COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LVIII 1990 FASC. 2

SUR LE RANG ET LA DÉFINISSABILITÉ DES OPÉRATIONS IMPLICITES DANS LES CLASSES D'ALGÈBRES

PAR

MICHEL HÉBERT* (MONTRÉAL, QUÉBEC)

1. Introduction. Soit τ un type finitaire, K une classe de τ-algèbres (considérée avec tous ses homomorphismes) et U son foncteur d'oubli dans la catégorie des ensembles. Pour chaque cardinal α, il existe des familles

$$\sigma = \{\sigma_{\mathfrak{A}}\colon (U\mathfrak{A})^{\alpha} \to U\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in K\}$$

de fonctions qui, sans être nécessairement des réalisations de τ-termes, sont néanmoins préservées par tous les homomorphismes de K. La signification et le comportement de ces *opérations implicites dans* K sont devenus plus clairs depuis la percée du point de vue catégorique en algèbre universelle ([16], [17]), et on les rencontre dans des travaux dont les motivations et le traitement sont très divers: [25], [2] (K = les algèbres finies d'une variété), [15] (complétion algébrique de U), [12]–[14] (définissabilité des opérations implicites), [3] (K = un singleton).

Les définitions précises sont rappelées à la prochaine section, mais disons qu'en gros, le *rang* d'une opération implicite est le nombre de variables dont elle dépend effectivement, et le *rang de la complétion algébrique de* U (lorsque celle-ci et celui-là existent) est le plus petit cardinal infini régulier supérieur au rang de toutes les opérations implicites.

Si K est fermée pour les produits (construits de la manière habituelle, i.e. dans la catégorie de toutes les τ-algèbres) et les sous-algèbres, alors K a toutes les algèbres librement engendrées, et donc les opérations implicites sont toutes issues de termes (et donc sont de rang fini). Pour que ce dernier but soit atteint il suffit en fait que K ait les algèbres librement engendrées sur une classe propre de cardinaux, ce qui est le cas par exemple lorsque K est fermée pour les produits sous-directs [4]. On montre ici que la fermeture pour les produits et les ultraproduits (respectivement les produits finis, les puissances et les équivalences élémentaires) suffit pour que les opérations implicites soient toutes *explicitement définissables dans* K par des formules finitaires *pures*, i.e. de la

* Avec le soutien financier du CRSNG (Canada) et du FCAR (Québec).

forme $\exists x(\bigwedge_{i\in I} \phi_i)$ avec les ϕ_i atomiques (respectivement par des formules positives-existentielles d'un langage $L_{\beta\beta}(\tau)$), et donc soient de rang fini (respectivement $< \beta$). Les exemples des corps et des groupes nilpotents montreront que ces hypothèses peuvent difficilement être affaiblies dans le cas des rangs finis.

Si U a un adjoint à gauche (e.g., si K est fermé pour les produits et les égalisateurs) et préserve les colimites filtrées (e.g., si K est fermé pour les ultraproduits et les égalisateurs, auquel cas K est en fait élémentaire), alors sa complétion algébrique (existe et) est de rang $\aleph_0$ (ceci vient du fait qu'il existe alors, pour chaque α, une "algèbre $\mathfrak{N}_K(\alpha)$ des opérations implicites α-aires dans K", laquelle est, lorsque α est infini, la colimite dans K d'un diagramme filtré dont les objects sont les $\mathfrak{N}_K(n)$, $n \in N$). On étendra cette conclusion sur U aux classes K qui sont fermées pour les ultraproduits et *libérables* en tout cardinal α, i.e. pour lesquelles $\mathfrak{N}_K(\alpha)$ existe et (sans être nécessairement dans K) est égal à $\mathfrak{N}_{K'}(\alpha)$, où $K' = K \cup \{\mathfrak{N}_K(\alpha)\}$. Plus généralement, on montre que K (quelconque) est libérable en α si et seulement si les opérations implicites α-aires dans K sont définissables dans K' par des formules pures (non nécessairement finitaires).

Une conséquence facile de ces résultats sera une version améliorée (et une preuve d'esprit tout différent) des résultats principaux de [30] caractérisant les classes K d'algèbres qui sont *presqu'équationnelles*, c'est-à-dire pour lesquelles il existe un isomorphisme entre K et une variété finitaire qui commute avec les foncteurs d'oubli.

2. Notations, folklore et exemples. Un type τ est ici une classe de symboles d'opération (d'arités quelconques). Toute classe K de τ-algèbres sera supposée non triviale (i.e. contenir une algèbre ayant plusieurs éléments) et fermée pour les isomorphismes; K sera au besoin identifiée à la sous-catégorie pleine de $V(\tau)$ (la (méta-)catégorie [24] de toutes les τ-algèbres et des τ-homomorphismes) qu'elle engendre. Tout cardinal est identifié à l'ensemble des ordinaux qui le précèdent. La cardinalité d'un ensemble X est notée $|X|$. U_K (U si le contexte est clair) et U_τ désignent les foncteurs d'oubli dans la catégorie des ensembles pour K et $V(\tau)$ respectivement.

Une *opération implicite α-aire dans K* est un élément σ de la classe $\mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$ des transformations naturelles de U^α ($= \mathrm{Ens}(\alpha, U-)$) dans U. On notera τ^σ l'extension $\tau \cup \{\sigma\}$ de τ, et K^σ la classe

$$\{\mathfrak{A}^\sigma \mid \mathfrak{A} \in K\} \subseteq V(\tau^\sigma),$$

où $\mathfrak{A}^\sigma$ est la τ^σ-expansion de $\mathfrak{A}$ pour laquelle l'interprétation de σ est $\sigma_{\mathfrak{A}}$. De même pour

$$\tau^\alpha = \bigcup \{\tau^\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Nat}(U^\alpha, U)\},$$

$\mathfrak{A}^\alpha$ et K^α, ainsi que pour

$$\tau^{\alpha -} = \bigcup \{\tau^\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Nat}(U^\beta, U), \beta < \alpha\},$$

$\mathfrak{A}^{\alpha -}$ et $K^{\alpha -}$. Clairement K, K^σ, K^α et $K^{\alpha -}$ sont *canoniquement* isomorphes entre elles, i.e. il existe des isomorphismes entre elles qui commutent avec leurs foncteurs d'oubli respectifs. σ est *de rang* β si β est le cardinal minimal tel qu'il existe une fonction h: $\beta \to \alpha$ et une opération implicite β-aire σ' tels que pour tout $f \in U^\alpha \mathfrak{A}$ (i.e. toute fonction f: $\alpha \to U\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in K$), on ait $\sigma_{\mathfrak{A}}(f) = \sigma'_{\mathfrak{A}}(fh)$. Le *rang de* K (s'il existe) est le plus petit cardinal infini régulier supérieur au rang de toutes ses opérations implicites. On le dit *finitaire* s'il est égal à $\aleph_0$. Le *rang de* τ est le rang de $V(\tau)$.

U est dit *docile en* α (*α-tractable* dans [17]) si K n'a qu'un ensemble d'opérations implicites α-aires, et *docile* s'il est docile en tout cardinal. Notons que si U est docile, le rang de K est essentiellement le rang de la *monade* (= *triple*) *de codensité* (= *complétion algébrique* de [22] = *complétion équationelle* de [15]) de U ([19], [18]) au sens de [17].

$\mathfrak{F}(\alpha) \in K$ est *l'algèbre libre sur* α (*pour* K) s'il existe une fonction

$$\eta_\alpha \in U^\alpha(\mathfrak{F}(\alpha))$$

qui est *universelle de* α *dans* U ([19]), i.e. telle que, pour tout $h \in U^\alpha \mathfrak{A}$, il existe un unique homomorphisme $h^\#$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{F}(\alpha)$ tel que

$$(Uh^\#) \cdot \eta_\alpha = h.$$

$\mathfrak{F}(\alpha)$ et η_α (lorsqu'ils existent) sont déterminés à un isomorphisme près. Les algèbres libres (et les fonctions η_α) sont les composantes d'un éventuel adjoint à gauche (et de son unité) pour U. Ce concept diffère du concept traditionnel en algèbre universelle ([7], [23]) en ce que l'image de α par η_α n'engendre pas (au sens habituel) nécessairement $\mathfrak{F}(\alpha)$. Lorsqu'il y a aussi engendrement, nous dirons que $\mathfrak{F}(\alpha)$ est *l'algèbre librement engendrée sur* α (*pour* K). Notons qu'une τ-algèbre $\mathfrak{A}$ est *α-libre* au sens de [3] précisement lorsqu'elle est libre sur α pour $K = \{\mathfrak{A}\}$.

Soit U docile en α, et $\sigma \in \mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$. Alors $\mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$ a une structure canonique de τ-algèbre (respectivement de τ^σ-, τ^α-algèbre), définie de la manière évidente, que nous noterons $\mathfrak{N}_K(\alpha)$, ou simplement $\mathfrak{N}(\alpha)$ (respectivement $\mathfrak{N}(\alpha)^\sigma$, $\mathfrak{N}(\alpha)^\alpha$). Considérons l'"inclusion des projections"

$$s_\alpha\colon \alpha \to U_\tau \mathfrak{N}(\alpha)$$

(i.e. $(s_\alpha(\zeta))_{\mathfrak{A}}(f) = f(\zeta)$ pour tout $\mathfrak{A} \in K$, tout $\zeta < \alpha$ et tout $f \in U^\alpha \mathfrak{A}$). Toute fonction h: $\alpha \to U\mathfrak{A}$ *s'étend* à l'homomorphisme d'évaluation $h^\#$: $\mathfrak{N}(\alpha) \to \mathfrak{A}$ (défini par $h^\#(\varrho) = \varrho_{\mathfrak{A}}(h)$) en ce sens que

$$h = (U_\tau h^\#) \cdot s_\alpha.$$

On dira que K est *libérable en* σ si tout (τ-)homomorphisme

$$f\colon \mathfrak{N}(\alpha)\to\mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{A}\in K,$$

préserve σ, i.e. est un τ^{σ}-homomorphisme de $\mathfrak{N}(\alpha)^{\sigma}$ dans $\mathfrak{A}^{\sigma}$. K est *libérable en* α s'il est libérable en tout $\sigma\in\mathrm{Nat}(U^{\alpha}, U)$, i.e. si pour tout h comme ci-dessus, h^{*} est le seul homomorphisme qui étend h. On montre [9] que K est libérable en α si et seulement si $K' = K\cup\{\mathfrak{N}(\alpha)\}$ a l'algèbre libre sur α, si et seulement si s_{α} est la fonction universelle de α dans $U_{K'}$.

Si τ est un ensemble, $\mathfrak{T}(\alpha) = \mathfrak{T}_{\tau}(\alpha)$ dénote l'algèbre des termes α-aires ([7], [23]), et θ_K est la congruence sur $\mathfrak{T}(\alpha)$ telle que $p\equiv q(\theta_K)$ si et seulement si $p_{\mathfrak{A}} = q_{\mathfrak{A}}$ pour tout $\mathfrak{A}\in K$. Il est bien connu que $\mathfrak{T}(\alpha)/\theta_K$ est en fait l'algèbre librement engendrée sur α pour K (et également pour $V(K)$, où $V(K)$ est la variété engendrée par K) pourvu que $\mathfrak{T}(\alpha)/\theta_K\in K$. Un élément de $U_{\tau}(\mathfrak{T}(\alpha)/\theta_K)$ peut être vu comme une opération implicite d'un genre particulier, et $\mathfrak{T}(\alpha)/\theta_K$ est en ce sens la sous-algèbre de $\mathfrak{N}_K(\alpha)$ (lorsque U est docile en α) engendrée par l'image de α par s_{α}. Ainsi, la distinction entre les deux concepts d'algèbre libre disparaît lorsque, par exemple, K est fermée (dans $V(\tau)$), pour les sous-algèbres.

EXEMPLES. 1. *Les groupes Π-locaux.* Si Π est un ensemble de nombres premiers, un groupe G est *Π-local* si pour tout premier $p\notin\Pi$ et tout $x\in G$ il existe un unique $y\in G$ tel que $y^{p} = x$. Clairement, l'extraction de la racine p-ième constitue une opération implicite de rang 1 dans la classe K (pour $\tau = \{1, \cdot, (\ )^{-1}\}$) des groupes Π-locaux. On peut montrer qu'il n'y en a pas d'autres que celles-là et celles qu'elles engendrent par combinaisons avec les termes. $\mathfrak{N}(\alpha)$ est la *Π-localisation* (voir [28]) du groupe librement engendré sur α, et donc, étant dans K, est l'algèbre libre sur α pour K (non librement engendrée). K est donc de rang finitaire.

2. *Les corps.* Soit K la classe des corps comme $\{0, 1, +, -, \cdot\}$-algèbres. Les opérations implicites sont ici en quantité considérable et K n'a pas de rang [15]. Toutefois U est docile (car K est élémentaire: voir plus loin) et on a par exemple que $\mathfrak{N}(0)$ est l'anneau $\boldsymbol{Q}\times\prod_{p\in P}\boldsymbol{Z}_p$, où P est l'ensemble des nombres premiers et $\boldsymbol{Z}_p$ est le corps à p éléments. De la prochaine section on pourra déduire que K n'est libérable en aucun cardinal infini. On peut vérifier directement que K n'est pas libérable en 0 (et donc en aucun cardinal): si D est un ultrafiltre sur P, alors

$$I = \{\langle b_p\rangle_{p\in P}\in\prod_{p\in P}\boldsymbol{Z}_p \mid \{p\in P \mid b_p = 0\}\in D\}$$

est un idéal premier de $\prod_{p\in P}\boldsymbol{Z}_p$, lesquels son toujours maximaux, et donc $\prod_{p\in P}\boldsymbol{Z}_p/I$ est un corps, lequel est de caractéristique 0 lorsque D est non principal; or, dans ce dernier cas, il y a deux homomorphismes de $\mathfrak{N}(0)$ dans $\prod_{p\in P}\boldsymbol{Z}_p/I$ (via les projections sur Q et sur $\prod_{p\in P} Z_p$), et donc $\mathfrak{N}(0)$ n'est pas libre sur 0 pour $K \cup \{\mathfrak{N}(0)\}$. Notons cependant qu'à l'aide de résultats de [26] et [3], on peut montrer que $\mathfrak{N}(0)$ est 0-libre.

3. Résultats. Tout au long de cette section, K est une classe de τ-algèbres, où τ est de rang finitaire et est un ensemble. $\mathbf{H}(K)$, $\mathbf{S}(K)$, $\mathbf{S}_e(K)$, $\mathbf{P}(K)$, $\mathbf{Pui}(K)$, $\mathbf{P}_f(K)$ et $\mathbf{P}_u(K)$ désignent respectivement les classes des images homomorphes, sous-algèbres, sous-algèbres élémentaires (=sous-modèles élémentaires de [5]), produits (directs), puissances, produits finis et ultraproduits d'algèbres dans K. Toutes ces classes sont supposées fermées pour les isomorphismes.

Si D est un filtre sur un ensemble I et $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I} \subseteq K$, on dénote par θ_D la relation d'équivalence sur $U_\tau(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)$ définie ainsi: $f \equiv g(\theta_D)$ (qu'on écrira $[f]_D = [g]_D$) si et seulement si $\{i\in I \mid f(i) = g(i)\} \in D$.

LEMME 3.1. *Une opération implicite σ dans K est de rang fini si et seulement si, pour tout $\{\mathfrak{A}(i)\}_{i\in I} \subseteq K$ et tout ultrafiltre D sur l'ensemble I, θ_D est une congruence* ([21]) *sur la τ^σ-algèbre* $\prod_{i\in I}(\mathfrak{A}(i)^\sigma)$.

Preuve. ($\Rightarrow$) Ceci est essentiellement le théorème d'expansion [5], d'ailleurs aisément vérifié.

($\Leftarrow$) Le procédé est classique. Soit α le rang de σ, $\alpha \geqslant \aleph_0$. On peut supposer que σ est α-aire. Si I est l'ensemble des sous-ensembles finis de α, il suit de la définition de rang qu'il doit exister, pour chaque $i\in I$, une algèbre $\mathfrak{A}(i)$ dans K et des éléments f_i et g_i de $U^\alpha(\mathfrak{A}(i))$ tels que

$$f_i(\mu) = g_i(\mu) \quad \text{pour tout } \mu\in i$$

et

$$\sigma_{\mathfrak{A}(i)}(f_i) \neq \sigma_{\mathfrak{A}(i)}(g_i).$$

Pour chaque $i\in I$, soit $i^* = \{j\in I \mid j \supseteq i\}$. Alors $\Gamma = \{i^* \mid i\in I\}$ a la "propriété d'intersection finie", et donc il existe un ultrafiltre D sur I contenant Γ (voir [5]). Pour chaque $\mu < \alpha$, on a

$$\{i\in I \mid f_i(\mu) = g_i(\mu)\} \supseteq \{\mu\}^* \in D,$$

et donc

$$[\langle f_i(\mu)\rangle_{i\in I}]_D = [\langle g_i(\mu)\rangle_{i\in I}]_D.$$

Soit

$$\mathfrak{B} = \prod_{i\in I}(\mathfrak{A}(i)^\sigma).$$

Par définition du produit, on a

$$\sigma_{\mathfrak{B}}(\langle f_i\rangle_{i\in I}) = \langle \sigma_{\mathfrak{A}(i)}(f_i)\rangle_{i\in I}$$

(où $\langle f_i\rangle_{i\in I}\in U^\alpha\mathfrak{B}$ est définie par $\langle f_i\rangle_{i\in I}(\mu) = \langle f_i(\mu)\rangle_{i\in I}$) et de même pour les g_i. Il s'en suit que

$$\sigma_{\mathfrak{B}}(\langle f_i\rangle_{i\in I}) \neq \sigma_{\mathfrak{B}}(\langle g_i\rangle_{i\in I}),$$

et donc θ_D n'est pas une congruence sur $\mathfrak{B}$.

Remarque. Lorsque le rang de τ est un cardinal (régulier) quelconque β, on montre de manière tout à fait semblable l'affirmation obtenue de l'énoncé de 3.1 en remplaçant "fini" par "$<\beta$" et "ultrafiltre" par "filtre β-complet" (voir [5]).

THÉORÈME 3.2. *Si* $\mathbf{P}_u(K) = K$ *et* $\mathbf{P}(K) \subseteq \mathbf{H}(K)$, *alors le rang de K est finitaire. Si* $\mathbf{P}_f(K) = K$ *et K est élémentaire (au sens finitaire de* [5]), *alors U a une complétion algébrique de rang finitaire.*

Preuve. Soient $\{\mathfrak{A}(i)\}_{i\in I}\subseteq K$, D un ultrafiltre sur l'ensemble I et $\sigma\in \mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$. Notons $\mathfrak{A}$ l'ultraproduit $\Pi_D\mathfrak{A}(i)$ et remarquons que θ_D est une congruence sur $\prod_{i\in I}(\mathfrak{A}(i)^\sigma)$ si et seulement si pour tout ensemble $\{f\}_{i\in I}$, où $f_i\in U^\alpha(\mathfrak{A}(i))$,

$$(*)\qquad [\langle f_i\rangle_{i\in I}]_D \mapsto [\langle \sigma_{\mathfrak{A}(i)}(f_i)\rangle_{i\in I}]_D$$

définit une fonction de $U^\alpha\mathfrak{A}$ dans $U\mathfrak{A}$ (où on a posé $[\langle f_i\rangle_{i\in I}]_D(\mu) = [\langle f_i(\mu)\rangle_{i\in I}]_D$). Par hypothèse, il existe un homomorphisme surjectif

$$h\colon \mathfrak{B}\twoheadrightarrow \prod_{i\in I}\mathfrak{A}(i) \quad \text{pour un } \mathfrak{B}\in K.$$

On considère le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
U^\alpha_\tau\mathfrak{B} \arrow[r, "\sigma_{\mathfrak{B}}"] \arrow[d, "U^\alpha_\tau(h)"] & U_\tau\mathfrak{B} \arrow[d, "U_\tau h"] \\
U^\alpha_\tau\left(\prod_{i\in I}\mathfrak{A}(i)\right) \arrow[r, "\langle\sigma_{\mathfrak{A}(i)}\rangle_{i\in I}"'] \arrow[d, "U^\alpha_\tau(p_D)"] & U_\tau\left(\prod_{i\in I}\mathfrak{A}(i)\right) \arrow[d, "U_\tau p_D"] \\
U^\alpha\mathfrak{A} \arrow[r, "\sigma_{\mathfrak{A}}"'] & U\mathfrak{A}
\end{tikzcd}$$

où $\langle\sigma_{\mathfrak{A}(i)}\rangle_{i\in I}$ est la fonction définie par

$$\langle g_i\rangle_{i\in I}\mapsto \langle \sigma_{\mathfrak{A}(i)}(g_i)\rangle_{i\in I}$$

(où on a posé $\langle g_i\rangle_{i\in I}(\mu) = \langle g_i(\mu)\rangle_{i\in I}$) et p_D est l'homomorphisme canonique $v\mapsto [v]_D$. Le rectangle extérieur commute puisque σ est une opération implicite, et le carré supérieur commute par la propriété universelle des produits et le fait que chaque $\mathfrak{A}(i)$ est dans K. Le carré du bas doit donc commuter, puisque $U_\tau^\alpha(h)$ est surjectif, ce qui signifie que $\sigma_{\mathfrak{A}}$ est définie par (*).

La deuxième affirmation est une conséquence du lemme suivant, compte tenu du fait qu'une classe élémentaire K vérifie $\mathbf{S}_e(K) = \mathbf{P}_u(K) = K$ ainsi que

$$\mathbf{P}_f(K) = K \Rightarrow \mathbf{P}(K) = K$$

(voir [5]).

LEMME 3.3. *Si* $\mathbf{S}_e(K) = K$, *alors* U *est docile.*

Preuve. Supposons que $\sigma_{\mathfrak{A}}(f) \neq \sigma'_{\mathfrak{A}}(f)$ pour un $f \in U^\alpha \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in K$, et $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$. Par le théorème de Löwenheim–Skolem–Tarski [5], il existe une sous-algèbre élémentaire $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ de cardinalité $\leqslant \beta = \aleph_0 \cup \alpha \cup |\tau|$ contenant l'image de α par f. Comme $\sigma_{\mathfrak{B}}(f) \neq \sigma'_{\mathfrak{B}}(f)$, on peut donc se restreindre aux algèbres de cardinalité $\leqslant \beta$ pour "compter" les opérations implicites α-aires. Ceci assure la docilité de U en α.

Remarques. 1. Le lemme 3.3 reste vrai si on remplace les sous-algèbres élémentaires par les sous-algèbres $L_{\varkappa\lambda}(\tau)$-élémentaires (i.e. la notion de "sous-algèbre élémentaire" appropriée au langage $L_{\varkappa\lambda}(\tau)$: voir [6]) pour des cardinaux $\varkappa$ et λ quelconques (fixés), puisque le théorème de Löwenheim–Skolem–Tarski s'étend à ce contexte.

2. La deuxième affirmation du théorème 3.2 n'est plus vraie si on en retire la condition $\mathbf{P}_f(K) = K$ ou celle demandant que K soit axiomatique, comme le montrent respectivement le cas des corps (section 2) et l'exemple qui suit.

EXEMPLE. *Les groupes nilpotents* ($\tau = \{1, \cdot, (\ )^{-1}\}$). Ici,

$$K = \bigcup_{n \in N} K_n,$$

où K_n est la variété des groupes nilpotents de classe $\leqslant n$, et forme ainsi ce qu'on appelle une *variété généralisée* (voir [1]), d'où

$$K = \mathbf{H}(K) = \mathbf{S}(K) = \mathbf{P}_f(K) = \mathbf{Pui}(K).$$

Chaque K_n ayant toutes les algèbres librement engendrées, on peut voir qu'une opération implicite α-aire σ est essentiellement la donnée d'une suite de classes d'équivalence de termes (α-aires) $\langle [p_n]_{\theta(n)} \rangle_{n \in N}$ telle que

$$[p_n]_{\theta(n)} = [p_m]_{\theta(n)}$$

(i.e. $(p_n)_{\mathfrak{A}} = (p_m)_{\mathfrak{A}}$ pour tout $\mathfrak{A} \in K_n$) pour tout $m \geqslant n$. Il s'en suit que le rang de σ doit être $\leqslant \aleph_0$, d'où le rang de K (et donc celui de la complétion algébrique de U_K, puisque ce foncteur est docile, par le lemme 3.3) doit être $\leqslant \aleph_1$. On montre que le rang de K est $\aleph_1$, en exhibant une opération implicite de rang $\aleph_0$. Considérons la suite $\langle p_n \rangle_{n \in N}$ de termes $\aleph_0$-aires, où

$$p_1(x) = x_0, \quad p_2(x) = x_0 \cdot [x_0, x_1], \quad \ldots,$$
$$p_n(x) = p_{n-1}(x) \cdot [[\ldots[[x_0, x_1], x_2], \ldots], x_{n-1}],$$

(où $x = \langle x_n \rangle_{n \geqslant 0}$ et $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$); les propriétés élémentaires des groupes nilpotents permettent de voir que $\langle [p_n]_{\theta(n)} \rangle_{n \in N}$ vérifie la condition ci-dessus, et donc définit une opération implicite σ dans K, laquelle est de rang $\aleph_0$.

Certaines considérations dans l'exemple précédent sont facilement généralisables. Si

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i,$$

où I est un ensemble filtré tel que $j \leqslant i$ si et seulement si $K_j \subseteq K_i$, et si le foncteur d'oubli U_i pour K_i est docile en α pour chaque $i \in I$, alors on vérifie aisément que la limite (dans $V(\tau)$) du diagramme

$$\{f_{ij}\colon \mathfrak{N}_i(\alpha) \to \mathfrak{N}_j(\alpha) \mid K_j \subseteq K_i,\ (U_\tau f_{ij})(\sigma) \text{ est la restriction de } \sigma \text{ à } K_j,\ i, j \in I\}$$

est $\mathfrak{N}(\alpha)$ (et donc U est docile). Comme U_τ crée les limites, une opération implicite α-aire dans K est un ensemble $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ tel que $(U_\tau f_{ij})(\sigma_i) = \sigma_j$ lorsque $K_j \subseteq K_i$.

Le théorème 3.2 conduit à une preuve synthétique des résultats principaux (les théorèmes 8 et 9) de Zembery [30]. Quelques définitions doivent d'abord être rappelées. $\mathbf{Eg}(K)$ est la classe des *égalisateurs* (au sens de $V(\tau)$) des paires d'homomorphismes dans K (i.e. $\mathfrak{A} \in \mathbf{Eg}(K)$ s'il existe des homomorphismes $f, g\colon \mathfrak{B} \rightrightarrows \mathfrak{C}$ dans K tels que $\mathfrak{A}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{B}$ sur l'ensemble $\{b \in U\mathfrak{B} \mid f(b) = g(b)\}$). $\mathbf{H}_\mathbf{n}(K)$ est la classe des images homomorphes des algèbres dans K par un homomorphisme dont la *paire-noyau* est dans K (i.e. $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{n}(K)$ s'il existe un homomorphisme surjectif $f\colon\mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}$ tel que $\mathfrak{B}$ et la sous-algèbre de $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ sur l'ensemble $\{\langle b_1, b_2 \rangle \mid f(b_1) = f(b_2)\}$ sont toutes deux dans K). Zembery dira que K est *presqu'équationnelle* lorsqu'il existe un isomorphisme canonique entre K et une variété finitaire (ou, de façon équivalente, lorsque K est canoniquement isomorphe à sa complétion algébrique — i.e. U_K est *monadique* — et que K est de rang finitaire). Remarquons que ceci se produit précisément lorsque $K^{\omega-}$ est une variété. L'équivalence (1)$\Leftrightarrow$(3) dans le résultat suivant est le théorème 9 de [30] dont on a enlevé la condition (ii) ($\mathbf{P}(K) = K$), qui est en fait redondante (la condition $\mathbf{H}(K^{\omega-}) = K^{\omega-}$ est une simple reformulation de sa condition (iv)). La condition (4) est à comparer aux résultats classiques de [16] et [17]. Signalons finalement que le théorème 8 de [30] (qu'on peut délester de sa condition redondante $\mathbf{P}(K) = K$), découle de notre démonstration.

THÉORÈME 3.4. *Les conditions suivantes sur K sont équivalentes*:

(1) *K est presqu'équationnelle.*

(2) $K = \mathbf{P}(K) = \mathbf{Eg}(K)$ (*i.e. K est "canoniquement complète"*) *et* $\mathbf{H}(K^{\omega-}) = K^{\omega-}$.

(3) *K a les algèbres libres sur tous les cardinaux et* $\mathbf{H}(K^{\omega-}) = K^{\omega-}$.

(4) $K = \mathbf{P}(K) = \mathbf{Eg}(K) = \mathbf{P}_u(K) = \mathbf{H}_u(K)$.

Preuve. (1)⇒(2). Découle immédiatement de l'existence d'un isomorphisme canonique entre K et $K^{\omega-}$, cette dernière étant canoniquement complète puisque c'est une variété.

(2)⇒(3). C'est un résultat classique que le foncteur d'oubli d'une classe canoniquement complète d'algèbres admet un adjoint à gauche.

(3)⇒(1). Puisqu'elle est canoniquement isomorphe à K, $K^{\omega-}$ a toutes les algèbres libres. La preuve de la proposition 4.1 de [11] montre qu'une classe d'algèbres fermée pour les images homomorphes et ayant toutes les algèbres libres doit être fermée pour les égalisateurs et les produits. Par définition, l'algèbre libre sur α pour $K^{\omega-}$ est librement engendrée sur α lorsque α est fini. Or, $K^{\omega-} = \mathbf{P}_u(K^{\omega-})$ (puisque $\mathbf{P}_u(-) \subseteq \mathbf{HP}(-)$), et donc, par 3.2, les opérations implicites dans $K^{\omega-}$ sont toutes de rang fini. Il s'en suit que l'algèbre libre sur ω pour $K^{\omega-}$ est aussi librement engendrée. Finalement, $K^{\omega-}$ est élémentaire (car $\mathbf{S}_e(-) \subseteq \mathbf{Eg}(\mathbf{P}_u(-))$: voir [27], p. 31), et donc a toutes les algèbres librement engendrées ([7], théorème 38.4). Ce fait, ajouté à $K^{\omega-} = \mathbf{H}(K^{\omega-})$, nous assure que $K^{\omega-}$ est une variété.

(1)⇒(4). $K^{\omega-}$ étant élémentaire et canoniquement isomorphe à K, il suit aisément du théorème de Beth (voir [5]) que K est élémentaire. (4) découle alors du théorème 2 de [8].

(4)⇒(1). K est élémentaire puisque $\mathbf{S}_e(K) \subseteq \mathbf{Eg}(\mathbf{P}_u(K))$. On utilise encore le théorème 2 de [8].

Remarques. 1. On trouvera dans [27] un exemple de classe presqu'équationnelle non fermée pour les images homomorphes.

2. L'auteur ignore s'il existe une classe d'algèbres (pour un type finitaire, toujours) qui soit de rang infinitaire mais dont le foncteur d'oubli est monadique. **(P 1376)**

Si on s'intéresse à la définissabilité, un concept pertinent est celui de "classe libérable". Remarquons que si U est docile en α, tout ensemble d'homomorphismes

$$\{f_i\colon \mathfrak{N}(\alpha) \to \mathfrak{A}_i \mid i \in I \text{ et } \mathfrak{A}_i \in K\}$$

induit un homomorphisme canonique

$$p_D \cdot \langle f_i \rangle_{i\in I}\colon \mathfrak{N}(\alpha) \to \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \twoheadrightarrow \Pi_D \mathfrak{A}_i$$

pour chaque ultrafiltre D sur I, lequel homomorphisme doit préserver σ si K est libérable en σ et $\Pi_D \mathfrak{A}_i \in K$. De la définition de cet homomorphisme et du lemme 3.1 il suit que si $K = \mathbf{P}_u(K)$ et est libérable en σ, alors σ est de rang fini. Mais ceci résulte aussi de ce que σ est dans ce cas *explicitement définissable dans* $K \cup \{\mathfrak{N}(\alpha)\}$ (i.e. il existe une formule $\Phi(\boldsymbol{x}, y)$ de $L_{\infty\infty}(\tau)$, $\boldsymbol{x} = \langle x_\mu \rangle_{\mu<\alpha}$, telle que

K^σ, $\mathfrak{N}(\alpha)^\sigma \models \forall xy(\sigma(x) = y \leftrightarrow \Phi(x, y)))$ par une formule finitaire, comme le montre le théorème suivant, qui peut être vu comme une version raffinée des résultats de [13] (le fait que τ soit ici finitaire n'est pas vraiment restrictif). Rappelons qu'une formule est *pure* si elle est de la forme

$$\exists z\Big(\bigwedge_{i\in I} \phi_i(y, z)\Big),$$

où I, y et z sont des ensembles et les ϕ_i sont des formules atomiques.

THÉORÈME 3.5. *Soit σ une opération implicite α-aire dans K, U docile en α. Les énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *K est libérable en σ.*

(2) *σ est explicitement définissable dans $K \cup \{\mathfrak{N}(\alpha)\}$ par une formule pure.*

(3) *Tout τ-homomorphisme entre les algèbres dans $\mathbf{SP}(K^\alpha)$ préserve σ.*

Si, de plus, $K = \mathbf{P}_u(K)$, alors on peut trouver la formule pure de (2) *dans $L_{\omega\omega}(\tau)$ (et donc σ est de rang fini si K est libérable en σ).*

Preuve. (3)$\Rightarrow$(2). Comme $\mathbf{SP}(K^\alpha)$ a toutes les algèbres librement engendrées, la preuve du théorème 1 de [13] montre que

$$\mathbf{SP}(K^\alpha) \models \forall xy(\sigma(x) = y \leftrightarrow \Phi(x, y))$$

pour quelque formule pure Φ de $L_{\infty\infty}(\tau)$. Le résultat suit de ce que $\mathfrak{N}(\alpha)^\alpha$ est l'algèbre librement engendrée sur α pour $\mathbf{SP}(K^\alpha)$, comme il est facile de voir.

(2)$\Rightarrow$(1). Clair, puisqu'un homomorphisme préserve toute formule pure.

(1)$\Rightarrow$(3). Soit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{SP}(K^\alpha)$ et soit

$$f\colon\ U_{\tau^\alpha}\mathfrak{A} \to U_{\tau^\alpha}\mathfrak{B}$$

une fonction qui préserve les τ-termes. Pour $g \in U^\alpha_{\tau^\alpha}(\mathfrak{A})$, notons g^* le τ^α-homomorphisme de $\mathfrak{N}(\alpha)^\alpha$ dans $\mathfrak{A}$ tel que

$$U_{\tau^\alpha}(g^*)(s_\alpha) = g$$

(voir section 2). Par hypothèse, il existe un τ^α-plongement

$$h\colon\ \mathfrak{B} \to \prod_{i\in I}(\mathfrak{C}_i^\alpha),$$

où les $\mathfrak{C}_i$ sont dans K, et donc chacune des fonctions

$$U_{\tau^\alpha}(p_i h)\cdot f \cdot U_{\tau^\alpha}(g^*)$$

(p_i les projections canoniques, $i \in I$) préserve σ. Il s'en suit que $f(\sigma_{\mathfrak{A}}(g)) = \sigma_{\mathfrak{B}}(fg)$, et donc f préserve σ.

Le même raisonnement que dans la preuve du théorème 2 de [13] (avec $r^* = \aleph_0$ et un ultraproduit au lieu d'un produit réduit) prouve la dernière assertion.

Un problème qui se pose en comparant les théorèmes 3.2 et 3.5 est de déterminer des conditions (raisonnablement faibles) sur K suffisantes pour que celle-ci soit libérable en σ (ou en α), ou, plus généralement, pour que σ soit explicitement définissable dans K. Le reste de ce travail traite de cette dernière question.

LEMME 3.6. *Soit σ une opération implicite de rang fini dans K. Si $\mathbf{P}_u(K) = K$, alors σ est explicitement définissable dans K (par une formule existentielle-positive* [5] *de $L_{\omega\omega}(\tau)$).*

Preuve. Pour appliquer le théorème de Beth, on voit qu'on peut supposer σ d'arité finie, et il suffit alors de montrer que $\mathrm{Th}(K^\sigma)$ (l'ensemble des énoncés de $L_{\omega\omega}(\tau^\sigma)$ vérifiés par toutes les algèbres dans K^σ) "définit σ implicitement" [5]. Ceci revient à montrer que si $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathbf{S}_e(\mathbf{P}_u(K^\sigma))$ ont le même τ-réduit (= "reduct" de [5]), alors $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$. Du fait que σ est de rang fini et que $\mathbf{P}_u(K) = K$ on déduit que $\mathbf{P}_u(K^\sigma) = K^\sigma$. Soient donc $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ des τ^σ-algèbres ayant leur τ-réduit $\mathfrak{B}$ commun et tels qu'il existe des plongements élémentaires f_i: $\mathfrak{B}_i \to \mathfrak{A}_i^\sigma$ pour des $\mathfrak{A}_i \in K$, $i = 1, 2$. Les f_i sont en particulier des plongements (τ-)élémentaires de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$, et des résultats standards de théorie des modèles permettent de voir qu'il existe des plongements élémentaires g_i de $\mathfrak{A}_i$ dans une ultrapuissance $\Pi_D \mathfrak{A}_1$ de $\mathfrak{A}_1$ (par exemple), $i = 1, 2$, tels que $g_1 f_1 = g_2 f_2$. Comme $\Pi_D \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont dans K et que les f_i sont des τ^σ-homomorphismes, une "chasse aux diagrammes" permet de voir que

$$U_\tau(g_1 f_1) \cdot \sigma_1 = U_\tau(g_1 f_1) \cdot \sigma_2,$$

où σ_i est l'interprétation de σ dans $\mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2$. $U_\tau(g_1 f_1)$ étant injectif, on a bien $\sigma_1 = \sigma_2$, et donc $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$.

Il existe donc $\Phi(\boldsymbol{x}', y)$ dans $L_{\omega\omega}(\tau)$ telle que

$$K^\sigma \models \forall \boldsymbol{x} y(\sigma(\boldsymbol{x}) = y \leftrightarrow \Phi(\boldsymbol{x}', y))$$

(où $\boldsymbol{x}'$ est un sous-ensemble fini de $\boldsymbol{x} = \langle x_\mu \rangle_{\mu < \alpha}$). Clairement, tout homomorphisme dans K doit préserver Φ. K est ∞-*compact* au sens de [29], puisque $K = \mathbf{P}_u(K)$, et donc

$$K \models \forall \boldsymbol{x}' y \, (\Phi(\boldsymbol{x}', y) \leftrightarrow \Psi(\boldsymbol{x}', y))$$

pour une formule existentielle-positive $\Psi(\boldsymbol{x}', y)$, par le corollaire 2.4(i) de [29]. (L'hypothèse dans son énoncé requérant l'existence d'un énoncé existentiel-positif ψ tel que $K \models \sim \psi$ est inutile ici: sa preuve n'utilise en fait que l'hypothèse qu'il existe une formule existentielle-positive $\psi(\boldsymbol{x}', y)$ telle que

$$\models \forall \boldsymbol{x}' y \, (\psi(\boldsymbol{x}', y) \rightarrow \Phi(\boldsymbol{x}', y))$$

et on peut y voir que l'absence d'une telle formule entraîne

$$K \models \forall \boldsymbol{x}' y \, (\sim \Phi(\boldsymbol{x}', y)),$$

d'où $K^\sigma \models \forall \boldsymbol{x} y(\sigma(\boldsymbol{x}) \neq y)$, ce qui est absurde).

COROLLAIRE 3.7. *Si* $\mathbf{P}_u(K) = K$ *et* $\mathbf{P}(K) \subseteq \mathbf{H}(K)$, *alors toute opération implicite dans K est explicitement définissable par une formule pure de* $L_{\omega\omega}(\tau)$.

Preuve. Par 3.2, 3.6 et l'essentiel d'une technique simple souvent utilisée dans la littérature (voir par exemple la preuve de la proposition 1.4 de [20]).

Un résultat de Hodges ([12], Theorem 1), qui généralise ceux de [13], entraîne que si

(1) le type τ est un ensemble et est de rang β (régulier quelconque),

(2) σ est une opération implicite dans K de rang inférieur à β,

(3) K^σ est la classe des modèles d'une "théorie de Horn" dans (un langage un peu plus général que) $L_{\beta\beta}(\tau^\sigma)$ (ce qui implique que K^σ, et donc K, est fermé pour les produits réduits β-complets; en particulier, $\mathbf{P}(K) = K$),

alors σ est définissable dans K par une formule pure (de $L_{\beta\beta}(\tau)$).

Comme dans [13], le point de vue de [12] diffère du nôtre en particulier en ce que le sujet d'étude n'y est pas K mais plutôt K^σ, et c'est donc sur ce dernier que portent les hypothèses. Nous terminons en examinant un cas voisin où les opérations de rang quelconque sont définissables.

Comme plus haut, on considère le cas où K est la réunion $\bigcup_{i \in I} K_i$ d'un ensemble filtré de classes de τ-algèbres. Si les opérations implicites α-aires dans K_i sont explicitement définissables pour chaque i, alors toute opération implicite α-aire σ dans K l'est aussi: en effet, si σ est représenté par un ensemble $\{\sigma_i\}_{i \in I}$, où chaque σ_i est définissable par la formule ϕ_i, on vérifie sans peine que

$$K^\sigma \models \forall xy\big(\sigma(x) = y \leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \big(\bigwedge_{j > i} \Phi_j(x, y)\big)\big).$$

Ceci s'applique à certaines "O-classes généralisées" de [1]. En particulier, on a:

THÉORÈME 3.8. *Soit* $K = \mathbf{P}_f(K) = \mathbf{Pui}(K) = \mathbf{E}(K)$ (*où* $\mathbf{E}(K) = \{\mathfrak{A} \in V(\tau) \mid \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ *pour un* $\mathfrak{B} \in K\}$). *Alors il existe un cardinal* β *tel que toute opération implicite dans K est explicitement définissable par une formule existentielle-positive de* $L_{\beta\beta}(\tau)$. *La complétion algébrique de U a donc un rang* $\leqslant \beta$.

Preuve. Montrons d'abord que

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i$$

pour un ensemble filtré I de classes K_i élémentaires (au sens de $L_{\omega\omega}(\tau)$) fermées pour les produits. Essentiellement, ceci découle du théorème 7 de [1] appliqué à $O = \{\mathbf{P}, \mathbf{P}_u, \mathbf{E}\}$, le fait que O vérifie les hypothèses nécessaires étant montré dans [10] ("$\mathbf{P}^*$ admet une interpolation forte" dans la terminologie de [10]). Plus explicitement, montrons que

$$K = \bigcup\{O(K_0) \mid K_0 \subseteq K \text{ et } K_0 \text{ est finie}\}, \quad \text{où } O(K_0) = \mathbf{PEP}_u(K_0).$$

En effet, $O(K_0) = \mathbf{PE}(K_0)$ puisque K_0 est finie, et il suit de ce que les produits préservent les équivalences élémentaires (voir [5]) que

$$O(K_0) = \mathbf{EP}_f\, \mathbf{Pui}(K_0),$$

d'où $O(K_0) \subseteq K$. De plus,

$$\mathbf{P}(O(K_0)) = \mathbf{E}(O(K_0)) = O(K_0).$$

De tout ceci et du théorème 1 de [21], on déduit que $O(K_0)$ est élémentaire. La réunion porte sur un ensemble de cardinalité $\leqslant 2^\gamma$, $\gamma = \aleph_0 \cup |\tau|$, et est clairement filtrée.

Le reste découle aisément du corollaire 3.7 et de ce qui précède (chaque ϕ_i ne contenant ici qu'un nombre fini de variables, on peut prendre pour β le successeur de 2^γ).

TRAVAUX CITÉS

[1] C. J. Ash, *Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes*, J. Algebra 92 (1985), pp. 104–112.

[2] B. Banaschewski, *The Birkhoff Theorem for varieties of finite algebras*, Algebra Universalis 17 (1983), pp. 360–368.

[3] P. Bankston and R. Schutt, *On minimally free algebras*, Canad. J. Math. 37 (1985), pp. 963–978.

[4] S. Burris, *Free algebras as subdirect products*, Algebra Universalis 11 (1980), pp. 133–134.

[5] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam 1973.

[6] M. A. Dickmann, *Large Infinitary Languages*, North-Holland, Amsterdam 1975.

[7] G. Grätzer, *Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York 1979.

[8] M. Hébert, *Characterizations of axiomatic categories of models canonically isomorphic to (quasi-) varieties*, Canad. Math. Bull. 31 (1988), pp. 287–300.

[9] — *Sur les algèbres libres pour les classes axiomatiques*, Ann. Sci. Math. Québec 13 (1989), pp. 39–47.

[10] — *Preservation and interpolation through binary relations between theories*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 35 (1989), pp. 169–182.

[11] J. Herrera, *Sur la logique du premier ordre et la théorie des catégories*, Rev. Colombiana Mat. 18 (1984), pp. 41–82.

[12] W. Hodges, *Functorial implicit reducibility*, Fund. Math. 108 (1980), pp. 77–81.

[13] J. R. Isbell, *Functorial implicit operations*, Israel J. Math. 15 (1973), pp. 185–187.

[14] — *Generic algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 275 (1983), pp. 497–510.

[15] J. F. Kennison and D. Guldenhuys, *Equational completion, model-induced triples and pro-objects*, J. Pure Appl. Algebra 1 (1971), pp. 317–346.

[16] F. W. Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), pp. 869–872.

[17] F. E. J. Linton, *Some aspects of equational categories*, pp. 84–94 in: *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra* (La Jolla, 1965), Springer-Verlag, New York 1966.

[18] — *Applied functorial semantics*, pp. 53–74 in: *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, Lecture Notes in Math. 80, Springer-Verlag, Berlin 1969.

[19] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York 1971.

[20] M. Makkai, *On full embeddings I*, J. Pure Appl. Algebra 16 (1980), pp. 183–195.

[21] — *A compactness result concerning direct products of models*, Fund. Math. 57 (1965), pp. 313–325.

[22] E. G. Manes, *Algebraic Theories*, Springer-Verlag, Berlin 1976.

[23] R. S. Pierce, *Introduction to the Theory of Abstract Algebras*, Holt, Rinehart and Wilson, New York 1968.

[24] J. Rosický, *Concrete categories and infinitary languages*, J. Pure Appl. Algebra 22 (1981), pp. 309–339.

[25] — and L. Polák, *Implicit operations on finite algebras*, pp. 653–668 in: *Proceedings of the Conference on Finite Algebra and Multiple-Valued Logic* (Szeged, 1979), Coll. Math. Soc. János Bolyai 28, North-Holland, Amsterdam–New York 1981.

[26] P. Schultz, *The endomorphism ring of the additive group of a ring*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 15 (1973), pp. 60–69.

[27] H. Volger, *Preservation theorems for limits of structures and global sections of sheaves of structures*, Math. Z. 166 (1979), pp. 27–53.

[28] R. B. Warfield, *Nilpotent Groups*, Lecture Notes in Math. 513, Springer-Verlag, Berlin 1976.

[29] V. Weispfenning, *Aspects of quantifier elimination in algebra*, pp. 85–105 in: *Universal Algebra and its Links with Logic, Algebra, Combinatorics and Computer Science* (Darmstadt, 1983), Heldermann Verlag, Berlin 1984.

[30] I. Zembery, *Almost equational classes of algebras*, Algebra Universalis 23 (1986), pp. 293–307.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ MCGILL
MONTRÉAL, P.Q., CANADA

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC, P.Q., CANADA

Reçu par la Rédaction le 14.7.1987;
en version modifiée le 25.5.1988