ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1973)

Sur un problème relatif aux équations de Pré-Schröder

par Zenon Moszner (Kraków)

M. György I. Targoński a posé à la VII^e conférence des équations fonctionnelles de Waterloo [5] la question si le système infini des équations (dites *équations de Pré-Schröder*)

$$[\varphi(\omega(x))]^n = \varphi(\omega_n(x))\varphi^{n-1}(x) \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

où $\omega_n(x)$ désigne la n-ième itération de la fonction $\omega(x)$ ($\omega_1 = \omega$, $\omega_{n+1} = \omega(\omega_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$) implique qu'il existe une constante telle qu'on a l'équation de Schröder

$$\varphi(\omega(x)) = \lambda\varphi(x). \tag{2}$$

J'ai montré [3] que la réponse à cette question est négative. J'ai aussi montré que l'équation (1) pour $n = 2$ implique le système (1) pour chaque n pour les fonctions φ et ω à valeurs numériques (plus généralement il suffit de supposer que les fonctions φ et ω ont leurs valeurs dans un corps ou dans un groupe [1]). M. M. Kuczma et G. I. Targoński ont aussi donné [2] quelques conditions sous lesquelles l'équation (1) pour $n = 2$ implique (2) pour les fonctions φ et ω réelles ou complexes d'une variable réelle ou complexe.

En rapport avec ce qui précède on peut poser le problème suivant (¹):

Caractériser les fonctions $\omega(x)$ réelles ou compexes d'une variable réelle ou complexe telles que

$$\{[\varphi(\omega(x))]^2 = \varphi(\omega_2(x))\varphi(x)\} \Rightarrow \bigvee_{\lambda} (\varphi(\omega(x)) = \lambda\varphi(x)) \tag{3}$$

pour chaque fonction $\varphi(x)$ réelle ou complexe d'un variable réelle ou complexe.

On peut démontrer

1° *qu'il existe des fonctions* $\omega(x)$ *qui ont cette propriété* (3), *par exemple*

(a) *chaque fonction* $\omega(x)$ *à deux valeurs* a *et* b *pour laquelle* $\omega(a) = b$ *et* $\omega(b) = a$,

---

(¹) Posé par moi à la IX^e conférence des équations fonctionnelles de Procchio [4].

(b) *chaque fonction* ω *stable sur l'ensemble de ses valeurs, c'est-à-dire telle que* $\omega(\omega(x)) = c$ (const),

2° *que seules les fonctions* $\omega(x) = x$ *ou* $\omega(x) = \text{const}$ *ont cette propriété parmi les fonctions telles que* $\omega(\omega(x)) = \omega(x)$,

3° *que seule la fonction* $\omega(x) = x$ *a la propriété* (3) *parmi les fonctions strictement croissantes ou parmi les fonctions pour lesquelles* $\omega(\omega(x)) = x$, *c'est-à-dire parmi les involutions.*

Démonstrations. 1° a. Posons

$$A_1 = \{x;\, \omega(x) = a\},\, A_2 = \{x;\, \omega(x) = b\}.$$

Soit $\omega(a) = b$ et $\omega(b) = a$ et

$$[\varphi(\omega(x))]^2 = \varphi(\omega(\omega(x)))\varphi(x). \tag{4}$$

De là pour x de A_1 nous tirons

$$[\varphi(a)]^2 = \varphi(b)\varphi(x) \tag{5}$$

et, pour x de A_2,

$$[\varphi(b)]^2 = \varphi(a)\varphi(x). \tag{6}$$

Si $\varphi(a) = 0$, alors $\varphi(b) = 0$ et il suffit de prendre $\lambda = 0$ pour avoir (2).

Si $\varphi(a) \neq 0$, alors $\varphi(b) \neq 0$ et d'après (5) et (6) la fonction est stable sur A_1 et sur A_2. Puisque $b \in A_1$ nous avons d'après (5)

$$[\varphi(a)]^2 = [\varphi(b)]^2$$

et d'où

$$\varphi(a) = \pm\varphi(b).$$

Il suffit donc de prendre $\lambda = \pm 1$ pour avoir (2).

1° b. Soit $\omega(\omega(x)) = c$.

Dans ce cas (1) a la forme

$$[\varphi(\omega(x))]^2 = \varphi(c)\varphi(x). \tag{7}$$

Si $\varphi(c) = 0$, alors $\varphi(\omega(x)) = 0$ et il suffit de poser $\lambda = 0$ pour avoir (2).

Supposons donc que $\varphi(c) \neq 0$. Dans le cas où x appartient à l'ensemble V des valeurs de la fonction ω, (7) nours donne $\varphi(x) = \varphi(c)$. De là nous avons $\varphi(\omega(x)) = \varphi(c)$, d'où, d'après (7): $\varphi(x) = \varphi(c)$ pour chaque x. Il en résulte que (2) a lieu avec $\lambda = 1$.

2° Soit $\omega(\omega(x)) = \omega(x)$ et supposons que $\omega(x) \not\equiv x$ et que $\omega(x)$ n'est pas stable. Il existe donc un $\bar{x}$ tel que $\omega(\bar{x}) = \bar{x}$ et un $\bar{\bar{x}}$ tel que $\omega(\bar{x}) \neq \omega(\bar{\bar{x}})$ et $\omega(\bar{\bar{x}}) \neq \bar{\bar{x}}$. Posons:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}) &= \varphi(\bar{\bar{x}}) && \text{quelconque différente de zéro,} \\ \varphi(x) &= \varphi(\bar{x}) && \text{pour } x \in E \stackrel{\text{df}}{=} \{x;\, \omega(x) = \omega(\bar{x})\}, \\ \varphi(\omega(x)) &= 0 && \text{pour } x \notin E \end{aligned}$$

et $\varphi(x)$ quelconque pour tous les x pour lesquele elle n'a pas encore été définie.

Remarquons que $\varphi(x)$ est bien définie puisque:

(a) $\bar{x} = \omega(x)$ pour $x \notin E$ est impossible, car $\bar{x} = \omega(x)$ nous donne $\omega(\bar{x}) = \omega(x)$, d'où $x \in E$,

(b) $\bar{\bar{x}} = \omega(x)$ est aussi impossible, car $\bar{\bar{x}} = \omega(x)$ nous donne $\omega(\bar{\bar{x}}) = \omega(\omega(x)) = \omega(x) = \bar{\bar{x}}$ et $\omega(\bar{\bar{x}}) \neq \bar{\bar{x}}$,

(c) il n'existe aucun x_0 tel que $x_0 \notin E$ et $\omega(x_0) \in E$, car $\omega(x_0) \in E$ nous donne $\omega(\omega(x_0)) = \omega(\bar{x})$, d'où $\omega(x_0) = \omega(\bar{x})$, donc $x_0 \in E$.

Pour la fonction φ a lieu l'égalité (4). En effet, cette condition prend dans notre cas la forme suivante

$$\varphi(\omega(x))[\varphi(\omega(x)) - \varphi(x)] = 0. \tag{8}$$

Si $x \notin E$, alors $\varphi(\omega(x)) = 0$, donc (8) a lieu. Si $x \in E$, nous avons

$$\varphi(\omega(x)) = \varphi(\omega(\bar{x})) = \varphi(\bar{x}) = \varphi(x):$$

donc (8) a aussi lieu.

Au contraire (2) n'a pas lieu pour la fonction φ. En effet, en posant dans (2) $x = \bar{x}$ nous avons $\lambda = 1$. Mais $\bar{\bar{x}} \notin E$, donc $\varphi(\omega(\bar{\bar{x}})) = 0$ et puisque $\varphi(\bar{\bar{x}}) \neq 0$, en posant dans (2) $x = \bar{\bar{x}}$ nous avons $\lambda = 0$.

3° Soit maintenant $\omega(x)$ une fonction strictement croissante et soit $\omega(x) \neq x$ pour un $\bar{x}$. On a $\omega(\bar{x}) > \bar{x}$ ou $\omega(\bar{x}) < \bar{x}$. Supposons que $\omega(\bar{x}) > \bar{x}$ (dans le cas $\omega(\bar{x}) < \bar{x}$ les considérations sont analogues). Comme la fonction ω, donc aussi la fonction ω^{-1}, est croissante on a

$$\omega_n(\bar{x}) \neq \omega_m(\bar{x}) \quad \text{pour } n \neq m \text{ et } n, m \text{ entiers}$$

(ω_n est la n-ème itération de ω).

Soit $\varphi(\bar{x})$ quelconque différente de zéro et posons:

$$\varphi(\omega_{n+1}(\bar{x})) \stackrel{\text{df}}{=} -\varphi(\omega_n(\bar{x})) \quad \text{pour } n \text{ entier}. \tag{9}$$

Soit

$$\varphi(x) = c \quad (\text{const} \neq 0), \tag{10}$$

pour les autres x, donc pour les x qui ne sont pas de la forme $\omega_n(\bar{x})$ pour un n entier. Pour chaque tel x le nombre $\omega_m(x)$, où m est un entier, ne doit pas être non plus de la forme $\omega_k(\bar{x})$ pour un k entier. Nous avons donc pour un tel x:

$$\varphi(\omega(\omega(x))) = c = \varphi(x).$$

Pour les x de la forme $\omega_n(\bar{x})$ nous avons d'après (9):

$$\varphi(\omega(\omega(x))) = \varphi(\omega_{n+2}(\bar{x})) = -\varphi(\omega_{n+1}(\bar{x})) = \varphi(\omega_n(\bar{x})) = \varphi(x).$$

La condition (4) a donc la forme

$$[\varphi(\omega(x))]^2 = [\varphi(x)]^2.$$

Il en résulte que la fonction φ remplit cette condition. La condition (2) ne peut-être remplie, car (9) nous donne $\lambda = -1$ et (10) implique $\lambda = 1$.

Supposons que $\omega(\omega(x)) = x$ et $\omega(x) \neq x$ pour $\bar{x}$. Posons $\varphi(\omega(\bar{x})) = -\varphi(\bar{x})$, où $\varphi(\bar{x})$ est un nombre quelconque différent de zéro et soit $\varphi(x) = c$ (c const $\neq 0$) pour les x différents de $\bar{x}$ et de $\omega(\bar{x})$. Il suffit de raisonner comme plus haut pour achever la démonstration.

On peut aussi se demander de caractériser les fonctions $\varphi(x)$ pour lesquelles (3) a lieu pour chaque $\omega(x)$.

Références

[1] M. Kuczma, P 63 R 2, Aequationes Math. 5 (1970), p. 327-328.

[2] — and G. I. Targoński, *On a Pre-Schröder equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. 18 (1970), p. 721-724.

[3] Z. Moszner, P 63 S 1 et P 63 S 2, Aequationes Math. (1970), p. 395.

[4] — *Problème au sujet des équations de Pré-Schröder*, sous presse dans Aequationes Math.

[5] Gy. Targoński, P 63, Aequationes Math. 4 (1970), p. 251.

Reçu par la Rédaction le 15. 10. 1971