W \quad \text{où} \quad K = \{0 \leqslant x \leqslant 1\} \times \{-\tfrac{1}{5} \leqslant y \leqslant \tfrac{1}{5}\} \times \{-\tfrac{1}{2} \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}\}.$$

E est un ensemble compact. Comme $(0,1)\times\{0\}\times\{0\}\subset \operatorname{fr} E$, $\operatorname{int}\big((\operatorname{fr} E)_0\big)$ est non vide. Nous allons montrer que $m(E_t\setminus E_0)\to 0$ et $m(E_0\setminus E_t)\to 0$ lorsque $t\to 0$.

Observons que $E_0 = [0,1]$ et que $E_t\setminus E_0 \subset K_t\setminus[0,1] = \emptyset$. D'autre part

$$E_0\setminus E_t = [0,1]\setminus(K_t\setminus W_t) = ([0,1]\setminus K_t)\cup([0,1]\cap W_t),$$

Comme $[0,1]\setminus K_t = \emptyset$ quand $|y|\leqslant\frac{1}{5}$, $|z|\leqslant\frac{1}{2}$, il suffit de prouver que $m(W_t)\to 0$ lorsque $t\to 0$. Observons que

$$W_t = \begin{cases}\emptyset & \text{si } y\leqslant 0,\\ \{x\in(0,1); f_2(x,y)<z<f_1(x,y)\} & \text{si } y>0.\end{cases}$$

On en obtient $m(F_z^{(y)})\leqslant 2\sqrt{y}$ où

$$F_z^{(y)} = \{x\in \boldsymbol{R}; f_2(x,y)<z<f_1(x,y)\}.$$

Observons que $F_z^{(y)} = W_t$ si $y\in(0,\frac{1}{5})$. Nous avons obtenu:

$$m(W_t) = \begin{cases}0 & \text{si } y\leqslant 0,\\ m(F_z^{(y)})\leqslant 2\sqrt{y} & \text{si } y\in(0,\frac{1}{5}).\end{cases}$$

Alors $m(W_t)\to 0$ lorsque $t\to 0$, $t=(y,z)\in\boldsymbol{R}^2$.

Exemple (4.3). Soit $B=[0,1]\times[-1,1]$. Soit

$$A_k = \left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$$

une suite de segments sur l'axe t. Pour chaque $k\in N$ on prend sur l'axe x les k segments:

$$D_i^k = \left(\frac{i\cdot(k-1)}{k^2},\frac{i\cdot k}{k^2}\right),\qquad i=1,\dots,k.$$

Prenons comme E l'ensemble $B\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i^k\times A_k$. E est un ensemble compact, mais non semi-analytique. Observons que:

$$E_t = \begin{cases}[0,1] & \text{si } t\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k,\\ [0,1]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}D_i^k & \text{si } t\in A_k.\end{cases}$$

Donc $E_t\setminus E_0$ est vide pour chaque $t\in R$. D'autre part

$$E_0\setminus E_t = \begin{cases}\emptyset & \text{si } t\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k,\\ \bigcup\limits_{i=1}^{k}D_i^k & \text{si } t\in A_k.\end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k} D_i^k\right) = \frac{1}{k},$$

d'où il résulte que $m(E_t \dot{-} E_0) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Nous allons montrer que $[0, 1] \subset (\mathrm{fr}E)_0$. Soit $x \in [0, 1]$. Il suffit de montrer que $(x, 0) \in \mathrm{fr}E$. Supposons, au contraire, que $(x, 0) \notin \mathrm{fr}E$. Comme $(x, 0) \in E$, on a $(x, 0) \in \mathrm{int}E$ et il existe un voisinage de $(x, 0)$ de la forme $(x-a, x+a) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ contenu dans E. Prenons K_1 tel que $1/k < \varepsilon$ pour $k \geqslant K_1$. Alors $A_k \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ pour $k \geqslant K_1$.

Prenons ensuite K_2 tel que pour $k \geqslant K_2$

$$\frac{k-1}{k^2} < 2a$$

et soit $k_0 = \max(K_1, K_2)$.

Comme $A_{k_0} \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, on a $(x-a, x+a) \times A_{k_0} \subset E$, d'où il résulte que pour $t \in A_{k_0}$ le segment $(x-a, x+a)$ est contenu dans E_t. Or, pour $t \in A_{k_0}$, $E_t = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} D_i^{k_0}$, donc E_t est la réunion de segments disjoints dont la longueur ne dépasse pas $(k_0-1)/k_0^2$. Nous avons choisi k_0 de manière que l'inégalité

$$\frac{k_0-1}{k_0^2} < 2a$$

soit vraie, donc le segment $(x-a, x+a)$ ne peut être contenu dans E_t, ce qui mène à une contradiction.

Bibliographie

[1] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Bur-sur-Yvette 1965 (preprint).

[2] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, New Jersey, Prentice Hall, 1964.

Reçu par la Rédaction le 3. 11. 1976