ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1968)

Correction à mon travail intitulé "Une idée concernant la majoration numérique de la solution du problème de Neumann relatif à l'équation de la chaleur" (1)

par G. ADLER (Budapest)

Dans le § 3 du travail en question j'ai distingué les cas des domaines "croissants" et "décroissants" comme des cas essentiellement différents. J'ai aperçu plus tard que ces ne sont que des cas spéciaux d'un seul cas plus général qui peut au fond être traité sur le modèle du théorème 2 du § 3. L'idée de distinguer les deux cas est la conséquence d'une erreur qui se trouve dans la démonstration du théorème 1. Mon attention a été attirée sur cette erreur par M. Piotr Besala.

Le théorème général se démontre comme il suit. (On utilisera les notations et les résultats du travail originel sans les répéter ici.)

THÉORÈME. *Supposons que*

1° *la fonction* $u(x, t)$

(i) *satisfasse à l'équation* (1) *dans* D,

(ii) *admette la dérivée* $\partial u/\partial x$ *continue dans* $\bar{D}$,

(iii) *admette les dérivées* $\partial^3 u/\partial x^3$, $\partial^2 u/\partial x \partial t$, $\partial^2 u/\partial t \partial x$ *continues dans* D;

2°

$$\min_{0 \leqslant t \leqslant T} l(t) > \frac{1}{\min\limits_{\bar{D}} p(x)} [\max_{\Sigma_1} p(x) \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi_1(t) - \xi_1(0)| + \max_{\Sigma_2} p(x) \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi_2(t) - \xi_2(0)|] \ (2).$$

(1) Annales Polonici Mathematici 17 (1965), pp. 119-128.

(2) Si la condition 2° n'est pas réalisée, mais si l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$ peut être divisé par les points $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_s = T$ de telle façon que

$$\min_{T_i \leqslant t \leqslant T_{i+1}} l(t) > \frac{1}{\min\limits_{\bar{D}_i} p(x)} [\max_{\Sigma_{1i}} p(x) \max_{T_i \leqslant t \leqslant T_{i+1}} |\xi_1(t) - \xi_1(T_i)| + \max_{\Sigma_{2i}} p(x) \max_{T_i \leqslant t \leqslant T_{i+1}} |\xi_2(t) - \xi_2(T_i)|],$$

Alors (³)

$$m \leqslant \max\left[\max_{0\leqslant t\leqslant T} l(t)(aM+\beta);\right.$$

$$\left.\frac{2MT\max\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} k(x)+\frac{1}{2}\min\limits_{\bar{D}} p(x)\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} l(t)^2(aM+\beta)+Q+F(T)}{\min\limits_{\bar{D}} p(x)\min\limits_{0\leqslant t\leqslant T} l(t)-\sum\limits_{i=1}^{2}\max\limits_{\Sigma_i} p(x)\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_i(t)-\xi_i(0)|}\right].$$

Démonstration. Soit (x^*, t^*) un point du domaine $\bar{D}$ où la fonction $|u(x, t)|$ prend le maximum de ses valeurs prises dans $\bar{D}$:

$$|u(x^*, t^*)| = m\,, \qquad (x^*, t^*)\in\bar{D}\,.$$

Si la fonction $z(x) = u(x, t^*)$ s'annule dans l'intervalle $\xi_1(t^*)\leqslant x\leqslant\xi_2(t^*)$, alors la majoration suivante est évidente:

$$m\leqslant\bar{M}l(t^*)\leqslant(aM+\beta)\max_{0\leqslant t\leqslant T} l(t)\,.$$

Si la fonction $z(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle en question, alors supposons-la positive sans restriction de la généralité.

Étant donné que $u(x, t^*)$ est supposée positive, on aura

$$m = u(x^*, t^*)\qquad [=\max_{\xi_1(t^*)\leqslant x\leqslant\xi_2(t^*)} u(x, t^*)]\,,$$

et $u(x, t^*)$ peut être minorée de la façon suivante:

$$u(x, t^*)\geqslant m-|x-x^*|\bar{M}\qquad[\xi_1(t^*)\leqslant x\leqslant\xi_2(t^*)]\,.$$

On en obtient, par un calcul élémentaire,

$$\text{(a)}\quad \int\limits_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} u(x, t^*)\,dx\geqslant l(t^*)m-\tfrac{1}{2}\bar{M}\{[x^*-\xi_1(t^*)]^2+[\xi_2(t^*)-x^*]^2\}$$
$$\geqslant ml(t^*)-\tfrac{1}{2}\bar{M}l(t^*)^2\geqslant m\min_{0\leqslant t\leqslant T} l(t)-\tfrac{1}{2}\bar{M}\max_{0\leqslant t\leqslant T} l(t)^2\,.$$

---

où

$$\bar{D}_i = \bar{D}\cap[(T_i\leqslant t\leqslant T_{i+1})\times(-\infty<x<+\infty)]\,,$$
$$\Sigma_{1i} = \Sigma_1\cap[(T_i\leqslant t\leqslant T_{i+1})\times(-\infty<x<+\infty)]\,,$$
$$\Sigma_{2i} = \Sigma_2\cap[(T_i\leqslant t\leqslant T_{i+1})\times(-\infty<x<+\infty)]\,,$$

alors la majoration de m peut être établie graduellement, en progressant de $\bar{D}_i$ à $\bar{D}_{i+1}$.

(³) Ici a et β sont les deux constantes introduites à la fin du § 2.

Intégrons l'équation (1) par rapport à x de $\xi_1(t)$ à $\xi_2(t)$ en tenant t fixe:

$$\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx = \left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi_1(t)}^{x=\xi_2(t)} = \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} p(x)\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,.$$

En intégrant cette équation par rapport à t entre les limites $t = 0$ et $t = t^*$, nous obtenons [4]:

$$\text{(b)}\quad \int_0^{t^*}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi_1(t)}^{x=\xi_2(t)}dt$$

$$= \int_0^{t^*}\left\{\left[\int_{\xi_1(t)}^{\xi_1(t^*)} + \int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} + \int_{\xi_2(t^*)}^{\xi_2(t)}\right]p(x)\frac{\partial u}{\partial t}dx\right\}dt - \int_0^{t^*}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \int_{\xi_1(0)}^{\xi_1(t^*)} p(x)\big[u\big(x, \xi_1^{-1}(x)\big) - u(x,0)\big]dx + \int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} p(x)[u(x,t^*) - u(x,0)]\,dx +$$

$$+ \int_{\xi_2(t^*)}^{\xi_2(0)} p(x)\big[u\big(x, \xi_2^{-1}(x)\big) - u(x,0)\big]dx - \int_0^{t^*}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$= -Q - \int_0^{t^*}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,dt + \int_{\xi_1(0)}^{\xi_1(t^*)} p(x)\,u\big(x, \xi_1^{-1}(x)\big)\,dx +$$

$$+ \int_{\xi_2(t^*)}^{\xi_2(0)} p(x)\,u\big(x, \xi_2^{-1}(x)\big)\,dx + \int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} p(x)\,u(x,t^*)\,dx\,.$$

Les intégrales qui figurent dans cette équation peuvent être majorées, respectivement minorées, de la manière suivante:

$$\int_0^{t^*}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi_1(t)}^{x=\xi_2(t)}dt \leqslant 2\max_{\Sigma_1+\Sigma_2} k(x)Mt^* \leqslant 2MT\max_{\Sigma_1+\Sigma_2} k(x);$$

en vertu de (a) et du fait que $u(x, t^*)$ est positive:

$$\int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} p(x)\,u(x,t^*)\,dx \geqslant \min_{\overline{D}} p(x)\big[m \min_{0\leqslant t\leqslant T} l(t) - \tfrac{1}{2}\bar{M}\max_{0\leqslant t\leqslant T} l(t)^2\big];$$

---

[4] $t = \xi_i^{-1}(x)$ $(i = 1, 2)$ dénote l'inverse de la fonction $x = \xi_i(t)$. Pour obtenir une fonction univalente elle est définie par la relation

$$\xi_i^{-1}(x) = \min_{\xi_i(t)=x} t\,.$$

Il est facile de vérifier que le changement de l'ordre des intégrations par rapport à x et t est légitime.

$$\int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_1(0)} p(x)\,u\big(x,\,\xi_1^{-1}(x)\big)\,dx \leqslant \max_{\Sigma_1} p(x)\,m \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_1(t)-\xi_1(0)|\,;$$

$$\int_{\xi_2(0)}^{\xi_2(t^*)} p(x)\,u\big(x,\,\xi_2^{-1}(x)\big)\,dx \leqslant \max_{\Sigma_2} p(x)\,m \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_2(t)-\xi_2(0)|\;.$$

En substituant aux termes figurant dans (b) les bornes supérieures respectivement inférieures ci-dessus, on obtient l'inégalité à démontrer.

Remarque. Si

$$\lim_{t\to T_0-0} l(t) = 0\;,$$

c'est-à-dire si l'intervalle se contracte à un seul point pour $t\to T_0$, la condition 2° ne peut pas être satisfaite et le théorème perd son sens. L'exemple donné dans la remarque à la page 126 du travail originel montre que ce phénomène est une caractéristique essentielle du problème traité.

Reçu par la Rédaction le 21. 4. 1967