ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVII (1980)

Remarque sur la méthode de la variation de la constante généralisée

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans le cas où l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ admet une solution unique $\varphi(t, t_0, x_0)$ telle que $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$, la méthode de la variation de la constante permet d'obtenir la solution de l'équation $x' = f(t, x) + r(t)$ sous la forme $x(t, t_0, x_0) = \varphi(t, t_0, c(t, t_0, x_0))$ où $c(t, t_0, x_0)$ est une solution de l'équation différentiele

$$c'(t) = r(t)\cdot[\varphi_{x_0}(t, t_0, c(t))]^{-1}.$$

La forme ainsi obtenue de la solution $x(t, t_0, x_0)$ permet d'obtenir certaines conditions suffisantes de stabilité et de stabilité asymptotique de la solution $x = 0$ de l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)) + r(t, x_t, x(t))$$

où $x_t(s) = x(t+s)$ pour $-\varrho < s < 0$.

Envisageons l'équation différentielle

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \tag{1}$$

où $f(t, x)$ est de classe C^1 pour $t \geqslant 0$, et l'équation perturbée

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) + r\big(t, x(t)\big). \tag{2}$$

Dans le cas où l'équation (1) est linéaire

$$x'(t) = a(t)x(t) + r\big(t, x(t)\big) \tag{L}$$

la méthode de la variation de la constante permet d'obtenir une équation intégrale équivalente à (L)

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\Big\{x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} r\big(s, x(s)\big)\,ds\Big\}. \tag{L$_1$}$$

De l'équation (L_1) on peut déduire certaines conditions suffisantes de stabilité de la solution $x = 0$ de l'équation (L). Dans la présente note nous allons déduire une équation analogue à (L_1), équivalente à (2), et démontrer un théorème sur la stabilité (ou sur la stabilité asymptotique) de la solution $x = 0$ de l'équation (2) dans le cas où $x = 0$ est une solution stable (asymptotiquement stable) de l'équation (1).

1. La formule de la variation de la constante généralisée. Envisageons les équations (1) et (2). Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H. 1° $f(t, x)$ est de classe C^1, $r(t, x)$ continue pour $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in (0, \infty)$.

2° Pour (t_0, x_0) $(t_0 \geqslant 0)$ la solution $\varphi(t, t_0, x_0)$ de l'équation (1) (telle que $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$) est définie dans l'intervalle $0 \leqslant t < \infty$.

3° L'équation (1.1)

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) + r(t) \tag{1.1}$$

pour chaque $r(t)$ continue admet une solution unique, telle que $x(t_0) = x_0$.

LEMME 1. *Les hypothèses* H *étant admises, il existe pour chaque* (t_0, x_0) *une fonction* $c(t, t_0, x_0)$, $c(t_0, t_0, x_0) = x_0$, *définie dans l'intervalle* $t_0 \leqslant t < b(t_0, x_0)$ *telle que la solution* $x(t, t_0, x_0)$ *de l'equation* (1.1) *est de la forme*

(1.2) $x(t, t_0, x_0) = \varphi\big(t, t_0, c(t)\big)$ *où* $c(t) = c(t, t_0, x_0)$ *est une solution de l'équation*:

$$c'(t) = r(t)\big[\varphi_{x_0}\big(t, t_0, c(t)\big)\big]^{-1}, \qquad c(t_0) = x_0. \tag{1.3}$$

Démonstration. (t_0, x_0) étant donné, posons pour simplifier les notations $c(t) = c(t, t_0, x_0)$. Supposons que $c(t)$ satisfaise à (1.3). Envisageons la fonction

$$\xi(t) = \varphi\big(t, t_0, c(t)\big).$$

On a

$$\xi'(t) = \varphi_t\big(t, t_0, c(t)\big) + \varphi_{x_0}\big(t, t_0, c(t)\big)c'(t).$$

De l'hypothèse que $\varphi(t, t_0, c)$ est une solution de l'équation (1) on tire

$$\varphi_t(t, t_0, c) = f\big(t, \varphi(t, t_0, c)\big)$$

(pour chaque t_0, c). On a donc

$$\xi'(t) = f\Big(t, \varphi\big(t, t_0, c(t)\big)\Big) + \varphi_{x_0}\big(t, t_0, c(t)\big)c'(t) = f\big(t, \xi(t)\big) + r(t),$$

d'où il résulte que $\xi(t) = \varphi\big(t, t_0, c(t)\big)$ est une solution de l'équation (1.1). De l'unicité de solutions de l'équation (1.1) il résulte donc que chaque solution de l'équation (1.1) est de la forme (1.2).

Remarque 1. Do lemme 1 il résulte immédiatement que dans le cas où les hypothèses H sont satisfaites l'équation (2) est équivalente à l'équation intégrale

$$x(t) = \varphi\Big(t, t_0, x_0 + \int_{t_0}^{t} r\big(s, x(s)\big)\Big[\varphi_{x_0}\Big(s, t_0, \varphi\big(t_0, s, x(s)\big)\Big)\Big]^{-1} ds\Big). \tag{1.4}$$

2. La stabilité.

Hypothèses K. Supposons que la solution $c = 0$ de l'équation

$$c'(t) = r\big(t, \varphi(t, t_0, c(t))\big)\big[\varphi_{x_0}(t, t_0, c(t))\big]^{-1} \tag{2.1}$$

soit stable au sens de Liapounoff.

Hypothèses K_1. La solution $x = 0$ de l'équation (1) est stable au sens de Liapounoff.

Hypothèses K_2. La solution $x = 0$ de l'équation (1) est asymptotiquement stable.

Théorème 1. (A) *Les hypothèses* H, K, K_1 *étant admises, la solution* $x = 0$ *de l'equation* (2) *est stable.*

(B) *Les hypothèses* H, K, K_2 *étant admises, la solution* $x = 0$ *de l'équation* (2) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. (A) Dans le cas où $r(t) = r\big(t, x(t)\big)$ nous avons, en vertu du lemme 1, la relation (1.2) avec $c(t)$ satisfaisant à

$$c'(t) = r\big(t, \varphi(t, t_0, c(t)\big)\big[\varphi_{x_0}(t, t_0, c(t))\big]\big)^{-1}.$$

Envisageons $\varepsilon > 0$. De l'hypothèse K_1 il résulte qu'il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$|\varphi(t, t_0, \xi)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } |\xi| \leqslant \delta(\varepsilon),\ t \geqslant t_0. \tag{2.2}$$

De l'hypothèse K il s'ensuit que pour $\delta(\varepsilon)$ il existe un $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tel que

$$|c(t, t_0, x_0)| \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \text{pour } |x_0| \leqslant \delta_1(\varepsilon)$$

et par suite, en vertu de (1.2) et (2.2)

$$|x(t, t_0, x_0)| = \big|\varphi\big(t, t_0, c(t, t_0, x_0)\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } |x_0| \leqslant \delta_1(\varepsilon).$$

La stabilité est donc démontrée.

(B) Dans le cas où l'on a H, K, K_2 les hypothèses H, K, K_1 sont aussi satisfaites et par suite la solution banale de l'équation (2) est stable. Il reste à prouver qu'il existe un $\delta_0 > 0$ tel que pour $|x_0| \leqslant \delta_0$ chaque solution $x(t, t_0, x_0)$ de l'équation (2) tend vers zéro. De l'hypothèse K_2 il s'ensuit qu'il existe un $\tilde{\delta}_0 > 0$ tel que

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t, t_0, \xi) = 0 \quad \text{pour } |\xi| \leqslant \tilde{\delta}_0. \tag{2.3}$$

De l'hypothèse K il résulte qu'il existe un $\delta_0 = \delta(\tilde{\delta}_0) > 0$ tel que

$$|c(t, t_0, x_0)| \leqslant \tilde{\delta}_0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0,\ |x_0| \leqslant \delta_0$$

d'où, en vertu de l'unicité des solutions de (1), on a

$$\varphi(t, t_0, -\tilde{\delta}_0) \leqslant x(t, t_0, x_0) = \varphi\big(t, t_0, c(t, t_0, x_0)\big) \leqslant \varphi(t, t_0, \tilde{\delta}_0)$$

et par suite, en vertu de (2.3),

$$\lim_{t\to\infty} \varphi\big(t, t_0, c(t, t_0, x_0)\big) = 0,$$

Le théorème 1 est ainsi démontré.

Remarque 1. Dans le cas où

$$u\cdot r(t, u) \leqslant 0 \quad \text{pour } |u| \leqslant \delta_0 \tag{2.4}$$

on a

$$c'(t)\cdot c(t) \leqslant 0 \quad \text{pour } |c| \leqslant \bar{\delta}_0$$

(où $\bar{\delta}_0$ est tel que

$$|\varphi(t, t_0, \eta)| \leqslant \delta_0 \quad \text{pour } |\eta| \leqslant \bar{\delta}_0)$$

et par suite $c = 0$ est une solution stable de l'équation (2.1). Il résulte donc du théorème 1 que dans le cas où sont satisfaites la condition (2.4) et les hypothéses H, K_1, $x = 0$ est une solution stable de l'équation (2). Dans le cas où sont satisfaites les hypothèses (2.4), H, K_2, la solution $x = 0$ de l'équation (2) est asymptotiquement stable.

Remarque 2. On vérifie facilement que notre méthode peut aussi être appliquée dans le cas de l'équation à paramètre retardé de la forme:

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) + r\big(t, x_t, x(t)\big) \tag{2.5}$$

où x_t est la fonction $x_t(s) = x(t+s)$ pour $s \leqslant 0$, et $r(t, \sigma, x)$ satisfait à l'inégalité

$$x\cdot r(t, \sigma, x) \leqslant 0 \quad \text{pour } |\sigma| \leqslant r_0,\ |x| \leqslant r_0,\ t \geqslant t_0. \tag{2.6}$$

Il suffit d'admettre les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES $\bar{\mathrm{H}}$. 1° $f(t, x)$ est de classe C^1, $r(t, \sigma, x)$ continue dans $R\times C\big[(-\infty, 0], R\big]\times R$.

2° La solution $\varphi(t, t_0, x_0)$ de l'équation (1) (telle que $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$) est définie pour chaque x_0 et $t \in (-\infty, \infty)$, $t_0 \in (-\infty, \infty)$.

3° Supposons l'unicité des solutions de l'équation (1.1) (pour chaque $r(t)$).

4° Supposons que

$$|\varphi(t, t_0, x_0)| \leqslant r_0 \quad \text{pour } |x_0| < \delta \ (\delta > 0) \tag{2.7}$$

pour chaque t_0 et $t \leqslant t_0$.

5° Supposons que la solution $x = 0$ de l'équation (1) soit uniformément stable.

Dans le cas envisagé la relation (1.2) est de la forme

$$x(t, t_0, x_0, \sigma) = \varphi\big(t, t_0, c(t, t_0, x_0, \sigma)\big), \quad \sigma(t_0) = x_0, \tag{1.2'}$$

$$c(t_0+s, t_0, x_0, \sigma) = \varphi\big(t_0, t_0+s, \sigma(s)\big) = a(s) \quad \text{pour } s \leqslant 0. \tag{2.8}$$

La fonction $c(t, t_0, x_0, \sigma)$ est une solution de l'équation

$$(2.9)\qquad c'(t) = r\big(t, \varphi(t+\cdot, t_0, c(t, t_0, x_0, \sigma)), \varphi(t, t_0, c(t, t_0, \sigma))\big)\big[\varphi_{x_0}(t, t_0, c(t, t_0, x_0, \sigma))\big]^{-1},$$

$$(2.10)\qquad c_{t_0}(s) = a(s), \quad c(t_0) = x_0 = \sigma(t_0).$$

En vertu de l'unicité des solutions de l'équation (1) et de l'hypothèse que $x = 0$ est une solution de (1), on a

$$(2.11)\qquad x_0\cdot\varphi(t, t_0, x_0) > 0 \quad \text{pour } x_0 \neq 0.$$

et par suite, en vertu de (2.6),

$$(2.12)\qquad x_0\cdot r\big(t, \sigma, \varphi(t, t_0, x_0)\big) \leqslant 0 \quad \text{pour } |\sigma| \leqslant r_0 \text{ et } t \geqslant t_0 \text{ tel que } |\varphi(t, t_0, x_0)| \leqslant r_0.$$

De la stabilité de la solution $x = 0$ de l'équation (1) il résulte qu'il existe un $\delta_0 > 0$ tel que

$$|\varphi(t, t_0, x_0)| \leqslant r_0 \quad \text{pour } |x_0| \leqslant \delta_0, \ t \geqslant t_0$$

et par suite pour $\xi \in C\big[(-\infty, 0], R\big]$ et $|\xi| \leqslant r_0$

$$(2.13)\qquad x_0\cdot r\big(t, \xi, \varphi(t, t_0, x_0)\big) \leqslant 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0.$$

En vertu de (2.7) et (2.13) on a

$$(2.14)\qquad c(t, t_0, x_0, \sigma)\cdot r\big(t, \varphi(t+\cdot, t_0, c(t+\cdot, t_0, \sigma)), \varphi(t, t_0, c(t))\big) \leqslant 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0 \text{ tel que } |c(t+s, t_0, x_0)| \leqslant \delta.$$

De la stabilité uniforme de la solution $x = 0$ de l'équation (1) il résulte qu'il existe un $\hat{\delta} > 0$ (ne dépendant pas de s) tel que

$$|c(t_0, t_0+s, t_0, x_0)| = \big|\varphi\big(t_0, t_0+s, \sigma(s)\big)\big| \leqslant \tfrac{1}{2}\delta \quad \text{pour } s \leqslant 0$$

pour $\sigma(s)$ tel que $|\sigma(s)| \leqslant \hat{\delta}$ pour $s \leqslant 0$.

On a

$$c(t+s, t_0, x_0, \sigma) = c\big(t_0+(t-t_0+s), t_0, x_0, \sigma\big).$$

Supposons que $t \geqslant t_0$. Alors

$$t-t_0+s \leqslant 0 \quad \text{pour } s \leqslant t_0-t \leqslant 0$$

et par suite

$$|c(t+s, t_0, x_0, \sigma)| \leqslant \tfrac{1}{2}\delta \quad \text{pour } s \leqslant t_0-t \leqslant 0, \ |\sigma| \leqslant \hat{\delta}.$$

De la continuité de $c(t, t_0, x_0, \sigma)$ au point (t_0, t_0, x_0, σ) il résulte qu'il existe un $\delta^* > 0$ tel que

$$|c(t, t_0, x_0, \sigma) - c(t_0, t_0, x_0, \sigma)| \leqslant \tfrac{1}{2}\delta \quad \text{pour } |t-t_0| \leqslant \delta^*$$

et par suite

$$|c(t+s, t_0, x_0, \sigma)| < \bar{\delta} \quad \text{pour } |t-t_0| \leqslant \delta^*, \ t_0 - t \leqslant s \leqslant 0, \ |\sigma| \leqslant \hat{\delta},$$

c'est-à-dire

$$(2.15) \qquad |c(t+s, t_0, x_0, \gamma)| < \bar{\delta} \quad \text{pour } s \leqslant 0, |t-t_0| \leqslant \delta^*, |\sigma| \leqslant \hat{\delta}$$

donc (2.14) est satisfaite pour $s \leqslant 0$, $|t-t_0| \leqslant \delta^*$, $|\sigma| \leqslant \hat{\delta}$. On a

$$\varphi_{x_0}(t, t_0, c) > 0 \quad \text{pour } c \neq 0,$$

et par conséquent

$$c(t, t_0, x_0, \sigma)\cdot c'(t, t_0, x_0, \sigma) \leqslant 0 \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta^*$$

d'où il vient

$$|c(t, t_0, x_0, \sigma)| \leqslant |x_0| \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta^*, \ |\sigma| \leqslant \hat{\delta}.$$

Supposons que $\bar{t} \geqslant t_0 + \delta^*$ soit tel que

$$(2.16) \qquad |c(t, t_0, x_0, \sigma)| \leqslant |x_0| \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t},$$

$$(2.17) \qquad |c(t, t_0, x_0, \sigma)| > |x_0| \quad \text{pour } \bar{t} < t < \bar{t} + \eta \ (\eta > 0).$$

Envisageons la fonction $|c(t, \bar{t}, x_0, \bar{\sigma})|$, où

$$\bar{\sigma}(s) = \varphi\big(\bar{t}+s, \bar{t}, \varphi(\bar{t}, t_0, c(\bar{t}+s, t_0, x_0, \sigma))\big) \quad \text{pour } s \leqslant 0.$$

On a

$$c(\bar{t}, t_0, x_0, \sigma) = |x_0|.$$

En vertu de (2.6) et (2.12) on a

$$c(t, \bar{t}, x_0, \sigma)\cdot r\big(t, \varphi(t+\cdot, \bar{t}, c(t+\cdot, \bar{t}, x_0, \bar{\sigma})), \varphi(t, \bar{t}, c(t, \bar{t}, x_0, \bar{\sigma}))\big) \leqslant 0$$
$$\text{pour } t \geqslant \bar{t} \text{ tel que } |c(t+s, \bar{t}, \bar{\sigma})| \leqslant \bar{\delta}.$$

En vertu de (2.14) et (2.15) on a, pour $t \leqslant \bar{t}$,

$$|c(t+s, \bar{t}, x_0, \bar{\sigma})| < \bar{\delta} \quad \text{pour } |x_0| < \bar{\delta}, t \leqslant \bar{t}, \ s \leqslant 0.$$

De même que pour t_0 on démontre donc qu'il existe un $\delta^{**} > 0$ tel que

$$|c(t+s, \bar{t}, x_0, \bar{\sigma})| < \bar{\delta} \quad \text{pour } |t-\bar{t}| \leqslant \delta^{**}, \ s \leqslant 0,$$

ce qui est incompatible avec (2.17) (cf. (2.14)). Nous avons ainsi démontré que

$$|c(t, t_0, x_0, \sigma)| \leqslant |x_0| \quad \text{pour } t \geqslant t_0, |\sigma| \leqslant \hat{\delta}, \ \sigma(t_0) = x_0,$$

et par suite

$$(2.18) \qquad |x(t, t_0, x_0, \sigma)| = \big|\varphi(t, t_0, c(t, t_0, x_0, \sigma))\big|$$
$$\leqslant \big|\varphi(t, t_0, |x_0|)\big| \quad \text{pour } t \geqslant t_0, \ |\sigma| \leqslant \hat{\delta}, \sigma(t_0) = x_0.$$

L'inégalité (2.18) et la stabilité uniforme de la solution $x = 0$ de l'équation (1) entraînent donc la stabilité uniforme de la solution $x = 0$ de l'équation (2.5), et la stabilité asymptotique de la solution $x = 0$ de l'équation (1) entraîne la stabilité asymptotique de la solution $x = 0$ de l'équation (2.5).

3. HYPOTHÈSES $\hat{\mathrm{K}}$. Supposons que

$$|\varphi(t, t_0, \xi)| \leqslant \psi(t, t_0, |\xi|) \quad \text{pour } t \geqslant t_0, \tag{3.1}$$

$$\left|\frac{r(t, x)}{\varphi_{x_0}\big(t, t_0, \varphi(t_0, t, x)\big)}\right| \leqslant \varrho(t, |x|), \tag{3.2}$$

où la fonction $\varrho(t, z)$ est croissante par rapport à z pour $z \geqslant 0$ et telle que la solution $z = 0$ de l'équation

$$z'(t) = \varrho\Big(t, \psi\big(t, t_0, |z(t)|\big)\Big) \tag{3.3}$$

est stable.

THÉORÈME 2. *Les hypothèses $\hat{\mathrm{K}}$ étant admises, la solution $c = 0$ de l'équation* (2.1) *est stable, c'est-à-dire que l'hypothèse* K *est satisfaite.*

Démonstration. En vertu de la définition de la fonction $\varphi(t, t_0, \xi)$ la relation

$$x(t) = \varphi\big(t, t_0, c(t)\big)$$

est équivalente à

$$c(t) = \varphi\big(t_0, t, x(t)\big)$$

et par suite, en vertu de (2.2) et (3.2), on a

$$|c'(t)| = \left|\frac{r\Big(t, \varphi\big(t, t_0, c(t)\big)\Big)}{\varphi_{x_0}\big(t, t_0, c(t)\big)}\right| = \left|\frac{r\big(t, x(t)\big)}{\varphi_{x_0}\Big(t, t_0, \varphi\big(t_0, t, x(t)\big)\Big)}\right| \leqslant \varrho(t, |x|)$$
$$= \varrho\Big(t, \big|\varphi\big(t, t_0, c(t)\big)\big|\Big)$$

d'où, en vertu de (3.1),

$$|c'(t)| \leqslant \varrho\Big(t, \psi\big(t, t_0, |c(t)|\big)\Big),$$

donc

$$|c(t, t_0, x_0)| \leqslant z(t, t_0, |x_0|), \quad \text{pour } t \geqslant t_0,$$

où $z(t, t_0, |x_0|)$ est la solution maximale de l'équation (3.3) ($z(t_0, t_0, |x_0|) = |x_0| = |c(t_0)|$), d'où résulte la stabilité de la solution $c = 0$ de l'équation (2.1). Le théorème 2 est ainsi démontré.

Remarque 2. Du théorème 2 il résulte qu'on peut remplacer dans le théorème 1 l'hypothèse K par $\hat{\mathrm{K}}$.

4. Comme exemple envisageons le cas où l'équation (1) est de la forme

$$x'(t) = \Phi(t)\cdot\gamma\big(x(t)\big). \tag{4.1}$$

Admettons les hypothèses suivantes:

Hypothèses $\overline{\overline{\mathrm{H}}}$. $\gamma(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$, $\Phi(t)$ continue pour $t \geqslant t_0$ $\gamma(x)$ de classe C^1, $\gamma(0) = 0$.

Posons

$$\int_c^x \frac{du}{\gamma(u)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} G_+(x) \quad \text{pour } x > 0 \ (c > 0), \tag{4.2}$$

$$\int_{-c}^x \frac{du}{\gamma(u)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} G_-(x) \quad \text{pour } x < 0, \tag{4.3}$$

$$\int_{t_0}^t \Phi(s)\,ds = k(t, t_0). \tag{4.4}$$

La solution de l'équation (4.1) est de la forme

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \begin{cases} G_+^{-1}[G_+(x_0) + k(t, t_0)] & \text{pour } x_0 > 0, \\ G_-^{-1}[G_-(x_0) + k(t, t_0)] & \text{pour } x_0 < 0, \\ 0 & \text{pour } x_0 = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Supposons que

$$x \cdot \gamma(x) > 0, \tag{4.8}$$

$$\lim_{x \to 0_+} G_+(x) = -\infty, \tag{4.9}$$

$$\lim_{x \to 0_-} G_-(x) = -\infty, \tag{4.10}$$

$$k(t, t_0) \leqslant a(t_0) < +\infty \quad \text{pour } t \geqslant t_0. \tag{4.11}$$

Les hypothèses (4.8), (4.9), (4.10) et (4.11) étant admises, il existe un $\delta_0 > 0$ tel que pour $|x_0| \leqslant \delta_0$ la solution $\varphi(t, t_0, x_0)$ est défin e dans tout l'intervalle $t_0 \leqslant t < \infty$ et la solution $x = 0$ de l'équation (4.1) est stable, c'est-à-dire que les hypothèses K_1 sont satisfaites. Dans le cas où

$$\lim_{t \to \infty} k(t, t_0) = -\infty \tag{4.12}$$

les hypothèses K_2 sont satisfaites.

Les hypothèses $\hat{\mathrm{K}}$ sont satisfaites, par exemple, dans le cas où le sont les hypothèses suivantes:

Hypothèses H^*. 1° On suppose satisfaites les hypothèse H;

2°

$$\gamma(-x) = -\gamma(x); \tag{4.13}$$

3° Il existe une fonction $\varrho(t, z)$ continue pour $z \geqslant 0$ telle que

$$|r(t, x)| \leqslant \varrho(t, |x|) \frac{\gamma(|x|)}{\gamma\left[G_+^{-1}\left(G_+(|x|) + k(t_0, t)\right)\right]} \tag{4.14}$$

et telle que la solution $u = 0$ de l'équation

$$u'(t) = \varrho\big(t, |u(t)|\big)$$

est stable.

Démonstration. On vérifie facilement que dans le cas envisagé on a

$$G_+(x) = G_-(-x), \tag{4.15}$$

$$G_-^{-1}(u) = -G_+^{-1}(u) \tag{4.16}$$

et par suite

$$|\varphi(t, t_0, x_0)| = G_+^{-1}\big(G_+(|x_0|) + k(t, t_0)\big) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \psi(t, t_0, |x_0|). \tag{4.17}$$

Evaluons $\big|\varphi_{x_0}\big(t, t_0, \varphi(t_0, t, x)\big)\big|$ (intervenant dans la relation (3.2), à démontrer). On a

$$\varphi_{x_0}(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \dfrac{G'_+(x_0)}{G'_+\big(G_+^{-1}(G_+(x_0) + k(t, t_0))\big)} & \text{pour } x_0 > 0, \\[2ex] \dfrac{G'_-(x_0)}{G'_-\big(G_-^{-1}(G_-(x_0) + k(t, t_0))\big)} & \text{pour } x_0 < 0. \end{cases}$$

On a donc, en vertu de (4.13), (4.15), (4.16) et (4.3),

$$\varphi_{x_0}(t, t_0, \xi) = \frac{1}{\gamma(|\xi|)} \cdot \gamma\Big(G_+^{-1}\big(G_+(|\xi|) + k(t, t_0)\big)\Big)$$

pour $\xi = \varphi(t_0, t, x)$ on obtient donc

$$\big|\varphi_{x_0}\big(t, t_0, \varphi(t_0, t, x)\big)\big| = \frac{\gamma\Big(G_+^{-1}\big(G_+(|\varphi(t_0, t, x)|) + k(t, t_0)\big)\Big)}{\gamma\big(|\varphi(t_0, t, x)|\big)}.$$

En vertu de (4.15) et (4.16) il vient

$$|\varphi(t_0, t, x)| = G_+^{-1}\big(G_+(|x|) + k(t_0, t)\big)$$

donc, en vertu de (4.4),

$$\begin{aligned}\gamma\Big(G_+^{-1}\big(G_+(|\varphi(t_0, t, x)|) + k(t, t_0)\big)\Big) \\ = \gamma\Big(G_+^{-1}\big(G_+(|x|) + k(t_0, t) + k(t, t_0)\big)\Big) = \gamma(|x|)\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\big|\varphi_{x_0}\big(t, t_0, \varphi(t_0, t, x)\big)\big| = \frac{\gamma(|x|)}{\gamma\Big(G_+^{-1}\big(G_+(|x|) + k(t_0, t)\big)\Big)}$$

et par suite l'inégalité (4.14) entraine (3.2). Nous avons ainsi démontré le théorème suivante:

THÉORÈME 3. *Si, dans le cas de l'équation* (4.1), *on admet les hypothèses* H, (4.11), (4.8), (4.9), (4.13) *et* (4.14), *la solution* $x = 0$ *de l'équation*

$$(*) \qquad x'(t) = \Phi(t)\cdot\gamma\big(x(t)\big)+r\big(t, x(t)\big)$$

est stable.

Dans le cas où au lieu de (4.11) *on a la condition* (4.12), *la solution* $x = 0$ *de l'équation* $(*)$ *est asymptotiquement stable.*

Remarque 3. Dans le cas où

$$\gamma(x) \quad \text{est croissante,}$$

$$(4.18) \qquad \gamma(x) > 0 \quad \text{pour } x > 0$$

et

$$(4.19) \qquad k(t, t_0) \geqslant 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0$$

la condition (4.14) peut être remplacée par la condition plus simple

$$(4.14^*) \qquad |r(t, x)| \leqslant \varrho(t, |x|),$$

où $\varrho(t, |x|)$ est telle que la solution $u = 0$ de l'équation

$$u'(t) = \varrho\big(t, |u(t)|\big)$$

est stable.

De l'inégalité (4.18) il résulte que $G_+^{-1}(u)$ est croissante et par suite, en vertu de (4.19), (4.4) et (4.14*), on a

$$|r(t, x)|\,\frac{\gamma\Big(G_+^{-1}\big(G_+(|x|)+k(t_0, t)\big)\Big)}{\gamma(|x|)} \leqslant |r(t, x)| \leqslant \varrho(t, |x|)$$

donc (4.14) résulte de (4.14*).

5. Remarque sur l'instabilité.

HYPOTHÈSES P. Supposons que

1° Pour chaque $\xi \neq 0$ il existe un $\lambda(\xi) > 0$ tel que

$$(5.1) \qquad |\varphi(t, t_0, \xi)| \geqslant \lambda(\xi) \quad \text{pour } t \geqslant t_0.$$

2° La solution $c = 0$ de l'équation (2.1) est instable.

THÉORÈME 4. *Les hypothèses* H, P *étant admises, la solution* $x = 0$ *de l'équation* (2) *est instable.*

Démonstration. Comme la solution $c = 0$ de l'équation (2.1) est instable il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $\{c_n\}$, $c_n \to 0$, $t_n \geqslant t_0$ telles que pour $c_n(t) = c(t, t_0, c_n)$ on a

$$c_n(t_0) = c_n, \qquad |c_n(t_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Posons par définition

$$x_n(t) = \varphi\bigl(t, t_0, c_n(t)\bigr).$$

on a

$$x_n(t_0) = c_n(t_0) = c_n \to 0, \qquad x_n(t_n) = \varphi\bigl(t_n, t_0, c_n(t_n)\bigr).$$

Dans le cas où $c_n(t_n) > 0$ on a

$$x_n(t_n) > \varphi(t_n, t_0, \varepsilon_0) \geqslant \lambda(\varepsilon_0) > 0.$$

Dans le cas où $c_m(t_m) < 0$ il vient

$$x_m(t_m) < \varphi(t_m, t_0, -\varepsilon_0) \leqslant -\lambda(\varepsilon_0) < 0$$

par conséquent, en vertu de (5.1), on obtient

$$|x_n(t_n)| > \lambda(\varepsilon_0) \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

La solution $x = 0$ de l'équation (2) est donc instable.

Remarque 4. Du théorème 4 il résulte que dans le théorème 1 (A) l'hypothèse K est essentielle. Les hypothèses H et K_1 ne sont pas suffisantes.

Reçu par la Rédaction le 10. 9. 1976