ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVI (1972)

Über eine Definition der Krümmungen und mehrdimensionalen Schmiegeebenen einmal differenzierbarer Kurven im euklidischen Raum R_n

by Ginter Suchanek (Gliwice)

In meinen Aufsatz 2 habe ich eine Definition angegeben für die Krümmung, Windung, Schmiegeebene und rektifizierende Ebene einer in R_3 liegenden Kurve, welche in einem beliebigen Punkte eine Tangente hat (D_1). Die dort vorgeschlagenen Definitionen sollen nun so modifiziert werden, dass man sie auch für eine Kurve, die in R_n liegt, anwenden kann.

Nehmen wir an, der Punkt P liege auf der Kurve

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \in R_n. \tag{1}$$

Dabei sind: $r(0)$ – der Ortsvektor, dem der Punkt P entspricht, und $|r'(s)| = 1$ für jedes $s \in (a; \beta)$. Zuerst finden wir die Tangente der Kurve (1) im Punkt P und eine zu dieser Tangente orthogonal liegende $(n-1)$-dimensionale Hyperebene. Durch $\{e_2 \dots e_4\}$ bezeichnen wir ein orthonormales Vektorensystem, welches zu dieser Hyperebene gehört und seinen Ursprung im Punkt P hat. Die Projektionen von Kurve (1) auf die einzelnen Ebenen π_l, von denen jede durch zwei Vektoren $\{\vec{t}; \vec{e}_l^2\}$, $l = 2, \dots, n$ bestimmt ist, die Tangente und die Normalen zu dieser Tangente, die zu π_l gehören und um a von Punkt P entfernt sind, begrenzen die Gebiete, deren Flächeninhalten wir relativen Werte geben und entsprechend durch $Q_2^l(a)$ bezeichnen, wenn die Normale auf der positiven Seite der Tangente liegt, bzw. durch $Q_2^l(-a)$, wenn das Gegenteil der Fall ist (Abb. 1). Diesen Flächeninhalten schreiben wir einen positiven (negativen) Wert zu, wenn sie auf der positiven (negativen) Seite von $\vec{e}_l^2$ liegen. Die Koordinaten des Vektors $\vec{\beta}_2$ definieren wir mit Hilfe der Gleichung

$$\beta_2^l = \lim_{a \to 0} \frac{3 \cdot D_2^l(a)}{a^3} \quad \text{für } l = 2, \dots, n, \tag{2}$$

wo $D_2^l(a) = Q_2^l(a) + Q_2^l(-a)$ und $\beta_2^1 = 0$.

Die Voraussetzung $\vec{\beta}_2 \neq 0$ hat zur Folge, dass $\vec{\beta}_1 \overset{\text{def}}{=} \vec{t}$ und $\vec{\beta}_2$ eine Ebene bestimmen, die wir mit V_2 bezeichnen. Es gibt in R_n eine Hyperebene der Dimension $(n-2)$, die orthogonal zu V_2 liegt, in welcher wir

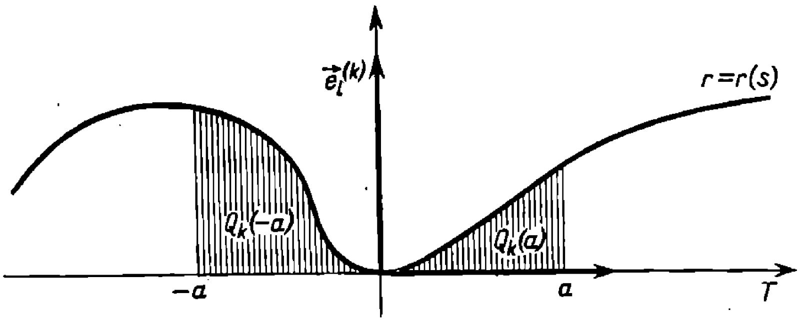

Abb. 1

wieder ein orthonormales Vektorensystem mit dem Ursprung im Punkt P festlegen können. Die Koordinaten des Vektors bezeichnen wir durch

$$\beta_3^l = \lim_{a \to 0} \frac{4 \cdot D_3^l(a)}{a \cdot D_2(a)} \qquad \text{für } 3 \leqslant l \leqslant n, \tag{3}$$

wo $D_3^l(a) = Q_3^l(a) - Q_3^l(-a)$ und $\beta_3^l = 0$ für $l = 1, 2$.

Die hier auftretenden Ausdrücke haben die gleiche Bedeutung wie vorher, mit einem kleinen Unterschied; zwar ist $D_2(a) = Q_2(a) + Q_2(-a)$, doch die Projektionsebene ist V_2 mit dem Basissystem $\vec{\mu}_1 = \vec{t}$; $\vec{\beta}_2/|\vec{\beta}_2| = \vec{\mu}_2$. Mit Hilfe dieser Rekursionsformel können wir die Vektoren $\vec{\beta}_1 \ldots \vec{\beta}_n$ bestimmen, und zwar wie folgt.

Sind die Vektoren $\vec{\beta}_1 \ldots \vec{\beta}_{k-1}$ gefunden worden und verschwinden sie nicht, so können wir eine $(n-k+1)$-dimensionale Hyperebene mit der Vektorenbasis $\{\vec{e}_k^k \ldots \vec{e}_n^k\}$ mit dem Ursprung in Punkt P bilden, die orthogonal zu V_{k-1} ist. Die Komponenten von $\vec{\beta}_k$ bezeichnen wir, für $k \leqslant l \leqslant n$,

$$\beta_k^l = \lim_{a \to 0} \frac{(k+1) D_k^l(a)}{a \cdot D_{k-1}(a)}, \tag{4}$$

$$D_k^l(a) = Q_k^l(a) + (-1)^k \cdot Q_k^l(-a),$$

$$D_{k-1}(a) = Q_{k-1}(a) + (-1)^{k-1} \cdot Q_{k-1}(-a)$$

und $\beta_k^l = 0$, wenn $1 \leqslant l \leqslant k$.

Auch hier haben $Q_k^l(a)$ und $Q_k^l(-a)$ die gleiche Bedeutung wie in (2), d.h. sie stellen relative Flächeninhalte dar, die entsprechend in den Ebenen $\{\vec{t};\ \vec{e}_l^{(k)}\}$ liegen $l = k, \ldots, n$ und $Q_{k-1}(-a)$ liegen in $(\vec{t};\ \vec{\beta}_{k-1})$. Wir nehmen an, dass $D_1(a) = a^2$ ist.

DEFINITION 1. Eine Hyperebene der Dimension k heisst *k-dimensionale Schmiegeebene* im Punkt P der Kurve (1), wenn sie den Punkt P, wie auch das schon vorher definierte unabhängige Vektorensystem $\{\vec{\beta}_1 \ldots \vec{\beta}_k\}$ enthält.

DEFINITION 2. Unter einen *k-Normalvektor* der Kurve (1) verstehen wir den Vektor $\vec{\mu}_{k+1} = \vec{\beta}_{k+1}/|\vec{\beta}_{k+1}|$. Das Vektorensystem $\vec{\mu}_1 \ldots \vec{\mu}_k$ nennen wir Frenetsche Reper.

DEFINITION 3. Die *Krümmung mit der Ordnungszahl k* einer Kurve (1) im Punkt P bezeichnen wir mit Hilfe der Formel

$$\mathscr{H}_k = \lim_{a\to 0} \frac{(k+1)\cdot D_k(a)}{a\cdot D_{k-1}(a)} \quad \text{für } k = 2, 3, \ldots, n. \tag{5}$$

Dabei sind: $D_k(a) = Q_k(a) + (-1)^k \cdot Q_k(-a)$ und die Summanden $Q_k(a)$ und $Q_k(-a)$ bedeuten wie vorher die relativen Flächeninhalte, welche durch senkrechte Projektion der Kurve (1) auf die Ebene $(\vec{t};\ \vec{\mu}_k)$ entstanden sind, wenn $k > 2$; $D_1(a) = a^2$.

DEFINITION 4. Den Vektor $\vec{\beta}_k$ nennen wir *Krümmungsvektor mit der Ordnungszahl $k-1$*.

Nehmen wir an, dass $V_1^* \ldots V_{n-1}^*$, $\mathscr{H}_1^* \ldots \mathscr{H}_{n-1}^*$ die Schmiegeebenen und Krümmungen im Sinne der klassischen Theorie einer Kurve der Klasse C_n darstellen.

SATZ 1. *Ist das Vektorensystem $\vec{\beta}_1 \ldots \vec{\beta}_k$ linear unabhängig* (¹) *und die Kurve gehört zur Klasse C_n, dann*

(a) $V_k = V_k^*$ *und* (b) $\mathscr{H}_k = \mathscr{H}_{k-1}^*$.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass $n = 2$. Es genügt zu zeigen, dass $\vec{\beta}_2 = \vec{r}''(s)$. Im Koordinatensystem, in welchem die Kurve tangential zum Vektor $\vec{e}_1 = \vec{t}$ ist $x^i(0) = [x^i(0)]' = 0$ für $i > 1$, erhalten wir

$$\beta_2^i = \lim_{a\to 0} \frac{3\cdot D_2^i(a)}{a^3} = \lim_{a\to 0} \frac{3\cdot \int_{-a}^{a} x^i(s)\,ds}{a^3} \tag{6}$$

denn $s(a) - a = o(a)$.

Haben wir nämlich $\vec{r} = \vec{r}(a)$, so ist

$$s = \sqrt{1 + [\dot{x}^2(\theta_2\cdot a)]^2 + \ldots + [\dot{x}^n(\theta_n\cdot a)]^2}\cdot a$$

und

$$\lim_{a\to 0} s a^{-1} = \sqrt{1 + [\dot{x}^2(0)]^2 + \ldots + [\dot{x}^n(0)]^2} = 1,$$

wo $0 < \theta_i < 1$; $i = 2, \ldots, n$.

(¹) Die lineare Unabhängigkeit ist in diesem Fall (für jedes k) $\vec{\beta}_k \neq 0$.

Wir können daher in diesem Falle dreimal die L'Hôspital–Formel auf der rechten Seite von Gleichung (6) anwenden und erhalten

$$(7)\quad \lim_{a\to 0}\frac{3\int_{-a}^{a}x^i(s)\,ds}{a^3}=\lim_{a\to 0}\frac{x^i(a)+x^i(-a)}{a^2}=\lim_{a\to 0}\frac{[x^i(a)]'+[x^i(-a)]'}{2a}$$
$$=\lim_{a\to 0}\frac{[x^i(a)]''+[x^i(-a)]''}{2}=[x^i(0)]''$$

weil $\vec{r}^{(k)}(s)=(-1)^k\cdot[\vec{r}(-s)]^{(k)}$. Wir erhalten also $\vec{\beta}_2=r''(s)$.

Nehmen wir an, dass $V_l^*=V_l$ für $l=1,\ldots,k$ ist, so müssen wir die Gültigkeit der Gleichung $V_{k+1}=V_{k+1}^*$ beweisen. In der klassischen Theorie definiert man V_k^* als eine Hyperebene der Dimension k, die auf den Vektoren $\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\ldots,\vec{r}^{(k)}$ aufgebaut werden kann. Aus dieser Definition ergibt sich die Gleichung $\vec{r}^{(k+1)}=\vec{\omega}+\sum_1^k\beta_l\vec{r}^{\,l}$, wo $\vec{\omega}$ die Projektion $\vec{r}^{(k+1)}$ auf die zu V_k^* orthogonale Hyperebene ist. Wir wählen jetzt ein solches Koordinatensystem $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$, mit dem Ursprung im Punkt P, in welchem

$\vec{x}_1\|\vec{t}$ und die Achse $\vec{x}_i$ parallel zu der $(i-1)$-Normalen verläuft.

In diesem Falle erhalten wir, wenn $1\leqslant i\leqslant k$, $\omega^i(0)=0$ und wenn $n\geqslant i>k$, so ist $\omega^i(0)=[x^i(0)]^{(k+1)}$.

Wir wollen zeigen, dass $\vec{\omega}(0)\|\vec{\beta}_{k+1}$. Beachten wir die Gültigkeit der Gleichung

$$(8)\quad \beta_{k+1}^i=\lim_{a\to 0}\frac{(k+2)\cdot D_{k+1}^i(a)}{a\cdot D_k(a)}=\lim_{a\to 0}\frac{(k+2)\left[\int_0^a x^i\,ds+(-1)^{k+1}\int_{-a}^0 x^i\,ds\right]}{a\left[\int_0^a x^k\,ds+(-1)^k\int_{-a}^0 x^k\,ds\right]}$$

für $n\geqslant i\geqslant k+1$. Die Wahl des Koordinatensystems garantiert uns, dass die Ableitungen im Punkt P des Zählers und des Nenners (8) bis zu der Ordnung $k+1$ verschwinden. Dieses kann man folgendermassen beweisen:

Es ist nämlich $\vec{r}^{(l)}\in V_l^*=V_l$, $l=1,\ldots,k$, und deswegen $[x^i(0)]^{(l)}=0$ für $k<i\leqslant n$ und $l=1,\ldots,k$. Wir haben daher

$$[D_{k+1}^i(a)]^{(l+1)}=[x^i(a)]^{(l)}+(-1)^{k+1}\cdot[x^i(-a)]^{(l)}$$
$$=[x^i(a)]^{(l)}+(-1)^{k+l+1}\cdot[x^i(u)]^{(l)}\qquad\text{wo } u=-a$$

also $[D_{k+1}^i(0)]^{(l+1)}=0$ und wiederum $[D_k(0)]^{(l)}=[x^k(0)]^{(l-1)}+(-1)^{k+l-1}\times$ $\times[x^k(0)]^{(l-1)}$ wenn $1\leqslant l\leqslant k$ ist. Doch $[D_k(0)]^{(k+1)}=2\cdot[x^k(0)]^{(k)}\neq 0$.

Dieses ist die Konsequenz der Bedingung $\vec{\beta}_k \neq 0$, denn $\vec{r}^{(k)} \in V_k^* \equiv V_k$. Würde es $[x^k(0)]^{(k)} = 0$ geben, so müsste $\vec{r}^{(k)}$ in der Hyperebene $V_{k-1}^* = V_{k-1}$ liegen. Aber dies bedeutet, dass $V_k = V_{k-1}$, was aber nicht möglich ist, weil eben $\vec{\beta}_k \neq 0$. Wir bezeichnen jetzt mit $[x^k(a)]^{(s)}$ die s-te Ableitung der Projektion des Vektors $\vec{r}^{(k)}$ auf die Achse $\vec{x}_k$ in einer Umgebung des Punktes P. Es gibt eine Umgebung von P, in welcher $[x^k(a)]^{(s)} \neq 0$ für $s \leqslant k-1$, $Q \neq P$. Beruht nämlich dieses nicht auf Wahrheit, zum Beispiel für $s = k-1$, so müsste $[x^k(Q)]^{(k)} = 0$ sein und insbesondere $[x^k(p)]^{(k)} = 0$, weil die Funktion $x^k(Q)$ stetig ist. Also $[x^k(Q)]^{k-1} \neq 0$ für $Q \neq P$, und deswegen muss auch $[x^k(Q)]^{(k-2)} \neq 0$ für $Q \neq P$ usw.

Wir können also für die rechte Seite der Gleichung (8) $(k+2)$-mal die L'Hospital-Formel anwenden und erhalten dann

$$\beta_{k+1}^i = \lim_{a\to 0} \frac{(k+2)\cdot[D_{k+1}^i(a)]^{(k+2)}}{a[D_k(a)]^{(k+2)}+(k+2)[D_k(a)]^{(k+1)}}. \tag{9}$$

Diese Differenzierung lässt sich immer durchführen, weil $D_{k+1}^i(a) = Q_{k+1}^i(a)+(-1)^k Q_{k+1}(-a)$, und diese Summanden sind $(n+1)$-mal differenzierbar, denn sie sind die Integrale von Funktionen der Klasse n. Es ist

$$[D_{k+1}^i(0)]^{(k+2)} = [x^i(0)]^{(k+1)}+(-1)^{2(k+1)}\cdot[x^i(0)]^{(k+1)} = 2[x^i(0)]^{(k+1)},$$

$i > k$, und

$$|[D_k(0)]^{(k+2)}| < \infty,$$

so haben wir

$$\beta_{k+1}^i = \frac{[x^i(0)]^{(k+1)}}{[x^k(0)]^{(k)}} \quad \text{für } i > k. \tag{10}$$

Daraus folgt, dass $\vec{\beta}_{k+1} \| \vec{\omega}(0)$ und daher $\vec{\beta}_{k+1} \in V_{k+1}^*$. Wir hatten V_{k+1} so konstruiert, dass $\vec{\beta}_{k+1} \in V_{k+1}$. Das System $\{\vec{\beta}_1 \dots \vec{\beta}_{k+1}\}$ ist unabhängig und $\{\vec{\beta}_1 \dots \vec{\beta}_k\} \in V_k \equiv V_k^*$. Wir haben also $V_{k+1} \equiv V_{k+1}^*$.

Nehmen wir jetzt an, dass die Richtungen der Vektoren die Ungleichungen $\mathscr{H}_p^* > 0$ zur Folge haben, für $p = 1, \dots, n-1$. Dann erhalten wir

$$\mu_p' = -\mathscr{H}_{p-1}^*\cdot\vec{\mu}_{p-1}+\mathscr{H}_p^*\cdot\vec{\mu}_{p+1} \tag{11}$$

$$\text{für } p = 1, 2, \dots, n \text{ [1]}; \quad \mathscr{H}_0^* = \mathscr{H}_n^* = 0.$$

Wir können $\vec{r}^{(k)}$ mit Hilfe von $\{\vec{\mu}_p\}$ ausdrücken:

$$\vec{r}' = \vec{\mu}_1; \quad \vec{r}'' = \mathscr{H}_1^*\cdot\vec{\mu}_1; \quad \vec{r}''' = \mathscr{H}_1^*\cdot\vec{\mu}_2-(\mathscr{H}_2^*)^2\cdot\vec{\mu}_1+\mathscr{H}_1^*\cdot\mathscr{H}_2^*\cdot\vec{\mu}_3. \tag{12}$$

Die weiteren Berechnungen werden zu kompliziert; deswegen, und auch um den Beweis genauer durchzuführen, nehmen wir an, dass

$$\vec{r}^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} a_k^i \cdot \vec{\mu}_i, \quad a_1^1 = 1 \quad \text{und} \quad a_k^k = \prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{H}_i^*. \tag{13}$$

Es genügt zu zeigen, dass die Gleichung (13) eine ähnliche Formel für $\vec{r}^{(k+1)}$ impliziert.

Wir differenzieren deswegen die Gleichung (13) und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(k+1)} &= \sum_{i=1}^{k} [(a_k^i)' \cdot \vec{\mu}_i + a_k^i \cdot \vec{\mu}_i'] \\ &= \sum_{i=1}^{k} [(a_k^i)' \cdot \vec{\mu}_i + a_k^i(-\mathscr{H}_{i-1}^* \cdot \vec{\mu}_{i-1} + \mathscr{H}_i^* \cdot \vec{\mu}_{i+1})] \\ &= \sum_{i=1}^{k} [(a_k^i)' \cdot \vec{\mu}_i + a_k^{i+1}(-\mathscr{H}_i^*) \cdot \vec{\mu}_i + \mathscr{H}_{i-1}^* \cdot \vec{\mu}_i \cdot a_k^{i-1} \cdot \vec{\mu}_i] + a_k^k \mathscr{H}_k^* \cdot \vec{\mu}_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} [(a_k^i)' + a_k^{i+1}(-\mathscr{H}_i^*) + a_k^{i-1} \mathscr{H}_{i-1}^*] \cdot \vec{\mu}_i + a_k^k \cdot \mathscr{H}_k^* \cdot \vec{\mu}_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_{k+1}^i \vec{\mu}_i + a_{k+1}^{k+1} \cdot \vec{\mu}_{k+1} \qquad \text{wo } a_{k+1}^{k+1} = \prod_{j=1}^{k} \mathscr{H}_i^* \text{ und } a_k^{k+1} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir können $\vec{r}(s)$ zu einer Taylorschen Reihe entwickeln

$$\vec{r}(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\vec{r}^{(k)}(0)}{k!} s^k + o(s^n). \tag{15}$$

Setzen wir jetzt in Gleichung (15) anstatt $\vec{r}^{(k)}(0)$ die rechte Seite von (13) ein, so gelangen wir zur Gleichung

$$\vec{r}(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_{i=1}^{k} a_k^i \cdot \vec{\mu}_i \right) + o(S^n). \tag{16}$$

Die Projektionen von $\vec{r}(s)$ auf die Ebenen $(\vec{t}; \vec{\mu}_k)$ nehmen folgende Gestalt an:

$$x^k = \frac{a_k^k \cdot s^k}{k!} + o(S^k) \quad \text{und insbesondere } x^1 = s + o(s). \tag{17}$$

Jetzt haben wir

$$\int_0^a x^k(s)\, ds + (-1)^k \cdot \int_{-a}^0 x^k(s)\, ds = \frac{a_k^k}{k!} \left(\int_0^a s^k\, ds + (-1)^k \int_{-a}^0 s^k\, ds \right) + \mathscr{I}_{k+1}(a)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{H}_i^*}{k!}\left(\frac{a^{k+1}}{(k+1)} - (-1)^k \frac{a^{k+1}\cdot(-1)^{k+1}}{k+1}\right) + \mathscr{I}_{k+1}(a)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{H}_i^*\right)\cdot 2\cdot \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + \mathscr{I}_{k+1}(a)$$

d.h.

$$D_k(a) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{H}_i^*\right)\cdot 2\cdot \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + \mathscr{I}_{k+1}(a), \tag{18}$$

wo

$$\mathscr{I}_{k+1}(a) = o(a^{k+1}) = \int_0^a o(s^k)\,ds + (-1)^k\cdot \int_{-a}^0 o(s^k)\,ds.$$

Gleichung (18) gilt natürlich nur für genügend kleine a. Wenn wir jetzt in (18) an Stelle von k, $k-1$ einsetzen, so erhalten wir

$$D_{k-1}(a) = \frac{\prod_{i=1}^{k-2} \mathscr{H}_i^* \cdot a^k}{k!}\cdot 2 + \mathscr{I}_k(a). \tag{19}$$

Daraus folgt

$$\mathscr{H}_k = \lim_{a\to 0} \frac{(k+1)\cdot D_k(a)}{aD_{k-1}(a)} = \lim_{a\to 0} \frac{(k+1)\dfrac{\prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{H}_i^*}{(k+1)!}\cdot a^{k+1}\cdot 2 + \mathscr{I}_{k+1}(a)}{\dfrac{1}{k!}\left(\prod_{i=1}^{k-2} \mathscr{H}_i^*\right)\cdot a^{k+1}\cdot 2 + a\cdot \mathscr{I}_k(a)} \tag{20}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{\left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{H}_i^*\right) + \dfrac{k!}{2}\,\dfrac{\mathscr{I}_{k+1}(a)}{a^{k+1}}}{\left(\prod_{i=1}^{k-2} \mathscr{H}_i^*\right) + \dfrac{k!}{2}\cdot \dfrac{\mathscr{I}_k(a)}{a^k}} = \frac{\prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{H}_i^*}{\prod_{i=1}^{k-2} \mathscr{H}_i^*} = \mathscr{H}_{k-1}^*.$$

Dieses wollten wir eben beweisen.

Literaturnachweis

[1] P. K. Raszewski, *Geometria Riemanna i analiza tensorowa*, Warszawa 1958.
[2] G. Suchanek, *One more definition of the curvature and torsion of smooth curves*, Ann. Polon. Math. 25 (1971), S. 167-174.

Reçu par la Rédaction le 24. 11. 1970