COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXI | 1974 | FASC. 2

FLACHE KONVEXITÄT VON ORLICZRÄUMEN

VON

P. KOSMOL (KIEL)

1. Sei Φ: $R \to R$ eine (stetige) symmetrische konvexe Funktion und $\Phi(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Sei (T, Σ, μ) ein positiver Maßraum und $L^{\Phi}(\mu)$ der durch Φ und μ bestimmte Orliczraum mit der Luxemburg-Norm $\|\cdot\|_{\Phi}$ ausgestattet.

Weiter sei $M^{\Phi}(\mu)$ der von den Treppenfunktionen aus $L^{\Phi}(\mu)$ aufgespannte abgeschlossene Teilraum von $L^{\Phi}(\mu)$.

Die Einheitskugel in $M^{\Phi}(\mu)$ stimmt mit der Menge aller meßbaren Funktionen x: $T \to R$, für die

$$\int_T \Phi(x)\,d\mu \leqslant 1 \tag{1}$$

gilt, überein.

Es gilt

$$\|x\|_{\Phi} = 1 \text{ genau dann, wenn } \int_T \Phi(x)\,d\mu = 1, \qquad x \in M^{\Phi}(\mu). \tag{2}$$

Erfüllt Φ die (δ_2, Δ_2)-Bedingung (s. [5], S. 46), dann ist $M^{\Phi}(\mu) = L^{\Phi}(\mu)$.

Eine konvexe Menge (mit nicht-leerem Inneren) heißt *flach konvex* (s. [3], S. 350), falls jeder Randpunkt eine eindeutige Stützhyperebene besitzt. Ein normierter Raum heißt *flach konvex*, wenn die abgeschlossene Einheitskugel flach konvex ist.

Die Charakterisierung der flachen Konvexität der Räume $M^{\Phi}(\mu)$ wird sich auf den folgenden Satz (s. [4]) stützen:

SATZ 0. *Sei X ein reeller lokalkonvexer Raum und f: $X \to R$ eine stetige konvexe Funktion. Dann sind für*

$$r > \inf\{f(x) \mid x \in X\}$$

folgende Aussagen gleichwertig:

(a) *Die konvexe Menge $S_f(r) = \{x \in X \mid f(x) \leqslant r\}$ ist flach konvex.*

(b) *Für alle Randpunkte x_0 von $S_f(r)$ gilt*

(i) $[f'_+(x_0,\cdot)+f'_-(x_0,\cdot)]\colon X\to R$ *linear und stetig*;

(ii) *es existiert ein* $c>0$ *mit* $f'_-(x_0,x)=cf'_+(x_0,x)$ *für alle* x *mit* $f'_+(x_0,x)\geqslant 0$.

Dabei bezeichnet $f'_+(x_0,x)$ (bzw. $f'_-(x_0,x)$) die rechtsseitige (bzw. linksseitige) Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung x. Wenn, für jedes $x\in X$, $f'_+(x_0,x)=f'_-(x_0,x)$ gilt, dann sagt man, daß f *Gâteaux-* (oder *schwach*) *differenzierbar in* x_0 *ist* (s. [3], S. 352) und man bezeichnet $f'(x_0,x)=f'_+(x_0,x)=f'_-(x_0,x)$.

Nach Satz 0 und Corollary 10b von [2] ist $S_f(r)$ flach konvex, falls f Gâteaux-differenzierbar in $\{x\in X\mid f(x)=r\}$ ist.

2. Lemma 1. *Die Funktion* $f\colon M^\Phi(\mu)\to R$ *mit*

$$f(x)=\int_T \Phi(x)\,d\mu$$

ist stetig und konvex. Ferner ist für $x_0\in M^\Phi(\mu)$

$$\begin{aligned}f'_+(x_0,x)&=\int_{\{x>0\}} x\Phi'_+(x_0)\,d\mu+\int_{\{x<0\}} x\Phi'_-(x_0)\,d\mu,\\ f'_-(x_0,x)&=\int_{\{x>0\}} x\Phi'_-(x_0)\,d\mu+\int_{\{x<0\}} x\Phi'_+(x_0)\,d\mu.\end{aligned}\tag{3}$$

Wenn Φ *differenzierbar ist, dann ist* f *Gâteaux-differenzierbar und*

$$f'(x_0,x)=\int_T x\Phi'(x_0)\,d\mu.\tag{4}$$

Beweis. Die Konvexität von f folgt unmittelbar aus der Konvexität von Φ. Da wegen (1) f auf der Einheitskugel beschränkt ist, ist f stetig (s. [1], S. 341-342). Wegen der Monotonie in t von

$$\frac{\Phi(s_0+ts)-\Phi(s_0)}{t}$$

für alle $s_0, s\in R$, gilt (3).

Sei Φ differenzierbar. Nach (3) existiert $f'(x_0,x)$ und es gilt (4).

Bemerkung. Aus Lemma 1 folgt, daß man die Voraussetzung der Stetigkeit der komplementären Funktion Ψ von Φ in Proposition 1 von [6], S. 674, weglassen kann.

Lemma 2. *Seien* T_0, T_1 *und* $T_2\in\Sigma$ *elementfremde Mengen mit* $0<\mu(T_i)<\infty$ $(i=0,1,2)$. *Wenn ein* $s_0\geqslant 0$ *mit* $\Phi'_+(s_0)\neq\Phi'_-(s_0)$ *und* $\Phi(s_0)\cdot\mu(T_0)<1$ *existiert, dann ist* $M^\Phi(\mu)$ *nicht flach konvex.*

Beweis. Es gibt ein $s_1>0$ mit $\Phi'_+(s_1)=\Phi'_-(s_1)$ und

$$1-\Phi(s_0)\mu(T_0)-\Phi(s)\mu(T_1)>0.$$

Da Φ stetig ist, kann man $s_2 \in R$ so wählen, daß

$$\Phi(s_0)\cdot\mu(T_0)+\Phi(s_1)\cdot\mu(T_1)+\Phi(s_2)\cdot\mu(T_2) = 1$$

gilt.

Für die Funktionen

$$x_0 = s_0\chi_{T_0}+s_1\chi_{T_1}+s_2\chi_{T_2},$$
$$x_1 = \chi_{T_0},$$
$$x_2 = \chi_{T_1}$$

gilt

$$0 < f'_+(x_0, x_1) = \mu(T_0)\cdot\Phi'_+(s_0),$$
$$f'_-(x_0, x_1) = \mu(T_0)\cdot\Phi'_-(s_0),$$
$$0 < f'_+(x_0, x_2) = \mu(T_1)\cdot\Phi'_+(s_1) = \mu(T_1)\cdot\Phi'_-(s_1) = f'_-(x_0, x_2).$$

Folglich ist die Bedingung (ii) von Satz 0 nicht erfüllt und somit $M^\Phi(\mu)$ nicht flach konvex.

Im weiteren nehmen wir an, daß das Maß μ *semiendlich* ist (d. h. jede Menge mit positivem Maß hat eine Teilmenge von endlichem positivem Maß). Nach Lemma 1, Satz 0 und Lemma 2 gilt folgender

SATZ 1. *Sei μ nicht rein-atomar. Genau dann ist $M^\Phi(\mu)$ flach konvex, wenn Φ differenzierbar ist.*

3. Die Ableitung der Norm $\|\cdot\|_\Phi$ wird nun folgendermaßen bestimmt. Sei $x_0 \in M^\Phi(\mu)$ und $\|x_0\|_\Phi = 1$. Nach (4) und (2) ist der Graph der Funktion $x \to f'(x_0, x-x_0)+f(x_0)$ eine Stützhyperebene des Epigraphen von f in $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 1) \in M^\Phi \times R$. Das bedeutet, daß die Hyperebene $\{x \in M^\Phi \mid f'(x_0, x-x_0) = 0\}$ die Einheitskugel von M^Φ in x_0 stützt. Nach [3], S. 353, folgt daraus, daß

$$x \to \frac{\int x\Phi'(x_0)\,d\mu}{\int x_0\Phi'(x_0)\,d\mu}, \qquad \|x_0\|_\Phi = 1,$$

die Ableitung der Norm $\|\cdot\|_\Phi$ (in M^Φ) ist.

4. Ist das Maß μ rein-atomar, dann ist die Differenzierbarkeit von Φ keine notwendige Bedingung für die flache Konvexität von $M^\Phi(\mu)$.

Im weiteren bezeichne

$$S = \{s \in R \mid \Phi \text{ in } s \text{ nicht differenzierbar}\}.$$

Dann gilt

SATZ 2. *Sei μ rein-atomar und es besitze mehr als 2 Atome. Genau dann ist $M^\Phi(\mu)$ flach konvex, wenn für alle $s \in S$ und alle Atome $A \in \Sigma$ gilt*

$$\Phi(s)\cdot\mu(A) \geqslant 1.$$

Beweis. Die Notwendigkeit folgt unmittelbar aus Lemma 2.

Sei $x_0 \in M^{\Phi}(\mu)$ und $\|x_0\|_{\Phi} = 1$. Nach (2), Lemma 1 und der Bedingung $\Phi(s)\cdot\mu(A) \geqslant 1$ genügt es $x_0 = r\chi_A$ für ein Atom $A \in \Sigma$ und $r \in S$ zu betrachten.

Wegen $\Phi(r)\cdot\mu(A) = 1$ ist $\Phi'_+(r) \neq 0$.

Da $0 \in S$ und $\Phi'(0) = 0$ gilt, so folgt aus Lemma 1

(i) $$f'_+(x_0, x) + f'_-(x_0, x) = \mu(A)[\Phi'_+(r) + \Phi'_-(r)]x|_A \in (M^{\Phi})^*,$$

(ii) $$f'_-(x_0, x) = \frac{\Phi'_-(r)}{\Phi'_+(r)} f'_+(x_0, x) \qquad \left(\text{bzw. } \frac{\Phi'_+}{\Phi'_-} f'_+\right)$$

mit $\Phi'_r(r) > 0$ (bzw. $\Phi'_+(r) < 0$).

Aus Satz 0 folgt dann, daß $M^{\Phi}(\mu)$ flach konvex ist.

LITERATURNACHWEIS

[1] G. Choquet, *Lectures on analysis I*, Amsterdam - New York 1969.

[2] R. B. Holmes, *A course on optimization and best approximation*, Lecture Notes in Mathematics 257, Berlin - Heidelberg - New York 1972.

[3] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1966.

[4] P. Kosmol, *Flache Konvexität und schwache Differenzierbarkeit*, Manuscripta Mathematica 8 (1973), S. 267-270.

[5] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz spaces I*, Amsterdam - London 1971.

[6] M. M. Rao, *Smoothness of Orlicz spaces*, Indagationes Mathematicae 27 (1965), S. 671-689.

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1972;
en version modifiée le 5. 8. 1973