ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
Volume jubilaire dédié à Hugo Steinhaus
X (1969)

R. FORTET (Paris)

DÉFINITION ET LOIS DE PROBABILITÉ DES RÉPARTITIONS PONCTUELLES ALÉATOIRES

1. Les répartitions ponctuelles. Soit $\mathcal{X}$ un espace (non-vide) quelconque d'éléments x qui seront appelés des "points". Une *répartition ponctuelle* (r.p.) r sur $\mathcal{X}$ est un système $r = \{x_j\}$ fini ou dénombrable (éventuellement vide), non-ordonné de points $x_j \in \mathcal{X}$; par exemple, les x_j peuvent désigner les emplacements dans l'espace $\mathcal{X}$ des particules d'une population dénombrable de particules; ou encore, si $\mathcal{X}$ est l'axe des temps (ou une partie de l'axe des temps), les x_j peuvent désigner les époques où se produisent certains événements (par exemple, une naissance, pour une étude démographique).

Pour une r.p., désignons par $n(r; A)$ le nombre des x_j de $\mathcal{X}$ qui appartiennent au sous-ensemble $A \subset \mathcal{X}$; pour un A donné, $n(r; A)$ est un entier non-negatif, $\leqslant +\infty$; pour une r.p. r donnée et comme fonction de $A \subset \mathcal{X}$, $n(r; A)$ est une mésure (fonction d'ensemble non-négative complètement additive), d'ailleurs discrète (ou totalement discontinue): elle décrit la répartition de masse constituée en plaçant une masse 1 en chaque x_j.

REMARQUE 1.1. Dans la définition d'une r.p. $r = \{x_j\}$, il pourrait sembler naturel d'exiger que les x_j soient tous distincts; il est parfaitement possible de procéder ainsi; mais, au moins en beaucoup de cas, il est plus commode de ne pas imposer cette restriction, et c'est ce que nous ferons; naturellement, si x_j et x_k ($j \neq k$) occupent la même position $x \in A$, il faut considerer qu'ils apportent à $n(r; A)$ une contribution totale égale à $1+1 = 2$.

On peut donc dire: une répartition ponctuelle $r = \{x_j\}$ est un système non-ordonné d'un nombre fini ou dénombrable de points x_j distincts ou non, chacun d'eux affecté d'une masse m_j égale à 1; de sorte que:

$$n(r; A) = \sum_{j: x_j \in A} m_j,$$

et que la r.p. r ne se distingue pas en fait de la mesure discrète $n(r; A)$.

Nous appellerons $\Omega(\mathcal{X})$, ou souvent plus brièvement Ω, l'ensemble des r.p. sur $\mathcal{X}$.

2. Répartitions ponctuelles aléatoires. L'exemple des répartitions de particules, celui des dates d'événements, font immédiatement comprendre qu'on est fréquemment amené à considérer des *répartitions ponctuelles aléatoires* (r.p.a.). Une répartition ponctuelle aléatoire R est un élément aléatoire à valeurs dans Ω. Définir une r.p.a. R, c'est donc définir:

1) Une σ-algèbre $\mathscr{R}$ de parties ω de Ω, comprenant Ω lui-même et le sous-ensemble vide de Ω.

2) Une mesure ou loi de probabilité $l(\omega)$ sur $\mathscr{R}$, telle que $l(\Omega) = 1$.

Pour le choix de $\mathscr{R}$, nous devons nous demander quelle classe d'événements concernant R doit être probabilisée; or les questions les plus naturelles à propos de R concernent la mesure $n(R; A)$ associée à R. Ceci conduit aux remarques suivantes:

Soit $\mathscr{B}$ une σ-algèbre de Boole de sous-ensembles de $\mathscr{X}$, satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $\mathscr{B}$ contient $\mathscr{X}$ lui-même, et le sous-ensemble vide de $\mathscr{X}$;

b) si x est un élément arbitraire de $\mathscr{X}$, et si $\{x\}$ désigne le sous-ensemble de $\mathscr{X}$ constitué par x tout seul, $\{x\}$ appartient à $\mathscr{B}$.

L'introduction de cette condition b) s'explique par le fait que si elle est satisfaite, la connaissance de $n(r; A)$ pour tout $A \in \mathscr{B}$ entraîne la connaissance de $n(r; A)$ pour tout $A \subset \mathscr{X}$, et détermine r.

Nous désignerons par $\mathscr{E}$ l'ensemble de tous les entiers $\geqslant 0$ et $< +\infty$; par $\mathscr{E}^k$ la puissance cartésienne $k^{\text{ième}}$ de $\mathscr{E}$; par $\mathscr{E}_\infty$ l'ensemble $\mathscr{E}$ complété par l'élément $+\infty$; par $\mathscr{E}_\infty^k$ la puissance cartésienne $k^{\text{ième}}$ de $\mathscr{E}_\infty$.

Soient:

a) k un entier > 0 et $< +\infty$;

b) $A_1, A_2, \ldots, A_k$, k sous-ensembles de $\mathscr{X}$, appartenant à $\mathscr{B}$;

c) J un sous-ensemble quelconque, éventuellement vide, de $\mathscr{E}_\infty^k$.

Le sous-ensemble ω de Ω constitué par les r.p. r telles que

$$\{n(r; A_1), n(r; A_2), \ldots, n(r; A_k)\} \in J \subset \mathscr{E}_\infty^k \tag{2.1}$$

sera appelé un sous-ensemble *cylindrique de Ω* (sous-entendu: rélativement à $\mathscr{B}$); la famille ${}_c\mathscr{A}(\mathscr{X}; \mathscr{B})$ — ou plus brièvement ${}_c\mathscr{A}$ — des sous-ensembles cylindriques de Ω est visiblement une algèbre de Boole de parties de Ω, contenant Ω lui-même, et le sous-ensemble vide de Ω. Soit ${}_c\mathscr{B}(\mathscr{X}; \mathscr{B})$ — ou plus brièvement ${}_c\mathscr{B}$ — la σ-algèbre de Boole de parties de Ω engendrée par ${}_c\mathscr{A}$.

Il est clair que l'on imposera nécessairement à $\mathscr{R}$ la condition que

$$\mathscr{R} \supset {}_c\mathscr{B}. \tag{2.2}$$

Pour certains problèmes, il pourra être intéressant d'avoir $\mathscr{R}$ effectivement plus grand que ${}_c\mathscr{B}$, en particulier parce qu'une r.p.a. R peut intervenir non seulement par elle-même, mais aussi par un élément aléatoire H qu'elle détermine (par exemple, si R décrit une répartition de particules, H peut être le champ total résultant de la superposition des champs partiels créés par chacune des particules): alors doivent être probabilisés les événements relatifs à H que l'on veut considérer, et ceci peut exiger que $\mathscr{R}$ soit effectivement plus grand que ${}_c\mathscr{B}$.

Mais de toutes façons, nous considérons une r.p.a. comme définie, si est définie sa mesure de probabilité sur ${}_c\mathscr{B}$.

Ceci dit, quels moyens avons nous de définir une mesure de probabilité $l(\omega)$ sur ${}_c\mathscr{B}$, ou plus généralement sur une σ-algèbre $\mathscr{R} \supset {}_c\mathscr{B}$. Cette question ne semble pas avoir jusqu'à présent fait l'objet d'une étude systématique.

Une première idée est la suivante: une r.p. r équivaut à la mesure $n(r; A)$; toute mesure peut s'interprêter comme une fonctionnelle linéaire sur un espace vectoriel $\mathscr{V}$ de fonctions numériques $f(x)$ de $x \in \mathscr{X}$: il est donc possible, et de biens des façons, de considérer Ω comme une partie d'un espace vectoriel $\mathscr{V}^*$, dual d'un espace fonctionenl $\mathscr{V}$; et de ramener l'étude des r.p.a. à celle des éléments aléatoires à valeurs dans un espace vectoriel; des études ont déjà été développées, conformément à cette idée (cf. par exemple Fortet et Mourier [1]).

Mais les r.p. sont des mesures si particulières, leur signification dans les applications est si caractérisée, qu'il semble intéressant d'en faire une étude directe. C'est aux premiers éléments d'une telle étude qu'est consacré le présent article.

3. Notations et remarques générales. Appelons Ω^s (s entier $\geqslant 0$ et fini), la partie de Ω constituée par les r.p. r telles que $n(r; \mathscr{X}) = s$. Il convient de ne pas exclure la valeur 0 pour s: Ω^0 est constitué par la r.p. (unique) r telle que $n(r; \mathscr{X}) = 0$, qu'on peut appeler la r.p. vide, ou nulle: elle est dépourvue de tout point. Nous poserons $\Omega^{\varnothing} = \bigcup_s \Omega^s$; $\Omega^{\varnothing}$ est l'ensemble des r.p. finies, c'est-à-dire des r.p. r telles que $n(r; \mathscr{X}) < +\infty$. Enfin nous appellerons Ω^{∞} l'ensemble des r.p. r infinies, c'est-à-dire telles que $n(r; \mathscr{X}) = +\infty$.

La famille des parties de Ω^s qui sont des cylindriques, constitue une algèbre $\mathscr{Q}^s$ de Ω^s qui engendre une σ-algèbre $\mathscr{R}^s$ de parties de Ω^s (naturellement, $\mathscr{Q}^s$ et $\mathscr{R}^s$ ne sont pas des algèbres ou σ-algèbres de parties de Ω). La famille des parties de Ω^{∞} qui sont des cylindriques constitue une algèbre $\mathscr{Q}^{\infty}$ de parties de Ω^{∞}, qui engendre une σ-algèbre $\mathscr{R}^{\infty}$ de parties de Ω^{∞}.

Nous désignerons: par $\mathscr{Q}^{\varnothing}$ l'algèbre des parties ω de $\Omega^{\varnothing}$, telles que $\omega \cap \Omega^s \in \mathscr{Q}^s$ pour tout $s \geqslant 0$ et fini; par $\mathscr{R}^{\varnothing}$ la σ-algèbre des parties de $\Omega^{\varnothing}$ engendrée par $\mathscr{Q}^{\varnothing}$, c'est-à-dire la famille des parties $\omega \in \Omega^{\varnothing}$ telles que $\omega \cap \Omega^s \in \mathscr{R}^s$ pour tout $s \geqslant 0$ et fini.

L'algèbre des parties ω de Ω telles que $\omega \cap \Omega^{\infty} \in \mathscr{Q}^{\infty}$ et $\omega \cap \Omega^s \in \mathscr{Q}^s$ pour tout $s \geqslant 0$ et fini, n'est autre que ${}_c\mathscr{A}$; la σ-algèbre des parties ω

de Ω telles que $\omega \cap \Omega^\infty \in \mathscr{R}^\infty$ et $\omega \cap \Omega^s \in \mathscr{R}^s$ pour tout $s \geqslant 0$ et fini, n'est autre que ${}_c\mathscr{B}$.

Représentation disjonctive d'une famille finie d'ensembles. Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ un système fini quelconque de k parties A_j d'un espace $\mathscr{X}$, appartenant à une σ-algèbre donnée $\mathscr{B}$ de parties de $\mathscr{X}$; on peut toujours trouver des parties $\{B_l\}$ de $\mathscr{X}$ telles que:

1) les B_l sont en nombre fini et appartiennent à $\mathscr{B}$;

2) les B_l sont disjoints;

3) chaque A_j est l'union de certains B_l.

Nous dirons des $\{B_l\}$ qu'ils constituent une représentation disjonctive des $\{A_j\}$.

Familles d'ensembles S-invariantes. Les lemmes suivants sont assez élémentaires, et peut-être déjà connus; mais nous n'avons pas souvenir de les avoir rencontrés explicitement dans la littérature, et comme ils ont un intérêt propre, nous en donnerons les démonstrations.

Soit $\mathscr{Y}$ un ensemble d'éléments y, et S une application qui, à toute partie $e \in \mathscr{Y}$, fait correspondre la partie $S(e) \subset \mathscr{Y}$, avec les propriétés suivantes:

1) $S(\mathscr{Y}) = \mathscr{Y}$;

2) si $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ (nous désignons généralement par $\emptyset$ une partie vide), $S(e_1) \cap S(e_2) = \emptyset$ et $S(e_1 \cup e_2) = S(e_1) \cup S(e_2)$.

Ces propriétés 1) et 2) entraînent que:

a) $S(\emptyset) = \emptyset$;

b) S (complementaire de e) $=$ complémentaire de $S(e)$;

c) si $e_2 \subset e_1$, $S(e_1 - e_2) = S(e_1) - S(e_2)$, $S(e_2) \subset S(e_1)$, $S(e_1) = S(e_1 - e_2) \cup S(e_2)$;

d) $S(e_1 \cap e_2) = S(e_1) \cap S(e_2)$;

e) $S(e_1 \cup e_2) = S(e_1) \cup S(e_2)$.

Une famille $\mathscr{F}$ de partie de $\mathscr{Y}$ est dite *S-invariante*, si $e \in \mathscr{F}$ implique que $S(e) \in \mathscr{F}$.

Soit $\mathscr{F}$ une familee S-invariante de parties de $\mathscr{Y}$; soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ l'algèbre de Boole et la σ-algèbre de Boole engendrées par $\mathscr{F}$. Il résulte facilement de la Proposition 1.2.2 de Neveu [2], que $\mathscr{A}$ est S-invariante; il ne semble pas que, dans le case général, $\mathscr{B}$ soit nécessairement S-invariante. Mais supposons que S possède en outre la propriété:

3) pour toute suite dénombrable $\{e_k\}$ de parties disjointes de $\mathscr{Y}$, on a

$$S\Big(\bigcup_k e_k\Big) = \bigcup_k S(e_k).$$

Il en résulte que pour toute suite *monotone* de parties $\{e_k\}$ de $\mathscr{Y}$, on a

$$S\,(\lim_{k\to+\infty} e_k) = \lim_{k\to+\infty} S(e_k).$$

Supposons que $\mathscr{B}$ n'est pas S-invariante, autrement dit que la classe $\mathscr{C}$ des $e \in \mathscr{B}$ tels que $S(e) \notin \mathscr{B}$ n'est pas vide. Soit $\mathscr{B}'$ la famille des parties $e \in \mathscr{Y}$, telles que $e \in \mathscr{B}$, $e \notin \mathscr{C}$. $\mathscr{B}'$ n'est pas une σ-algèbre, mais elle est une algèbre; cela résulte, entre autres, des remarques suivantes:

$$e \in \mathscr{B}' \quad \text{équivaut à:} \quad e \in \mathscr{B} \quad \text{et} \quad S(e) \in \mathscr{B};$$

$e \in \mathscr{B}$ et $S(e) \in \mathscr{B}$ impliquent que $\bar{e} \in \mathscr{B}$ (la notation $\bar{e}$ désigne le complementaire de l'ensemble e) et que le complémentaire de $S(e)$, soit $S(\bar{e})$, appartient à $\mathscr{B}$; donc impliquent que $\bar{e} \in \mathscr{B}'$.

$\mathscr{B}'$ étant une algèbre sans être une σ-algèbre, n'est pas une classe monotone; donc il existe une suite monotone de parties $\{e_k\}$ telle que

$$e_k \in \mathscr{B}' \quad \text{pour tout } k; \quad e = \lim_{k \to +\infty} e_k \notin \mathscr{B}';$$

or $e \in \mathscr{B}$; donc $S(e) \notin \mathscr{B}$; mais comme $S(e_k) \in \mathscr{B}$ puisque $e_k \in \mathscr{B}'$, on devrait avoir $S(e) = \lim_{k \to +\infty} S(e_k) \in \mathscr{B}$; d'où une contradiction, et le

LEMME 3.1. *Si S a les propriétés* 1), 2), 3) *ci-dessus, et si $\mathscr{F}$ est une famille S-invariante, l'algèbre et la σ-algèbre engendrées par $\mathscr{F}$ sont S-invariantes.*

Familles d'ensembles Γ-complets: Soit Γ une application qui, à tout $e \subset \mathscr{Y}$, fait correspondre un $\Gamma(e) \subset \mathscr{Y}$.

Hypothèse A. Γ satisfait à l'Hypothèse A si elle a les propriétés suivantes:

$$\text{si } e = \Gamma(e), \text{ on a } \bar{e} = \Gamma(\bar{e}); \tag{3.1}$$

$$\Gamma[\Gamma(e)] = \Gamma(e); \tag{3.2}$$

(3.3) quelle que soit la famille $\mathscr{G}$ finie ou dénombrable, de sous-ensembles $e \subset \mathscr{Y}$, $\Gamma(\bigcup_{\mathscr{G}} e) = \bigcup_{\mathscr{G}} \Gamma(e)$.

D'un ensemble e tel que $e = \Gamma(e)$, nous dirons qu'il est *Γ-complet.*

Les propriétés (3.1), (3.2), (3.3) impliquent que

— le complémentaire d'un ensemble Γ-complet est Γ-complet;

— une union finie ou dénombrable d'ensembles Γ-complets est Γ-complète;

— une interesection finie ou dénombrable d'ensembles Γ-complets, est Γ-complète;

— quel que soit e, $\Gamma(e)$ est Γ-complet.

Soit $\mathscr{F}$ une famille de parties de $\mathscr{Y}$; soient: $\mathscr{A}$ l'algèbre et $\mathscr{B}$ la σ-algèbre engendrées par $\mathscr{F}$; $\mathscr{A}_\Gamma$ l'ensemble des $e \in \mathscr{A}$ qui sont Γ-complets; ($\mathscr{A}_\Gamma$ est une algèbre); $\mathscr{B}_\Gamma$ l'ensemble des $e \in \mathscr{B}$ qui sont Γ-complets ($\mathscr{B}_\Gamma$ est une σ-algèbre); $\mathscr{F}_\Gamma$ l'ensemble des $\Gamma(e)$ où $e \in \mathscr{F}$; $\mathscr{A}'_\Gamma$ l'algèbre engendrée par $\mathscr{F}_\Gamma$; $\mathscr{B}'_\Gamma$ la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{F}_\Gamma$.

Maintenant, appelons Hypothèse B l'hypothèse que
Hypothèse B. $e \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(e) \in \mathscr{A}$.

(3.4) entraîne que $\mathscr{F}_\Gamma \in \mathscr{A}$, donc que $\mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{A}_\Gamma$, donc

$$\mathscr{A}'_\Gamma \subset \mathscr{A}_\Gamma. \tag{3.5}$$

Soit e un ensemble de $\mathscr{A}_\Gamma$; on a donc

$$e = \Gamma(e); \tag{3.6}$$

1) ou bien $e \in \mathscr{F}$; alors (3.6) implique que $e \in \mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{A}'_\Gamma$, donc $e \in \mathscr{A}'_\Gamma$.

2) ou bien $\bar{e} \in \mathscr{F}$; alors d'après (3.6) et le 1) ci-dessus, $\bar{e} \in \mathscr{A}'_\Gamma$, donc $e \in \mathscr{A}_\Gamma$.

3) ou bien $e = \bigcap_k e_k$ est une intersection finie d'ensembles $e_k \in \mathscr{F}$; alors $\bar{e}$ est Γ-complet, et

$$\bar{e} = \bigcup_k \bar{e}_k = \Gamma(\bar{e}) = \bigcup_k \Gamma(\bar{e}_k) = \bigcup_k \overline{\Gamma(e_k)},$$

puisque $e_k \in \mathscr{F}$, $\Gamma(e_k) \in \mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{A}_\Gamma$; donc $e \in \mathscr{A}'_\Gamma$.

4) ou bien $e = \bigcap_k \bar{e}_k$, ou bien $e_k \in \mathscr{F}$; alors $\bar{e}$ est Γ-complet, et

$$\bar{e} = \Gamma(\bar{e}) = \bigcup_k e_k = \bigcup_k \Gamma(e_k);$$

$e_k \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(e_k) \in \mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{A}_\Gamma$, donc $e \in \mathscr{A}_\Gamma$.

5) ou bien e est une intersection finie d'ensembles e_k de $\mathscr{F}$, et d'ensembles $\bar{\omega}_h$ avec $\omega_h \in \mathscr{F}$: $e = \bigcap_k e_k \bigcap_h \bar{\omega}_h$; alors $\bar{e} = \bigcup_k \bar{e}_k \bigcup_h \omega_h$; on a donc

$$\bar{e} = \Gamma(\bar{e}) = \bigcup_k \Gamma(\bar{e}_k) \bigcup_h \Gamma(\omega_h);$$

$\omega_h \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(\omega_h) \in \mathscr{F}_\Gamma$, $\bigcup_h \Gamma(\omega_h) \in \mathscr{A}'_\Gamma$; $\Gamma(\bar{e}_k) = \overline{\Gamma(e_k)}$; $e_k \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(e_k) \in \mathscr{A}'_\Gamma$ et ça implique que $\Gamma(\bar{e}_k) \in \mathscr{A}'_\Gamma$ impliquant que $\bigcup_k \Gamma(\bar{e}_k) \in \mathscr{A}'_\Gamma$; d'où $e \in \mathscr{A}'_\Gamma$.

6) ou bien e est une union finie $\bigcup_l \varrho_l$ d'ensembles ϱ_l des types précédents; c'est-à-dire que les ϱ_l sont de la forme

$$\varrho_l = \bigcap_k e_k \bigcap_h \bar{\omega}_h,$$

avec des e_k et des ω_h en nombre fini et appartenant à $\mathscr{F}$; il vient

$$e = \Gamma(e) = \bigcup \Gamma(\varrho_l);$$

$$\overline{\Gamma(\varrho_l)} = \Gamma(\bar{\varrho}_l) = \Gamma(\bigcup_k \bar{e}_k \bigcup_h \omega_h) = \bigcup_k \Gamma(e_k) \bigcup_h \Gamma(\omega_h);$$

$\omega_h \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(\omega_h) \in \mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{A}'_\Gamma$, donc $\bigcup_h \Gamma(\omega_h) \in \mathscr{A}'_\Gamma$; $e_k \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(e_k) \in \mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{A}'_\Gamma$, donc $\overline{\Gamma(e_k)} = \Gamma(\bar{e}_k) \in \mathscr{A}'_\Gamma$; donc $\Gamma(\bar{\varrho}_l) \in \mathscr{A}'_\Gamma$ implique que $\Gamma(\varrho_l) \in \mathscr{A}'_\Gamma$, donc $e \in \mathscr{A}'_\Gamma$.

On en conclut avec (3.5)

LEMME 3.2. *Sous les Hypothèses* A *et* B, *les algèbres* $\mathscr{A}'_\Gamma$ *et* $\mathscr{A}_\Gamma$ *sont identiques.*

Hypothèse C. Appelons Hypothèse C l'hypothèse que

1) si $e \in \mathscr{F}$, $\bar{e}$ est une union finie ou dénombrable d'ensembles de $\mathscr{F}$;

2) si $e = \bigcap_k e_k$ est une intersection finie ou dénombrable d'ensembles e_k de $\mathscr{F}$, e appartient à $\mathscr{F}$.

Soit $e \in \mathscr{A}$; alors

α) ou bien $e \in \mathscr{F}$; $e \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(e) \in \mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{B}'_\Gamma$, donc $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

β) ou bien $\bar{e} \in \mathscr{F}$; alors d'après 1) de l'Hypothèse C, $e = \bigcup_k e_k$ est une union finie ou dénombrable d'ensembles de $\mathscr{F}$; alors $e_k \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(e_k) \in \mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{B}'_\Gamma$, donc $\Gamma(e) = \bigcup_k \Gamma(e_k) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

γ) ou bien $e = \bigcap_k e_k$, intersection finie d'ensembles e_k de $\mathscr{F}$; alors d'après 2) de l'Hypothèse C, $e \in \mathscr{F}$, et d'après α) $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

δ) ou bien $e = \bigcap_k \bar{e}_k$, intersection finie avec $e_k \in \mathscr{F}$; alors d'après l'Hypothèse C, e est une union dénombrable $\bigcup_k e_k$ d'ensembles e_k de $\mathscr{F}$, et $\Gamma(e) = \bigcup_k \Gamma(e_k) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

ε) ou bien $e = \bigcap_h e_h \bigcap_k \bar{e}_k$, intersection finie où e_h, $e_k \in \mathscr{F}$; d'après l'Hypothèse C, e est une union dénombrable d'ensembles de $\mathscr{F}$, donc $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

φ) ou bien e est une union finie $e = \bigcup_l \omega_l$ d'ensembles ω_l du type précédent; donc les ω_l sont des unions dénombrables d'ensembles de $\mathscr{F}$, donc e aussi, et par suite $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

Donc

LEMME 3.3. *Sous les Hypothèses* A, B *et* C, $e \in \mathscr{A}$ *implique* $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

Comme $e \in \mathscr{A}$ implique $\bar{e} \in \mathscr{A}$, notons que $e \in \mathscr{A}$ implique aussi $\Gamma(\bar{e}) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

Hypothèse D. Appelons Hypothèse D l'hypothèse que

$$e \in \mathscr{B} \quad \text{et} \quad \Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma \quad \text{implique que} \quad \Gamma(\bar{e}) \in \mathscr{B}'_\Gamma.$$

Alors, soit $\mathscr{B}^*$ l'ensemble des $e \in \mathscr{B}$ tels que $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$; d'après le Lemme 3.3 on a $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}^*$.

D'autre part, si $e \in \mathscr{B}^*$, c'est-à-dire si $e \in \mathscr{B}$ et $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$, on a $\bar{e} \in \mathscr{B}$, et $\Gamma(\bar{e}) \in \mathscr{B}'_\Gamma$; donc $\bar{e} \in \mathscr{B}^*$.

Supposons que $\mathscr{B}^* \neq \mathscr{B}$; comme $\mathscr{B}$ est la plus petite σ-algèbre contenant $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}^*$ n'est pas une σ-algèbre; donc

— ou bien il existe une famille dénombrable $\{e_k\}$ d'éléments de $\mathscr{B}^*$ telle que $e = \bigcup\limits_k e_k \notin \mathscr{B}^*$; comme $e = \bigcup\limits_k e_k \in \mathscr{B}$, cela signifie que $\Gamma(e) = \bigcup\limits_k \Gamma(e_k) \notin \mathscr{B}'_\Gamma$; mais $e_k \in \mathscr{B}^*$ implique $\Gamma(e_k) \in \mathscr{B}'_\Gamma$; donc que $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$; d'où une contradiction;

— ou bien il existe une famille dénombrable $\{e_k\}$ d'éléments de $\mathscr{B}^*$, telle que $e = \bigcap\limits_k e_k \notin \mathscr{B}^*$; mais $\bar{e} = \bigcup\limits_k \bar{e}_k$; $e_k \in \mathscr{B}^*$ implique que $\bar{e}_k \in \mathscr{B}^*$, donc d'apres ce qui précède, $\bar{e} \in \mathscr{B}^*$; mais alors $e \in \mathscr{B}^*$, d'où une contradiction.

Donc $\mathscr{B}^* = \mathscr{B}$; autrement dit, pour tout $e \in \mathscr{B}$, on a $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$; or soit $e \in \mathscr{B}_\Gamma$; cela veut dire que $e = \Gamma(e) \in \mathscr{B}$; donc $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$; donc

LEMME 3.4. *Sous les Hypothèses* A, B, C *et* D, *on a* $\mathscr{B}'_\Gamma = \mathscr{B}_\Gamma$; *en particulier,* $\mathscr{B}_\Gamma$ *est la plus petite σ-algèbre contenant* $\mathscr{A}'_\Gamma = \mathscr{A}_\Gamma$; *et pour tout* $e \in \mathscr{B}$, *on a* $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$ *et* $\Gamma(\bar{e}) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

Substituons maintenant à l'Hypothese B l'hypothèse moins stricte

Hypothèse B′. $e \in \mathscr{F}$ implique que $\Gamma(e) \in \mathscr{B}$.

Comme $\Gamma(e)$ est Γ-complet, cela signifie que $\Gamma(e) \in \mathscr{B}_\Gamma$, c'est-à-dire que $\mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{B}_\Gamma$; par conséquent

$$\mathscr{F}_\Gamma \subset \mathscr{A}'_\Gamma \subset \mathscr{B}'_\Gamma \subset \mathscr{B}_\Gamma. \tag{3.7}$$

En reprenant les raisonnements précédents, on voit que

LEMME 3.5. *Sous les Hypothèses* A *et* B′ *on a*

$$\mathscr{A}_\Gamma \subset \mathscr{A}'_\Gamma \subset \mathscr{B}'_\Gamma \subset \mathscr{B}_\Gamma. \tag{3.8}$$

Mais on n'a plus forcément $\mathscr{A}_\Gamma = \mathscr{A}'_\Gamma$.

Les Lemmes 3.3 et 3.4 subsistent sous la forme

LEMME 3.6. *Sous les Hypothèses* A, B′ *et* C, $e \in \mathscr{A}$ *implique* $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$ *et* $\Gamma(\bar{e}) \in \mathscr{B}'_\Gamma$.

LEMME 3.7. *Sous les Hypothèses* A, B′, C *et* D *on a* $\mathscr{B}'_\Gamma = \mathscr{B}_\Gamma$.

Mais il n'est plus forcément exact que $\mathscr{B}_\Gamma$ est la plus petite σ-algèbre contenant $\mathscr{A}_\Gamma$.

Algèbres et σ-algèbres induites par une application. Soient: $\mathscr{Y}$ un ensemble d'éléments y; $\mathscr{B}_\sigma$ une σ-algèbre de parties de $\mathscr{Y}$, comprenant $\mathscr{Y}$ lui-même; $\mathscr{Z}$ un ensemble d'éléments z; $\mathscr{C}_\sigma$ une σ-algèbre de parties de $\mathscr{Z}$, comprenant $\mathscr{Z}$ lui-même; λ une application de $\mathscr{B}_\sigma$ dans $\mathscr{C}_\sigma$, avec les propriétés suivantes:

$$\lambda(\mathscr{Y}) = \mathscr{Z}; \tag{3.9}$$

(3.10) pour tout $\omega \in \mathscr{C}_\sigma$, il existe au moins un $e \in \mathscr{B}_\sigma$ tel que $\omega = \lambda(e)$;

(3.11) pour toute union finie ou dénombrable de $e_k \in \mathscr{B}_\sigma$, on a $\lambda\left(\bigcup_k e_k\right) = \bigcup_k \lambda(e_k)$;

(3.12) $e_1, e_2 \in \mathscr{B}_\sigma$ et $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ impliquent $\lambda(e_1) \cap \lambda(e_2) = \emptyset$;

(3.13) $\lambda(e) = \emptyset$ et $e \in \mathscr{B}_\sigma$ impliquent $e = \emptyset$.

Ces propriétés impliquent que

α) $\lambda(\emptyset) = \emptyset$;

β) $\lambda(\bar{e}) = \overline{\lambda(e)}$ pour tout $e \in \mathscr{B}_\sigma$;

γ) $\lambda(e_1) = \lambda(e_2)$ et $e_1, e_2 \in \mathscr{B}_\sigma$ impliquent que $e_1 = e_2$;

δ) quelle que soit la famille finie ou dénombrable de $e_k \in \mathscr{B}_\sigma$, $\lambda\left(\bigcap_k e_k\right) = \bigcap_k \lambda(e_k)$.

Il en résulte facilement que

LEMME 3.8. *Soit $\mathscr{F}$ une famille de parties de $\mathscr{Y}$, telle que $\mathscr{Y} \in \mathscr{F}$ et $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}_\sigma$; si $\mathscr{F}$ est une algèbre, $\lambda(\mathscr{F})$ est une algèbre; si $\mathscr{F}$ est une σ-algèbre, $\lambda(\mathscr{F})$ est une σ-algèbre.*

En reprenant des procédés précédents, on obtient aussi que

LEMME 3.9. *Soit $\mathscr{F}$ une famille de parties de $\mathscr{Y}$, telle que $\mathscr{Y} \in \mathscr{F}$ et $\mathscr{F} \in \mathscr{B}_\sigma$; soient $\mathscr{F}_a, \mathscr{F}_\sigma$ l'algèbre et la σ-algèbre engendrées par $\mathscr{F}$; soient $\mathscr{G}_a$ et $\mathscr{G}_\sigma$ l'algèbre et la σ-algèbre engendrées par $\lambda(\mathscr{F})$; on a*

$$\mathscr{G}_a = \lambda(\mathscr{F}_a), \quad \mathscr{G}_\sigma = \lambda(\mathscr{F}_\sigma).$$

4. Cas des répartitions finies. Soit s un entier > 0 et fini; soient $\mathscr{X}^s$ la puissance cartésienne $s^{\text{ième}}$ de $\mathscr{X}$, $\mathscr{B}^s$ la σ-algèbre de parties de $\mathscr{X}^s$ engendrée par $\mathscr{B}$ selon la construction classique.

A tout élément

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\} \in \mathscr{X}^s \tag{4.1}$$

faisons correspondre la r.p.

$$r = \lambda_s(x) \in \Omega^s \tag{4.2}$$

constituée par les s points $x_1, x_2, \ldots, x_s$ qui constituent x; λ_s est une application de $\mathscr{X}^s$ sur Ω^s; la seule différence entre x défini par (4.1) et r définie par (4.2) est que dans $r = \lambda_s(x)$, les x_j ne sont pas ordonnés: tous les éléments de $\mathscr{X}^s$ déduits de x par une permutation arbitraire des x_j donnent la même r. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_{s!}$ les diverses permutations distinctes des entiers $1, 2, \ldots, s$; à un élément $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ de $\mathscr{X}^s$, S_l fait correspondre biunivoquement l'élément $y = S_l(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ où les y_j sont déduits des x_j par la permutation S_l des indices.

Pour tout $e \subset \mathscr{X}^s$, posons

$$\Gamma(e) = \bigcup_l S_l(e), \tag{4.3}$$

et disons que e est *Γ-complet* si $e = \Gamma(e)$. Soit Φ^s_Γ la famille des parties Γ-complètes de $\mathscr{X}^s$. Si ω est une partie quelconque de Ω^s, on a

$$\lambda_s^{-1}(\omega) \in \Phi^s_\Gamma. \tag{4.4}$$

Posons quelques définitions:

Un *pavé* P de $\mathscr{X}^s$ est une partie de $\mathscr{X}^s$ de la forme

$$P = \prod_{j=1}^{1} A_j \tag{4.5}$$

où les $A_j \in \mathscr{B}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$.

Soit $\mathscr{F}$ la famille des pavés.

$\mathscr{F}$ engendre une algèbre $\mathscr{A}^s$ et la σ-algèbre $\mathscr{B}^s$; soit $\mathscr{A}^s_\Gamma$ la famille des ensembles de $\mathscr{A}^s$ qui sont Γ-complets; soit $\mathscr{B}^s_\Gamma$ la famille des ensembles de $\mathscr{B}^s$ qui sont Γ-complets.

Appelons *pavé-complet* de $\mathscr{X}^s$ toute partie de $\mathscr{X}^s$ de la forme $\Gamma(P)$ où P est un pavé; les pavés complets forment une famille $\mathscr{F}_\Gamma$, qui engendre une algèbre $\mathscr{A}'^s_\Gamma$ et une σ-algèbre $\mathscr{B}'^s_\Gamma$.

On établit facilement avec le Lemme 3.2 que $\mathscr{A}'^s_\Gamma = \mathscr{A}^s_\Gamma$.

Soit $\mathscr{B}^{**s}$ l'ensemble des $e \in \mathscr{B}^s$, tels que $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$ et $\Gamma(\bar{e}) \in \mathscr{B}'_\Gamma$; on voit d'abord que $e \in \mathscr{B}^{**s}$ équivaut à $\bar{e} \in \mathscr{B}^{**s}$.

D'ailleurs, $\mathscr{B}^{**s} \subset \mathscr{B}^s$; supposons d'abord que $\mathscr{B}^{**s} = \mathscr{B}^s$; alors l'Hypothèse D du paragraphe 3 est satisfaite; le Lemme 3.4 est applicable, et donne $\mathscr{B}'^s_\Gamma = \mathscr{B}^s_\Gamma$.

Supposons maintenant que $\mathscr{B}^{**s} \neq \mathscr{B}^s$; comme le Lemme 3.3 prouve que $\mathscr{A}^s \subset \mathscr{B}^{**s}$, et que $\mathscr{B}^s$ est la plus petite σ-algèbre contenant $\mathscr{A}^s$, $\mathscr{B}^{**s}$ n'est pas une σ-algèbre; $\mathscr{B}^{**s}$ ne peut être une classe monotone (au sens de Neveu [2]); si $\mathscr{B}^{**s}$ était une classe monotone, soit $\mathscr{A}^s_m$ la plus petite classe monotone contenant $\mathscr{A}^s$; on aurait $\mathscr{A}^s_m \subset \mathscr{B}^{**s}$; or il est connu (Proposition 1.4.2 de Neveu [2]) que $\mathscr{A}^s_m = \mathscr{B}^s$; il y aurait contradiction. Donc $\mathscr{B}^{**s}$ n'est pas une classe monotone; donc

a) ou bien il existe une famille dénombrable $\{e_k\}$ de $e_k \in \mathscr{B}^{**s}$, telle que $e_k \subset e_{k+1}$, $e = \lim\limits_{k \to +\infty} e_k = \bigcup\limits_k e_k \neq \mathscr{B}^{**s}$. Pour un tel e, $\Gamma(e) = \bigcup\limits_k \Gamma(e_k)$, $\Gamma(e_k) \in \mathscr{B}'_\Gamma$ puisque $e_k \in \mathscr{B}^{**s}$, donc $\Gamma(e) \in \mathscr{B}'^s_\Gamma$. Considérons $\Gamma(\bar{e})$; on a

$$\Gamma(\bar{e}) = \bigcup_l S_l(\bar{e}) = \bigcup_l \overline{S_l(e)} = \overline{\bigcap_l S_l(e)};$$

or

$$\bigcap_l S_l(e) = \lim_{k \to +\infty} \left[\bigcap_l S_l(e_k)\right] = \lim_{k \to +\infty} \overline{\Gamma(\bar{e}_k)};$$

puisque $e_k \in \mathscr{B}^{**s}$, $\Gamma(\bar{e}_k) \in \mathscr{B}'^s_\Gamma$, donc $\overline{\Gamma(\bar{e}_k)}$ aussi; donc $\bigcap\limits_l S_l(e) \in \mathscr{B}'_\Gamma$, donc aussi $\Gamma(\bar{e}) \in \mathscr{B}'_\Gamma$; ainsi $e \in \mathscr{B}^{**s}$, contradictoirement avec l'hypothèse.

b) ou bien il existe une famille dénombrable $\{e_k\}$ de $e_k \in \mathscr{B}^{**s}$, telle que $e_k \supset e_{k+1}$, $e = \lim\limits_{k \to +\infty} e_k = \bigcap\limits_k e_k \notin \mathscr{B}^{**s}$. Alors $\bar{e} = \bigcup\limits_k \bar{e}_k$, avec $\bar{e}_k \in \mathscr{B}^{**s}$, $\bar{e}_k \subset \bar{e}_{k+1}$; d'après ce qui précède, on doit contradictoirement avoir $e \in \mathscr{B}^{**s}$.

La conclusion est qu'il n'est pas possible que $\mathscr{B}^{**} \neq \mathscr{B}$, autrement dit, le Lemme 3.4 s'applique et montre que $\mathscr{B}'^s_\Gamma = \mathscr{B}^s_\Gamma$.

Notons aussi que, chaque S_l possédant les propriétés supposées pour l'application S du Lemme 3.1, l'application de celui-ci montre que

$$\mathscr{A}^s_\Gamma = \mathscr{A}'^s_\Gamma \subset \mathscr{A}^s; \quad \mathscr{B}'^s_\Gamma = \mathscr{B}^s_\Gamma \subset \mathscr{B}^s. \tag{4.6}$$

Ceci étant soit $\mathscr{R}'^s = \lambda_s(\mathscr{B}^s)$, la σ-algèbre de parties de Ω^s, induite à partir de $\mathscr{B}^s$ par l'application λ_s; c'est-à-dire que $\omega \in \mathscr{R}'^s$ équivaut à $\lambda_s^{-1}(\omega) \in \mathscr{B}^s$. D'après (4.4) et ce qui précède, $\lambda_s^{-1}(\omega) \in \mathscr{B}^s$ équivaut à $\lambda_s^{-1}(\omega) \in \mathscr{B}'^s_\Gamma = \mathscr{B}^s_\Gamma$. λ_s constitute donc une application de $\mathscr{B}'^s_\Gamma = \mathscr{B}^s_\Gamma$ sur $\mathscr{R}'^s$, qui a les propriétés (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13); les Lemmes (3.8) et (3.9) donnent

$$\mathscr{R}'^s = \lambda_s(\mathscr{B}^s_\Gamma = \mathscr{B}'^s_\Gamma). \tag{4.7}$$

Disons d'un pavé P qu'il est "particulier", s'il est de la forme

$$P = B_1^{j_1} \times B_2^{j_2} \times \ldots \times B_m^{j_m}, \tag{4.8}$$

ou les B_h appartiennent à $\mathscr{B}$ et sont disjoints et les j_h sont des entiers $\geqslant 0$, tels que $j_1 + j_2 + \ldots + j_m = s$, $B_h^{j_h}$ désignant la puissance cartésienne $j_h^{\text{ième}}$ de B_h.

Soit P le pavé particulier (4.8); dire que $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\} \in P$ implique que, pour la r.p. $r = \lambda_s(x)$, on a

$$n(r; B_1) = j_1, \quad n(r; B_2) = j_2, \quad \ldots, \quad n(r; B_m) = j_m; \tag{4.9}$$

réciproquement, et compte tenu de ce que les B_h sont disjoints, si la r.p. r satisfait à (4.9), et si $r = \lambda_s(x)$, cela implique que $x \in \Gamma(P)$. De sorte que $\omega = \lambda_s\,[\Gamma(P)]$ coincide avec l'ensemble cylindrique défini par (4.9); c'est-à-dire que

$$\lambda_s[\Gamma(P)] \in \mathscr{Q}^s. \tag{4.10}$$

Supposons maintenant que $P = \prod\limits_{j=1}^{s} A_j$ est un pavé quelconque; soit $\{B_h; h = 1, 2, \ldots, m\}$ une représentation disjonctive des $\{A_j\}$; alors $P = \bigcup\limits_k P_k$ est une union (finie) de pavés P_k particuliers, du type (4.8); donc $\Gamma(P) = \bigcup\limits_k \Gamma(P_k)$; $\lambda_s[\Gamma(P)] = \bigcup\limits_k \lambda_s[\Gamma(P_k)]$; d'après (4.10) $\lambda_s[\Gamma(P)]$ appartient donc à $\mathscr{Q}^s$.

Par conséquent $\lambda_s(\mathscr{F}_\Gamma) \subset \mathscr{Q}^s \subset \mathscr{R}^s$; donc, avec le Lemme 3.9,

$$\lambda_s(\mathscr{A}'^s_\Gamma = \mathscr{A}^s_\Gamma) \subset \mathscr{Q}^s, \quad \lambda_s(\mathscr{B}'_\Gamma = \mathscr{B}_\Gamma) = \mathscr{R}'^s \subset \mathscr{R}^s. \tag{4.11}$$

Soit maintenant ω un élément de $\mathscr{Q}^s$; ω est défini par une condition de la forme

$$\{n(r; A_1), \ldots, n(r; A_k)\} \epsilon J \quad \text{et} \quad n(r; \mathscr{X}) = s; \tag{4.12}$$

soit $\{B_h; h = 1, 2, \ldots, m\}$ une représentation disjonctive des $\{A_j\}$; il est clair que ω est une union (finie) d'ensembles ω_t définis par des conditions du type suivant

$$\Big\{n(r; B_1) = j_1, \ldots, n(r; B_m) = j_m, \quad n\big[r; \big(\bigcap_h B_h\big)\big] = s - \sum_{h=1}^{m} j_h\Big\}, \tag{4.13}$$

où les j_n sont des entiers $\geqslant 0$, tels que $\sum_{h=1}^{m} j_h \leqslant s$. Or si ω_t est défini par (4.13), il est clair, compte tenu de ce que les B_h sont disjoints, que $\lambda_s^{-1}(\omega_t)$ est un pavé complet, donc un élément de $\mathscr{F}_\Gamma$; par suite pour $\omega = \bigcup_t \omega_t$ défini par (4.12), $\lambda_s^{-1}(\omega) = \bigcup_t \lambda_s^{-1}(\omega_t)$ est un élément de $\mathscr{A}_\Gamma'^s$; on en conclut $\mathscr{Q}^s \subset \lambda_s(\mathscr{A}_\Gamma'^s = \mathscr{A}_\Gamma^s) \subset \mathscr{R}'^s$, et par conséquent

$$\mathscr{R}^s \subset \mathscr{R}'^s. \tag{4.14}$$

Nous pouvons résumer nos résultats.

Lemme 4.1. *Les notations ayant les significations ci-dessus, on a*
1) $\mathscr{A}_\Gamma'^s = \mathscr{A}_\Gamma^s$; $\mathscr{B}_\Gamma'^s = \mathscr{B}_\Gamma^s$;
2) $\lambda_s(\mathscr{A}_\Gamma' = \mathscr{A}_\Gamma^s) = \mathscr{Q}^s$;
3) $\lambda_s(\mathscr{B}^s) = \lambda_s(\mathscr{B}_\Gamma'^s = \mathscr{B}_\Gamma^s) = \mathscr{R}^s$.

Application 4.1. L'intérêt du Lemme 4.1 pour la définition de r.p.a., se comprend aisément. Pour prendre un exemple simple, soient $X_1, X_2, \ldots, X_s$, s éléments aléatoires à valeurs dans $\mathscr{X}$, mutuellement indépendants, et tous de même loi $p(dx)$ sur $(\mathscr{X}; \mathscr{B})$. Le système ordonné $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ peut être considéré comme un élément aléatoire à valeurs dans $\mathscr{X}^s$; sa loi de probabilité p^s est bien définie sur $(\mathscr{X}^s, \mathscr{B}^s)$, comme loi-produit

$$p^s = p(dx_1) \times p(dx_2) \times \ldots \times p(dx_s). \tag{4.15}$$

Alors $R = \lambda_s(x)$, système non-ordonné des s points $X_1, X_2, \ldots, X_s$, est une r.p.a. à valeurs dans Ω^s, bien définie, et dont la loi de probabilité sur $(\Omega^s, \mathscr{R}^s)$ est la loi induite à partir de p^s par l'application λ_s.

5. Cas des répartitions infinies. Les r.p. infinies, c'est-à-dire les r.p. r telles que $n(r; \mathscr{X}) = +\infty$, forment la partie Ω^∞ de Ω.

Soit

$$\mathscr{X}^\infty = \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \times \ldots \times \mathscr{X}_s \times \ldots \tag{5.1}$$

l'espace produit cartésien d'une infinité dénombrable (ordonnée) d'espaces $\mathscr{X}_s$ tous identiques à $\mathscr{X}$; un point $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots\}$ de $\mathscr{X}^\infty$ est une suite dénombrable ordonnée d'éléments x_s, telle que, pour chaque s, $x_s \in \mathscr{X}_s$. Soit $\mathscr{B}^\infty$ la σ-algèbre de parties de $\mathscr{X}^\infty$, engendrée par $\mathscr{B}$ selon la construction classique. Un pavé P de $\mathscr{X}^\infty$ est une partie de $\mathscr{X}^\infty$, de la forme

$$(5.2) \qquad P = \prod_{s=1}^{+\infty} A_s,$$

où les $A_s \in \mathscr{B}$, sont tels que $A_s = \mathscr{X}_s = \mathscr{X}$ pour tout $s \geqslant k$, k entier fini quelconque. Soit $\mathscr{F}$ la famille des pavés: on peut définir $\mathscr{B}^\infty$ comme la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{F}$.

Soit p une permutation des indices $1, 2, \ldots, s, \ldots$, c'est-à-dire une application biunivoque de $\mathscr{E}$ sur lui-même; p est *finie*, si $p(s) = s$, sauf au plus pour un nombre fini (d'ailleurs quelconque) de valeurs de s; les permutations finies sont en infinité dénombrable; nous les désignerons par $S_1, S_2, \ldots, S_l, \ldots$; soit $\mathscr{P}$ l'ensemble de toutes les permutations, finies ou non; pour tout $e \subset \mathscr{X}^\infty$ posons

$$(5.3) \qquad \Gamma^*(e) = \bigcup_{p \in \mathscr{P}} p(e),$$

$$(5.4) \qquad \Gamma(e) = \bigcup_{l} S_l(e) \subset \Gamma^*(e).$$

On a toujours

$$(5.5) \qquad e \subset \Gamma(e) \subset \Gamma^*(e).$$

Si $e = P$ est un pavé (5.2), il est clair que

$$(5.6) \qquad \Gamma^*(P) = \Gamma(P);$$

mais il est clair aussi que pour un e quelconque, (5.6) n'a pas lieu.

Pour toute $p \in \mathscr{P}$, $p(P)$ est un pavé $\in \mathscr{F}$; $\mathscr{F}$ est donc une famille p--invariante; donc $\mathscr{B}^\infty$ est p-invariante (cf. Lemme 3.1). Par suite, pour tout $e \in \mathscr{B}^\infty$, $\Gamma(e) \in \mathscr{B}^\infty$; par contre, et puisque $\mathscr{P}$ n'est pas dénombrable, on ne peut affirmer que $\Gamma^*(e) \in \mathscr{B}^\infty$.

Soient: $\mathscr{F}_\Gamma$ la famille des $e \in \mathscr{X}^\infty$, tels qu'il existe un pavé P tel que $\Gamma(P) = e$; $\mathscr{F}_{\Gamma^*}$ la famille des $e \subset \mathscr{X}^s$, tels qu'il existe un pavé P tel que $\Gamma^*(P) = e$; $\mathscr{B}_\Gamma^\infty$ l'ensemble des $e \in \mathscr{B}^\infty$, tels que $e = \Gamma(e)$; $\mathscr{B}_{\Gamma^*}^\infty$ l'ensemble des $e \subset \mathscr{B}^\infty$, tels que $e = \Gamma^*(e)$; $\mathscr{B}_\Gamma'^\infty$ la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{F}_\Gamma$; $\mathscr{B}_{\Gamma^*}'^\infty$ la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{F}_{\Gamma^*}$.

D'après ce qui précède, $\mathscr{F}_\Gamma = \mathscr{F}_{\Gamma^*} \subset \mathscr{B}^\infty$; et d'après (5.5), si $e = \Gamma^*(e) \in \mathscr{B}_{\Gamma^*}^\infty$, on a nécessairement $e = \Gamma(e)$, donc $e \in \mathscr{B}_\Gamma^\infty$; par suite

$$(5.7) \qquad \mathscr{B}_\Gamma'^\infty = \mathscr{B}_{\Gamma^*}'^\infty \subset \mathscr{B}_{\Gamma^*}^\infty \subset \mathscr{B}_\Gamma^\infty \subset \mathscr{B}^\infty.$$

Soit λ_∞ l'application de $\mathscr{X}^\infty$ sur Ω^∞ qui, à $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots\} \epsilon \mathscr{X}^\infty$ fait correspondre dans Ω^∞ la r.p. $r = \{x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots\}$ constituée par les mêmes x_s que x, mais abstraction faite de l'ordre. A partir de $\mathscr{B}^\infty$, λ_∞ induit dans Ω^∞ une σ-algèbre $\lambda_\infty(\mathscr{B}^\infty)$. Pour un $\omega \subset \Omega^\infty$ on a $\omega \epsilon \lambda_\infty(\mathscr{B}^\infty)$ si et seulement si

$$\lambda_\infty^{-1}(\omega) \epsilon \mathscr{B}^\infty_{\Gamma^*}. \tag{5.8}$$

Par conséquent

$$\lambda_\infty(\mathscr{B}^\infty) = \lambda_\infty(\mathscr{B}^\infty_\Gamma) = \lambda_\infty(\mathscr{B}^\infty_{\Gamma^*}). \tag{5.9}$$

Soit P un pavé (5.2). Soit le pavé

$$P = \prod_{s=1}^{\infty} A_s, \quad \text{où} \quad A_s = \mathscr{X}_s \quad \text{pour} \quad s > h,$$

où h est un entier fini. Supposons d'abord que P est un pavé "particulier"; c'est-à-dire que

$$\prod_{s=1}^{k} A_s = B_1^{j_1} \times B_2^{j_2} \times \ldots \times B_k^{j_k}, \tag{5.10}$$

où les entiers $j_1 \geqslant 0$ sont tels que $j_1 + j_2 + \ldots + j_k = h$, et où les B_l sont disjoints. Il est clair que, pour tout $x \epsilon P$, on a $\lambda_\infty(x) \epsilon \omega$ où ω est le cylindrique de Ω^∞ défini par

$$\{n(r; B_1) \geqslant j_1, \ldots, n(r; B_k) \geqslant j_k,\ n(r; \mathscr{X}) = +\infty\}. \tag{5.11}$$

Réciproquement, si $r \epsilon \omega$, tout x tel que $\lambda_\infty(x) = r$ appartient nécessairement à $\Gamma(P) = \Gamma^*(P)$; on en déduit que

$$\omega = \lambda_\infty[\Gamma(P) = \Gamma^*(P)] \epsilon \mathscr{R}^\infty.$$

Si maintenant P est un pavé quelconque, il est (cf. paragraphe 4) une union (finie) de pavés particuliers; on conclut donc encore que $\lambda_\infty[\Gamma(P) = \Gamma^*(P)] \subset \mathscr{R}^\infty$, donc que

$$\lambda_\infty(\mathscr{B}'^\infty_\Gamma = \mathscr{B}'^\infty_{\Gamma^*}) \subset \mathscr{R}^\infty. \tag{5.12}$$

Soit maintenant ω un cylindrique quelconque de Ω^∞, défini par

$$\{n(r; A_1) \geqslant j_1, \ldots, n(r; A_k) \geqslant j_k,\ n(r; \mathscr{X}) = +\infty\}; \tag{5.13}$$

supposons d'abord que les A_l sont disjoints; d'après ce qui précède, en appelant P le pavé

$$P = \underbrace{(A_1 \times A_1 \times \ldots \times A_1)}_{j_1\,\text{fois}} \times \underbrace{(A_2 \times A_2 \times \ldots \times A_2)}_{j_2\,\text{fois}} \times \ldots \times \underbrace{(A_k \times A_k \times \ldots \times A_k)}_{j_k\,\text{fois}} \times$$
$$\times \mathscr{X}_{k+1} \times \mathscr{X}_{k+2} \times \ldots,$$

on voit que $\lambda_\infty^{-1}(\omega) = \Gamma(P) = \Gamma^*(P) \subset \mathscr{B}'^{\infty}_{\Gamma} = \mathscr{B}'^{\infty}_{\Gamma^*}$; par conséquent

$$(5.14) \qquad \mathscr{R}^\infty \subset \lambda_\infty(\mathscr{B}'^{\infty}_{\Gamma} = \mathscr{B}'^{\infty}_{\Gamma^*}).$$

(5.9), (5.12) et (5.14) donnent

Lemme 5.1. *Les notations ayant les significations ci-dessus, on a*

$$(5.15) \qquad \mathscr{R}^\infty = \lambda_\infty(\mathscr{B}'^{\infty}_{\Gamma} = \mathscr{B}'^{\infty}_{\Gamma^*}) \subset \lambda_\infty(\mathscr{B}^{\infty}_{\Gamma^*}) = \lambda_\infty(\mathscr{B}^{\infty}_{\Gamma}) = \lambda_\infty(\mathscr{B}^\infty).$$

6. Répartition moyenne associée à une répartition ponctuelle aléatoire. Soit R une r.p.a., c'est-à-dire un élément aléatoire à valeurs dans Ω, dont la loi ou mesure de probabilité est définie sur une σ-algèbre de Boole $\mathscr{R}$ de parties de Ω, telle que $\mathscr{R} \supset {}_c\mathscr{B}$. Soit $l(\omega)$ cette loi de probabilité restrainte à ${}_c\mathscr{B}$.

Pour tout $A \in {}_c\mathscr{B}$, lorsque r varie dans Ω, $n(r; A)$ est une fonction non-négative mesurable ${}_c\mathscr{B}$; l'intégrale $\int_\Omega n(r; A) l(dr)$, qui n'est autre que l'espérance mathématique $E[n(R; A)]$ de la variable aléatoire $n(R; A)$, est finie, ou égale à $+\infty$, mais a toujours un sens. Posons

$$(6.1) \qquad m(A) = \int_\Omega n(r; A) l(dr) = E[n(R; A)];$$

la fonction $m(A)$ de l'ensemble $A \in \mathscr{B}$ définie par (6.1) est réelle $\geqslant 0$; d'autre part, si $A = \bigcup_k A_k$, où les A_k sont disjoints et $\in \mathscr{B}$, on a pour tout $r \in \Omega$

$$n(r; A) = \sum_k n(r; A_k);$$

il résulte alors facilement du Lemme de Fatou que $m(A)$ est complètement additive sur ${}_c\mathscr{B}$: c'est une mesure sur ${}_c\mathscr{B}$, dont nous dirons qu'elle constitue la répartition moyenne associée à R; mais on notera que $m(A)$ peut valoir $+\infty$.

Soit $f(x)$ une fonction numérique réelle de $x \in \mathscr{X}$, mesurable ${}_c\mathscr{B}$; considérons que toute $r \in \Omega$ est la même chose que la mesure (discrète) $n(r; A)$ sur ${}_c\mathscr{B}$; appelons Ω_f l'ensemble des $r \in \Omega$ telles que l'intégrale

$$(6.2) \qquad I(f; r) = \int_{\mathscr{X}} f(x) n(r; dx)$$

a un sens, c'est-à-dire telles que

$$(6.3) \qquad I(|f|; r) = \int_{\mathscr{X}} |f(x)| n(r; dx) < +\infty.$$

Appelons $A_{h,k}$ l'ensemble des x pour lesquels

$$\frac{k}{2^h} \leqslant |f(x)| < \frac{k+1}{2^h}; \quad h = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

les $A_{h,k}$ appartiennent à ${}_c\mathscr{B}$; pour une valeur fixée de h, ils sont disjoints, et on a $\bigcup\limits_k A_{h,k} = \mathscr{X}$ pour tout h; soit $f_h(x)$ la fonction "simple" définie par

$$f_h(x) = \frac{k}{2^h} \quad \text{si} \quad x \in A_{h,k};$$

$f_h(x)$ tend en croissant vers $|f(x)|$; si l'on pose

$$\omega_{h,n} = \left\{ r \in \Omega \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^h}\, n(r; A_{h,k}) < +\infty \right\},$$

on a $\omega_{h,n} \in {}_c\mathscr{A}$; donc $\omega_h = \lim\limits_{n\to+\infty} \omega_{h,n} \in {}_c\mathscr{B}$; or ω_h n'est autre que

$$\omega_h = \left\{ r \in \Omega \,\middle|\, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^h} n(r; A_{h,k}) = \int_{\mathscr{X}} f_h(x) n(r; dx) < +\infty \right\};$$

il est bien connu que Ω_f n'est autre que $\lim\limits_{h\to+\infty} \omega_h$; donc $\Omega_f \in {}_c\mathscr{B}$.

Le même procédé montre plus généralement que $I(f; r)$, comme fonction de $r \in \Omega$, est mesurable ${}_c\mathscr{B}$.

Reprenons la r.p.a. R ci-dessus; et essayons d'évaluer $Pr(R \in \Omega_f) = l(\Omega_f)$; l'expectance mathématique $E[I(|f|; R)]$ est finie, ou égale à $+\infty$, mais elle a toujours un sens; si $E[I(|f|; R)] < +\infty$, on a $l(\Omega_f) = 1$.

À l'aide du Lemme de Fatou, on vérifie aisément que

$$E[I(|f|; R)] = \int_{\mathscr{X}} |f(x)| m(dx) \leqslant +\infty. \tag{6.4}$$

d'où

Théorème 6.1. *Pour que*

$$\Pr(R \in \Omega_f) = \Pr\left[I(f; r) = \int_{\mathscr{X}} f(x) n(R; dx) \text{a un sens} \right] = 1,$$

il est suffisant (*mais non nécessaire*), *que* $\int_{\mathscr{X}} |f(x)| m(dx) < +\infty$; *en outre*

$$|E[I(f; R)]| \leqslant E[|I(f; R)|] \leqslant E[I(|f|; R)] = \int_{\mathscr{X}} |f(x)| m(dx). \tag{6.5}$$

Si donc on considère l'espace $\mathscr{L}_1[\mathscr{X}; m]$, pour toute $f \in \mathscr{L}_1[\mathscr{X}; m]$, $I(f; R)$ est une variable aléatoire bien définie.

7. Applications. A partir des résultats précédents, on peut procéder à de nombreuses études; leur exposé prendrait trop de place, et il sera publié ailleurs; nous nous bornerons ici à citer les points suivants: r.p.a. union et r.p.a. somme de r.p.a. données, r.p.a. induite par une r.p.a. inductrice, définition et propriétés de la fonctionnelle caractéristique d'une r.p.a., définition générale et étude des r.p.a. de Poisson, etc.

Travaux cités

[1] R. Fortet et E. Mourier, *Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 70 (1953), p. 267.

[2] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris 1964.

Reçu le 22. 8. 1967