ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1965)

Sur la dérivée covariante des pseudoobjets géométriques

par E. Siwek (Katowice)

§ 1. Introduction. Dans la note présente nous définissons la dérivée covariante des champs des pseudoobjets géométriques (¹) associés avec des objets géométriques lineaires et homogènes. Pour ce but nous utilisons la définition de la dérivée covariante des champs des objets géométriques donnée par A. Szybiak ([3] et [4]). Pourtant la dérivée covariante définie ici est dans certaines cas (p. ex. pour l'objet de Pensov) plus simple et plus naturelle que celle définie dans [3] et [4].

§ 2. Pseudoobjet géométrique associé à un objet géométrique. Soit Ω un objet géométrique abstrait (²) sur une variété différentiable à n dimensions V^n relatif au pseudogroupe $\mathcal{G}$ des transformations des systèmes locaux des coordonnées. Le pseudogroupe $\mathcal{G}$ nous supposons être un pseudogroupe de Lie à p paramètres $a = (a^1, \ldots, a^p)$ et nous désignons: par A l'ensemble des paramètres a correspondant aux transformations appartenant au $\mathcal{G}$, par $X \subset R^m$ le fibre d'objet Ω et par $F(x, a)$ (où $x = (x^1, \ldots, x^m) \in X$) la loi de transformation d'objet Ω.

Soit $\mathcal{E}$ une équivalence (relation réflexive, symétrique et transitive) définie dans X et telle que l'on ait:

$$x\mathcal{E}x' \Rightarrow F(x, a)\mathcal{E}F(x', a) \quad \text{pour tout} \quad a \in A\,. \tag{1}$$

Nous avons montré ([2]) que l'objet Ω compatible avec $\mathcal{E}$, c'est-à-dire satisfaisant à la condition (1), détermine un pseudoobjet géométrique abstrait $\boldsymbol{\Omega}$ (désigné dans la suite aussi par $\Omega/\mathcal{E}$ et appelé *associé* à Ω par rapport à $\mathcal{E}$) ayant comme fibre $\boldsymbol{X} \overset{\text{df}}{=} X/\mathcal{E}$ et avec la loi de transformation $\Phi(\boldsymbol{x}, a)$ définie par la formule

$$\Phi(\boldsymbol{x}, a) \overset{\text{df}}{=} \{y \in X\colon\ y = F(x, a),\, x \in \boldsymbol{x}\}\,, \tag{2}$$

où $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Soit ω un objet géométrique particulier appartenant à Ω, c'est-à-dire une application $\omega\colon \sigma \to x$ de l'ensemble Σ des systèmes locaux des coor-

---

(¹) Pour la définition voir [2].

(²) Pour les définitions fondamentales de la théorie des objets géométriques voir p. ex. [1].

données sur V^n admissibles par rapport au pseudogroupe $\mathcal{G}$ dans le fibre X, satisfaisant pour tout couple $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma$ à la condition:

$$\omega(\sigma') = F[\omega(\sigma), a] , \tag{3}$$

où a dénote les paramètres correspondant à la transformation T: $\sigma \to \sigma'$. On déduit des formules (2) et (3) qu'on peut faire correspondre à tout objet particulier $\omega \in \Omega$ un pseudoobjet particulier $\boldsymbol{\omega}$: $\sigma \to \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ (désigné aussi par $\omega/\mathcal{E}$ et appelé pseudoobjet *associé* avec ω par rapport à $\mathcal{E}$) défini par la formule:

$$\boldsymbol{\omega}(\sigma) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Phi(\boldsymbol{x}_0, a) ,$$

où $\boldsymbol{x}_0$ dénote la classe des points de X équivalents à la valeur $\omega(\sigma_0)$ d'objet ω dans un système fixe des coordonnées σ_0 et a dénote les paramètres correspondant à la transformation $\sigma_0 \to \sigma$.

§ 3. Dérivée covariante des champs des pseudoobjets géométriques. Supposons que Ω est un objet linéaire et homogène c'est-à-dire que sa loi de transformation $F(x, a)$ s'exprime par les fonctions $f^k(x, a)$ [3] linéaires et homogènes par rapport à x et posons:

$$xEx' \stackrel{\mathrm{df}}{\Longleftrightarrow} \exists_{\varrho \neq 0}(x' = \varrho x) \tag{4}$$

et

$$xE^*x' \stackrel{\mathrm{df}}{\Longleftrightarrow} \exists_{\varrho > 0}(x' = \varrho x) . \tag{5}$$

Considérons un champ différentiable $\omega(\xi)$: $\sigma \to x(\xi)$ (où $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ sont des coordonnées locales sur V^n dans le système σ) des objets particuliers appartenant à Ω, défini dans un domaine de la variété V^n. L'opérateur ∇ de la dérivée covariante définie par A. Szybiak ([3] et [4]) et appliqué au champ $\omega(\xi)$ prend la forme suivante:

$$\nabla\omega(\xi)\colon\ \sigma \to \nabla_\nu x^k(\xi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \partial_\nu x^k + \hat{f}^k_\pi(x)\Gamma^\pi_\nu , \tag{6}$$

où

$$\partial_\nu \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} , \qquad \hat{f}^k_\pi(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left|\frac{\partial f^k(x, a)}{\partial a^\pi}\right|_{a=\iota}$$

(ι dénote les paramètres correspondant à la transformation identique: $\sigma \to \sigma$), Γ^π_ν dénote les composantes d'objet de connection généralisé (défini dans [4]).

Comme l'objet Ω est compatible avec les équivalences E et E^* définies par (4) et (5) nous pouvons considérer les pseudoobjets $\boldsymbol{\Omega} = \Omega/E$ et $\boldsymbol{\Omega}^* = \Omega/E^*$ associés à Ω par rapport à E et E^*. Comme les expressions

[3] Dans tout la note les indices parcourent les valeurs suivantes: $k = 1, \ldots, m$; λ, λ' $\nu, \nu' = 1, \ldots, n$; $i, i', j = 1, \ldots, n-1$; $\pi = 1, \ldots, p$.

$\nabla_\nu x^k$ définies par la formule (6) sont homogènes par rapport à x nous pouvons définir pour les champs différentiables $\boldsymbol{\omega}(\xi)$ resp. $\boldsymbol{\omega}^*(\xi)$ des pseudoobjets particuliers appartenant à $\boldsymbol{\Omega}$ resp. $\boldsymbol{\Omega}^*$ l'opérateur ∇ par la formule:

$$\nabla\boldsymbol{\omega}(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \nabla\omega(\xi)/E \quad \text{resp.} \quad \nabla\boldsymbol{\omega}^*(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \nabla\omega(\xi)/E^*, \tag{7}$$

où $\omega(\xi)$ dénote un champ des objets particuliers appartenant à Ω, tel que l'on ait:

$$\boldsymbol{\omega}(\xi) = \omega(\xi)/E \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega}^*(\xi) = \omega(\xi)/E^*.$$

§ 4. Dérivée covariante d'objet de Pensov. En particulier, considérons le cas où Ω est un vecteur abstrait avec le fibre

$$X = \{x \in R^m\colon\ x \neq (0, \ldots, 0)\}.$$

Le pseudoobjet géométrique $\boldsymbol{\Omega} = \Omega/E$ est considéré aussi comme un objet géométrique nonlinéaire, appelé l'objet de Pensov.

La dérivée covariante définie par A. Szybiak et appliqué au champs $\eta(\xi)$ des objets de Pensov prend la forme:

$$\nabla\eta(\xi)\colon\ \sigma \to \{\eta^i(\xi), \nabla_\nu\eta^i(\xi)\}, \tag{8}$$

où η^i sont les composantes d'objet de Pensov et $\nabla_\nu\eta^i$ s'expriment (voir [3]) par la formule:

$$\nabla_\nu\eta^i = \partial_\nu\eta^i + \eta^j\Gamma^i_{j\nu} + \Gamma^i_{n\nu} - \eta^i(\eta^j\Gamma^n_{j\nu} + \Gamma^n_{n\nu}).$$

Les composantes $\{\eta^i, \nabla_\nu\eta^i\}$ de la dérivée covariante d'objet de Pensov définie par la formule (8) ont la loi de transformation suivante:

$$\eta^{i'} = (A^{i'}_i\eta^i + A^{i'}_n/A^{n'}_i\eta^i + A^{n'}_n)^{-1},$$

$$\nabla_{\nu'}\eta^{i'} = \frac{(A^{i'}_i A^{n'}_j - A^{n'}_i A^{i'}_j)\eta^j + (A^{i'}_i A^{n'}_n - A^{n'}_i A^{i'}_n)}{(A^{n'}_j\eta^j + A^{n'}_n)^2} A^{\nu}_{\nu'}\nabla_\nu\eta^i \quad \text{où} \quad A^{\lambda'}_\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\xi^{\lambda'}}{\partial\xi^\lambda}$$

pendant que les composantes $\varrho\nabla_\nu x^\lambda$ de la dérivée covariante définie par la formule (7) pour le pseudoobjet $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$ se transforment d'une façon bien plus simple, à savoir:

$$\varrho\nabla_{\nu'}x^{\lambda'} = A^{\nu}_{\nu'}A^{\lambda'}_\lambda\varrho\nabla_\nu x^\lambda.$$

Le pseudoobjet $\boldsymbol{\omega}$ ainsi que l'objet de Pensov η réprésentent la direction d'un vecteur ω donc ils peuvent être considérés comme la classe des vecteurs équivalents à ω par rapport à l'équivalence E. Il est donc naturel d'exiger que la dérivée covariante de η soit en même rélation à la dérivée covariante du vecteur ω. La définition (7) satisfait à cette exigence.

Travaux cités

[1] M. Kucharzewski et M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Mat. 43 (1964).

[2] E. Siwek, *Pseudoobjets géométriques*, Ann. Polon. Math., ce volume, p. 209-218.

[3] A. Szybiak, *Covariant derivative of geometric objects of the first class*, Bull. Acad. Polon. Sci. 11 (11) (1963), p. 687-690.

[4] — *Covariant derivative of geometric objects*, Bull. Acad. Polon. Sci. 11 (12) (1963), p. 751-755.

Reçu par la Rédaction le 11. 5. 1964