ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVIII (1973)

Über die Koeffizienten spezieller schlichter Polynome

von St. Ruscheweyh und K.-J. Wirths (Bonn)

Zusammenfassung. Seien S, S^*, K die Familien der in $|z| < 1$ schlichten, sternförmigen bzw. konvexen holomorphen Funktionen mit der üblichen Normierung. In dieser Arbeit werden die Koeffizientenbereiche der Polynome der Form $P^*(z) = z + a_p z^{2p-1} + \beta_p z^p$, $p = 2, 3, \ldots$, a_p, $\beta_p \in \boldsymbol{R}$ aus S und S^* beschrieben. Außerdem wird für die schlichten Polynome $P^*(z)$ mit a_p, $\beta_p \in \boldsymbol{C}$ die scharfe Abschätzung

$$|a_p| < \frac{2p}{2p-1} \sin \frac{\pi}{2p}$$

bewiesen.

Als Anwendung wird für die Familie $M := \{f \in S \mid f * g \in S \text{ für alle } g \in K\}$, wobei $*$ das Hadamardprodukt bedeutet, bewiesen: (1) Wenn $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in M$, $a_{2p-1} = 0$ für ein $p \geqslant 2$ gilt, so ist $|a_p| < p/\sqrt{2}$; (2) Es ist $P_0(z) = z + \sqrt{8/9}z^2 + z^3/3 \in M$, aber $P_0(z)$ ist nicht fast-konvex.

I. Einleitung. Sei S_p, bzw. S_p^* die Klasse der Polynome

$$z + a_p z^p + \beta_p z^{2p-1}, \quad p \geqslant 2, \tag{1.1}$$

mit reellen Koeffizienten, die in $|z| < 1$ schlicht, bzw. sternförmig sind. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns zunächst mit den Koeffizientenbereichen

$$\mathfrak{B}_p := \{(a_p, \beta_p) | z + a_p z^p + \beta_p z^{2p-1} \in S_p\},$$
$$\mathfrak{B}_p^* := \{(a_p, \beta_p) \mid z + a_p z^p + \beta_p z^{2p-1} \in S_p^*\}.$$

Die Bereiche $\mathfrak{B}_p^*$ werden für alle $p \geqslant 2$ in Satz 2.1 angegeben. Mit einer Methode, die schon von Brannan [1] benutzt wurde, um $\mathfrak{B}_2$ zu bestimmen, werden wir dann Aussagen über die Gestalt der $\mathfrak{B}_p$, $p > 2$, gewinnen. Insbesondere wird der Rand von $\mathfrak{B}_3$ exakt beschrieben, und wir beweisen, daß für alle schlichten Polynome der Form (1.1), wobei auch komplexe Koeffizienten zugelassen sind, die scharfe Abschätzung

$$|a_p| \leqslant \frac{2p}{2p-1} \sin \frac{\pi}{2p} \tag{1.2}$$

richtig ist. Die einzige Schrankenfunktion (bis auf Drehungen) für die Abschätzung (1.2) ist das Polynom

$$z + z^p \frac{2p}{2p-1} \sin\frac{\pi}{2p} + \frac{1}{2p-1} z^{2p-1}.$$

Mit Hilfe der bei der Untersuchung der Bereiche $\mathfrak{B}_p^*$ und $\mathfrak{B}_p$ gewonnenen Ergebnisse beweisen wir sodann noch einige Sätze über die in [7] durch

$$M: = \{f \in S \mid f * g \in S \text{ für alle } g \in K\} \tag{1.3}$$

definierte Funktionenfamilie. In (1.3) bezeichnet S, bzw. K die Klasse der im Einheitskreis holomorphen und schlichten, bzw. konvexen Funktionen $f(z)$, die durch $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normiert sind. Besitzen die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ die Taylorentwicklungen $f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu$ und $g(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu$, so ist ihr Hadamardprodukt $(f*g)(z)$ definiert durch

$$(f*g)(z) : = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu b_\mu z^\mu.$$

Wir beweisen die folgenden Aussagen:

(i) *Sei* $f(z) = z + \sum_{\mu=2}^{\infty} a_\mu z^\mu \in M$ *und* $a_{2p-1} = 0$ *für ein* p, $p \geqslant 2$, *dann gilt*: $|a_p| < p/\sqrt{2}$;

(ii) $S_2 \subset M$;

(iii) *Die Funktion* $z + \frac{2\sqrt{2}}{3} z^2 + \frac{1}{3} z^3$ *gehört zu* M, *aber sie ist nicht fast-konvex.*

Die letzte Aussage ist insofern bemerkenswert, als die bisherigen Untersuchungen ([7], [8]) zwar vermuten lassen, daß $C^* \subset M$ gilt ($C^* : = \{f \in S \mid f \text{ fast-konvex}\}$), alle bisher bekannten Beispiele für Funktionen aus M aber in C^* lagen. Wie bei ähnlichen Untersuchungen in [1] und [5] sind unsere wesentlichen Hilfsmittel das Kriterium von Dieudonné [3] und die sogenannte Cohnsche Regel [2]:

Lemma I (Kriterium von Dieudonné). *Das Polynom* $z + \sum_{\mu=2}^{n} a_\mu z^\mu$ *ist genau dann schlicht in* $|z| < 1$, *wenn die Gleichung*

$$1 + \sum_{\mu=2}^{n} a_\mu \frac{\sin \mu\eta}{\sin \eta} z^{\mu-1} = 0$$

für jedes feste $\eta \in [0, \pi/2]$ *keine Nullstelle in* $|z| < 1$ *hat.*

Lemma II (Regel von Cohn). *Sei* $f(z) = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu z^\mu$ *ein Polynom vom Grade* n. *Ist* $|a_0| > |a_n|$, *so hat das Polynom*

$$\overline{a_0} f(z) - a_n z^n \overline{f(1/\bar{z})}$$

dieselbe Anzahl von Nullstellen in $|z| < 1$ *wie* $f(z)$.

II. Die Bereiche $\mathfrak{B}_p^*$. Bei der Untersuchung der Bereiche $\mathfrak{B}_p^*$ benutzen wir die folgende Charakterisierung sternförmiger Funktionen:

Eine in $|z| \leqslant 1$ holomorphe Funktion ist sternförmig in $|z| < 1$ genau dann, wenn gilt:

1) $f(z)/z \neq 0$ in $|z| \leqslant 1$,

2) $\mathrm{Re}\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)} \geqslant 0$ auf $|z| = 1$.

Diese Aussage beweist man leicht mit Hilfe des Minimumprinzips für harmonische Funktionen und des Koebeschen Verzerrungssatzes. Wir beweisen:

SATZ 2.1. *Für jede natürliche Zahl $p \geqslant 2$ gilt: Das Polynom*

$$z + a_p z^p + \beta_p z^{2p-1}, \qquad a_p, \beta_p \in \boldsymbol{R},$$

ist genau dann sternförmig in $|z| < 1$, wenn die ungleichungen

$$(2.1)\quad |a_p| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1+(2p-1)\beta_p}{p}, & -\dfrac{1}{2p-1} \leqslant \beta_p \leqslant \dfrac{p+1}{(2p-1)(3p-1)}, \\[2ex] 4\left[\dfrac{(1-(2p-1)\beta_p)p\beta_p}{(p+1)^2-(3p-1)^2\beta_p}\right]^{\frac{1}{2}}, & \dfrac{p+1}{(2p-1)(3p-1)} \leqslant \beta_p \leqslant \dfrac{1}{2p-1} \end{cases}$$

erfüllt sind.

Insbesondere gilt für jedes sternförmige Polynom der Form (1.1)

$$|a_p| \leqslant a_p^0,$$

wobei a_p^0 gegeben ist durch

$$a_p^0 = 4\left[\frac{(1-(2p-1)\beta_p^0)p\beta_p^0}{(p+1)^2-(3p-1)^2\beta_p^0}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_p^0 = \left(2p-1+\frac{p-1}{p+1}\sqrt{2(p-1)(2p-1)}\right)^{-1}.$$

Diese Abschätzung ist scharf, und die Schranke wird nur für die sternförmigen Polynome $z \pm a_p^0 z^p + \beta_p^0 z^{2p-1}$ angenommen.

Beweis. O.B.d.A. [1] führen wir die Rechnung für $a_p \geqslant 0$ durch. Beim Beweis benutzen wir die Tatsache, daß für die Polynome $p_n(z) = z + \sum_{\mu=2}^{n} a_\mu z^\mu \in S$ stets $|a_n| \leqslant 1/n$ gilt. Dies ergibt sich leicht aus der Bedingung $p_n'(z) \neq 0$ in $|z| < 1$.

Unter dieser Voraussetzung ist die Bedingung 1) für Polynome der Form (1.1) äquivalent mit

$$(2.2)\qquad a_p - \beta_p - 1 < 0,$$

[1] O. B. d. A. heißt „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit".

wie man mit Hilfe der Cohnschen Regel beweist, während die Bedingung 2) genau dann erfüllt, ist, wenn

$$F(\varphi;\, a_p,\, \beta_p) := 1 + p a_p^2 + (2p-1)\beta_p^2 - 2p\beta_p + 4p\beta_p \cos^2(\varphi) + \\ + a_p\big(p+1+(3p-1)\beta_p\big)\cos(\varphi) \geqslant 0 \tag{2.3}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gilt.

Das Minimum der Funktion $F(\varphi;\, a_p,\, \beta_p)$ bzgl. der Variablen φ ist für

$$a_p \geqslant \frac{8p\beta_p}{p+1+(3p-1)\beta_p} \tag{2.4}$$

durch

$$p(a_p-\beta_p-1)\left(a_p - \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p}\right) \tag{2.5}$$

und sonst durch

$$1+(2p-1)\beta_p^2 - 2p\beta_p + a_p^2\left(p - \frac{\big(p+1+(3p-1)\beta_p\big)^2}{16p\beta_p}\right) \tag{2.6}$$

gegeben.

Wir diskutieren zunächst den Fall $\beta_p \leqslant 0$:

Da (2.4) stets erfüllt ist, ist das Minimum der Funktion $F(\varphi;\, a_p,\, \beta_p)$ durch (2.5) bestimmt. Wegen (2.2) ist (2.3) in diesem Falle genau dann erfüllt, wenn

$$a_p \leqslant \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p} \tag{2.7}$$

gilt.

Sei nun $\beta_p \geqslant 0$ und $a_p \geqslant \dfrac{8p\beta_p}{p+1+(3p-1)\beta_p}$. Wie im Fall $\beta_p \leqslant 0$ schließt man:

$$\frac{8p\beta_p}{p+1+(3p-1)\beta_p} \leqslant a_p \leqslant \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p}. \tag{2.8}$$

Diese Ungleichung ist in dem hier untersuchten Bereich $0 \leqslant \beta_p \leqslant \dfrac{1}{2p-1}$ nur für $0 \leqslant \beta_p \leqslant \dfrac{p+1}{(2p-1)(3p-1)}$ zu erfüllen, da die Nullstellen der Gleichung

$$\frac{8p\beta_p}{p+1+(3p-1)\beta_p} = \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p}$$

bei $\beta_p = 1$ und $\beta_p = \dfrac{p+1}{(2p-1)(3p-1)}$ liegen.

Im Fall $a_p \leqslant \dfrac{8p\beta_p}{p+1+(3p-1)\beta_p}$ wird der minimale Wert durch

2.6) gegeben. Die Bedingungen (2.2) und (2.3) ergeben in diesem Fall

$$a_p \leqslant \min\left\{1+\beta_p,\ \frac{8p\beta_p}{p+1+(3p-1)\beta_p},\ 4\left[\frac{\big(1-(2p-1)\beta_p\big)p\beta_p}{(p+1)^2-(3p-1)^2\beta_p}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Aus einer einfachen Diskussion dieser Bedingung zusammen mit (2.7) und (2.8) folgen die Ungleichungen (2.1).

Eine Kurvendiskussion für den Rand des durch (2.1) gegebenen Bereiches ergibt den Rest der Behauptung.

Im Hinblick auf den vierten Abschnitt notieren wir noch eine Folgerung aus Satz 2.1:

KOROLLAR 2.1. *Sei a_p^0 wie in Satz 2.1 definiert. Dann gilt:*

$$\frac{\sqrt{2}}{p} < a_p^0 < \frac{2\sqrt{2}}{2p-1}, \quad p = 2, 3, \ldots$$

III. Die Bereiche $\mathfrak{B}_p$. Durch Anwendung der in der Einleitung angegebenen Regeln von Cohn und Dieudonné auf Polynome der Form (1.1) folgt mit einer leichten Rechnung:

Ein Polynom $z+a_pz^p+\beta_pz^{2p-1}$, $a_p, \beta_p \in C$, ist genau dann schlicht in $|z|<1$, wenn gilt:

$$\frac{1-|\beta_p|^2\dfrac{\sin^2(2p-1)\eta}{\sin^2\eta}}{\left|\dfrac{\sin p\eta}{\sin\eta}\right|\left|a_p-\bar{a}_p\beta_p\dfrac{\sin(2p-1)\eta}{\sin\eta}\right|} \geqslant 1.$$

Nimmt man $a_p \geqslant 0$ an, was sich ja stets durch eine Drehung erreichen läßt, so ergibt sich der Koeffizientenbereich aus der Bedingung

$$a_p \leqslant \min_{0\leqslant\eta\leqslant\pi/2} \frac{1-|\beta_p|^2\dfrac{\sin^2(2p-1)\eta}{\sin^2\eta}}{\left|1-\beta_p\dfrac{\sin(2p-1)\eta}{\sin\eta}\right|\left|\dfrac{\sin p\eta}{\sin\eta}\right|}. \tag{3.1}$$

Für reelle Koeffizienten β_p bedeutet dies:

$$a_p \leqslant \min_{0\leqslant\eta\leqslant\pi/2} \frac{1+\beta_p\dfrac{\sin(2p-1)\eta}{\sin\eta}}{\left|\dfrac{\sin p\eta}{\sin\eta}\right|}. \tag{3.2}$$

Brannan [1] berechnete mit Hilfe der Formel (3.1) den genauen Koeffizientenbereich für schlichte Polynome der Form $z+a_2z^2+\beta_2z^3$, $a_2, \beta_2 \in C$, durch eine geeignete Parametrisierung der auftretenden trigonometrischen Funktionen. Diese Methode scheint im allgemeinen nicht mehr durchführbar zu sein, vgl. jedoch Korollar 3.1. Wir werden im folgenden eine Diskussion der Funktion

$$G(\eta, \beta_p) := \frac{1+\beta_p \dfrac{\sin(2p-1)\eta}{\sin\eta}}{\left|\dfrac{\sin p\eta}{\sin\eta}\right|}, \qquad \beta_p \in \mathbf{R},\ \eta \in [0, \pi/2] \tag{3.3}$$

dazu benutzen, Aussagen über den Bereich $\mathfrak{B}_p$ zu gewinnen.

Hilfssatz 3.1. *Sei* $0 \leqslant \beta_p \leqslant \dfrac{1}{2p-1}$, $p \geqslant 2$ *und* $G(\eta, \beta_p)$ *die in* (3.3) *definierte Funktion. Dann gilt:*

(i) *Die Funktion* $G(\eta, \beta_p)$ *nimmt ihr Minimum für ein* $\eta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2p-1}\right]$ *an.*

(ii) *Die Funktion* $G\left(\eta, \dfrac{1}{2p-1}\right)$ *nimmt ihr Minimum für* $\eta = \dfrac{\pi}{2p}$ *an, und es gilt:*

$$G\left(\frac{\pi}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right) = \frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p}.$$

Beweis. In den Fällen $p = 2, 3$ kann man die Minima explizit berechnen (siehe dazu [1], bzw. Korollar 3.1) und die Behauptungen des Hilfssatzes direkt verifizieren. Wir beschränken uns daher auf $p \geqslant 4$. Da

$$G\left(\frac{\pi}{2p}, \beta_p\right) = (1+\beta_p)\sin\frac{\pi}{2p} \leqslant \frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p},$$

gilt:

$$\min_{0\leqslant\eta\leqslant\pi/2} G(\eta, \beta_p) \leqslant \frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p}.$$

Wir beweisen zunächst, daß die Funktion $G(\eta, \beta_p)$ ihr Minimum nur im Intervall $[0, \pi/p)$ annehmen kann, indem wir zeigen:

$$G(\eta, \beta_p) > \frac{\pi}{2p-1} > \frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p} \qquad \text{für } \eta \in [\pi/p, \pi/2]. \tag{3.4}$$

Hierzu benutzen wir die folgenden Abschätzungen. Für $\pi/p \leqslant \eta \leqslant \pi/2$ gilt:

$$\frac{\sin(2p-1)\eta}{\sin\eta} \geqslant -\frac{2p-1}{6}, \qquad p \geqslant 4,$$

$$\left|\frac{\sin p\eta}{\sin\eta}\right| \leqslant \left(\sin\frac{\pi}{p}\right)^{-1}, \qquad p = 4, 5,$$

$$\left|\frac{\sin p\eta}{\sin\eta}\right| \leqslant \frac{2p}{3\sqrt{3}}, \qquad p \geqslant 6.$$

Daraus folgt im Intervall $[\pi/p, \pi/2]$:

$$G(\eta, \beta_p) \geqslant \frac{5}{6}\sin\frac{\pi}{p} > \frac{\pi}{2p-1}, \qquad p = 4, 5, \text{ bzw.}$$

$$G(\eta, \beta_p) \geqslant \frac{5\sqrt{3}}{4p} > \frac{\pi}{2p-1}, \qquad p \geqslant 6,$$

womit (3.4) bewiesen ist.

Wir zeigen nun (²)

$$G'(\eta, \beta_p) > 0, \qquad \eta \in \left[\frac{\pi}{2p-1}, \frac{\pi}{p}\right). \tag{3.5}$$

In diesem Intervall gilt: $\infty > \dfrac{\sin p\eta}{\sin\eta} > 0$, so daß sich (3.5) auf

$$\begin{aligned}\big(\cos(\eta) + (2p-1)\beta_p\cos((2p-1)\eta)\big)\cdot\sin(p\eta) - \\ -\big(\sin(\eta) + \beta_p\sin((2p-1)\eta)\big)\cdot p\cos(p\eta) > 0, \qquad \eta \in \left[\frac{\pi}{2p-1}, \frac{\pi}{p}\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

reduziert. Im Intervall $\left[\dfrac{3}{2}\dfrac{\pi}{2p-1}, \dfrac{\pi}{p}\right)$ gilt:

$$\sin(\eta) + \beta_p\sin((2p-1)\eta) > \frac{2}{\pi}\eta - \frac{1}{2p-1} \geqslant \frac{2}{2p-1} > 0,$$

sowie $\cos(p\eta) < 0$, $\sin(p\eta) > 0$, $\cos(\eta) > 0$, $\cos((2p-1)\eta) \geqslant 0$, woraus (3.6) in diesem Intervall folgt. Im restlichen Intervall $\left[\dfrac{\pi}{2p-1}, \dfrac{3}{2}\dfrac{\pi}{2p-1}\right)$ schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}\big(\cos(\eta) + (2p-1)\beta_p\cos((2p-1)\eta)\big)\cdot\sin(p\eta) &> 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{2p-1}\right)^2 - 1 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{2p-1}\right)^2,\end{aligned}$$

$$\sin(\eta) + \beta_p\sin((2p-1)\eta) > \frac{2\sqrt{2}}{2p-1} - \frac{1}{2p-1},$$

$$-p\cos(p\eta) \geqslant -p\cos\frac{\pi p}{2p-1} = p\sin\frac{\pi}{2(2p-1)} > \frac{5p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{10}.$$

(²) Im Verlauf dieses Beweises sind alle Ableitungen als Ableitungen nach der Variablen η zu verstehen.

Für $p \geqslant 4$ gilt somit in dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2p-1}, \frac{\pi}{p}\right)$

$$G'(\eta, \beta_p) > \frac{1}{(2p-1)^2}\left(-\frac{9}{8}\pi^2 + 5p(2\sqrt{2}-1)\sin\frac{\pi}{10}\right) > 0,$$

womit (i) vollständig bewiesen ist.

Wir betrachten nun die Funktion $G'\left(\eta, \frac{1}{2p-1}\right)$ und zeigen, daß sie im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2p-1}\right)$ nur eine Nullstelle hat. Da

$$G'\left(0, \frac{1}{2p-1}\right) = G'\left(\frac{\pi}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right) = 0$$

und

$$G\left(0, \frac{1}{2p-1}\right) = \frac{2}{p} > G\left(\frac{\pi}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right) = \frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p},$$

genügt dies zum Beweis der Behauptung (ii), da das Minimum nach (i) nicht im Intervall $\left[\frac{\pi}{2p-1}, \frac{\pi}{2}\right]$ angenommen werden kann.

Da im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2p-1}\right)$ $\sin(p\eta) > 0$ und $\sin(\eta) > 0$, reicht es, zu zeigen:

$$\begin{aligned} h(\eta) :&= G'\left(\eta, \frac{1}{2p-1}\right)\cdot\sin^2(p\eta) \\ &= \big(\cos(\eta) + \cos((2p-1)\eta)\big)\cdot\sin(p\eta) - \\ &- \left(\sin(\eta) + \frac{\sin((2p-1)\eta)}{2p-1}\right)\cdot p\cos(p\eta) \neq 0, \qquad \eta \in \left(0, \frac{\pi}{2p-1}\right), \ \eta \neq \frac{\pi}{2p}. \end{aligned}$$

Wegen $h(0) = 0$, $h\left(\frac{\pi}{2p}\right) = 0$, $h\left(\frac{\pi}{2p-1}\right) > 0$ genügt es zu diesem Zwecke, nachzuweisen, daß $h'(\eta)$ im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2p-1}\right)$ nur eine Nullstelle hat. Aus

$$h'(\eta) = (p-1)\sin(p\eta)\left((p+1)\sin(\eta) - \frac{3p-1}{2p-1}\sin((2p-1)\eta)\right) = 0$$

folgt in diesem Intervall

$$\frac{(p+1)(2p-1)}{3p-1} = \frac{\sin((2p-1)\eta)}{\sin(\eta)}.$$

Daß diese Gleichung hier genau einmal erfüllt ist, folgt aus

$$\frac{(p+1)(2p-1)}{3p-1} < 2p-1,$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\sin\big((2p-1)\eta\big)}{\sin(\eta)}\right)$$

$$= \frac{(2p-1)\cos\big((2p-1)\eta\big)\sin(\eta) - \cos(\eta)\sin\big((2p-1)\eta\big)}{\sin^2(\eta)} < 0.$$

Die letzte Ungleichung ist für $\eta \in \left[\frac{\pi}{2(2p-1)}, \frac{\pi}{2p-1}\right)$ trivial, da hier $\cos\big((2p-1)\eta\big) \leqslant 0$, für $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2(2p-1)}\right)$ folgt sie sofort aus $\operatorname{tg}(\eta) < \frac{1}{2p-1}\operatorname{tg}\big((2p-1)\eta\big)$. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Satz 3.1. *Die Funktion $v(\beta_p)$ sei definiert durch die Gleichung*

$$\mathfrak{B}_p := \{(a_p, \beta_p) \mid z + a_p z^p + \beta_p z^{2p-1} \in S_p\}$$

$$= \left\{(a_p, \beta_p) \mid 0 \leqslant |a_p| \leqslant v(\beta_p),\quad |\beta_p| \leqslant \frac{1}{2p-1}\right\} \text{ (3)}, \qquad p = 2, 3, \ldots$$

Dann gilt:

$$v(\beta_p) = \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p}, \quad -\frac{1}{2p-1} \leqslant \beta_p \leqslant \frac{p+1}{(2p-1)(3p-1)}; \tag{3.7}$$

$$v(\beta_p) < \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p}, \quad \frac{p+1}{(2p-1)(3p-1)} < \beta_p \leqslant \frac{1}{2p-1}; \tag{3.8}$$

$$v(\beta_p) \quad \textit{wächst streng monoton für} \quad \beta_p \in \left[-\frac{1}{2p-1}, \frac{1}{2p-1}\right]; \tag{3.9}$$

$$v\left(\frac{1}{2p-1}\right) = \frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p}. \tag{3.10}$$

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $a_p \geqslant 0$. (3.7) folgt aus der Tatsache, daß einerseits

$$\min_{0\leqslant\eta\leqslant\pi/2} G(\eta, \beta_p) \leqslant G(0, \beta_p) = \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p} \quad \text{(s. dazu (3.3))},$$

andererseits aber nach Satz 2.1 die Polynome

$$z + \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p} z^p + \beta_p z^{2p-1}$$

(3) Daß diese Funktion $v(\beta_p)$ existiert, ergibt sich aus (3.2).

für $-\dfrac{1}{2p-1} \leqslant \beta_p \leqslant \dfrac{p+1}{(2p-1)(3p-1)}$ sternförmig, also auch schlicht, in $|z| < 1$ sind.

Aus der Entwicklung

$$G(\eta, \beta_p) = \frac{1+(2p-1)\beta_p}{p} + \frac{\eta^2(p-1)}{6p}\left(p+1-\beta_p(2p-1)(3p-1)\right) + o(\eta^2)$$

ersieht man, daß an der Stelle $\eta = 0$ für $\beta_p > \dfrac{p+1}{(2p-1)(3p-1)}$ ein relatives Maximum der Funktion $G(\eta, \beta_p)$ liegt, woraus sofort (3.8) folgt.

(3.9) folgt für $\beta_p \leqslant \dfrac{p+1}{(2p-1)(3p-1)}$ aus (3.7). Nach Hilfssatz 3.1 wird für $\beta_p \geqslant \dfrac{p+1}{(2p-1)(3p-1)}$ das Minimum der Funktion $G(\eta, \beta_p)$ stets in einem Intervall angenommen, in dem $\dfrac{\sin(2p-1)\eta}{\sin\eta} > 0$ gilt. Es ist also in diesem Intervall

$$\frac{\partial G(\eta, \beta_p)}{\partial \beta_p} > 0,$$

was (3.9) zur Folge hat.

(3.10) ist eine direkte Folgerung aus Hilfssatz 3.1 (ii).

Der Bereich $\mathfrak{B}_3$ läßt sich noch explizit beschreiben.

Korollar 3.1. *Das Polynom* $z + a_3 z^3 + \beta_3 z^5$, $a_3, \beta_3 \in \boldsymbol{R}$, *ist genau dann schlicht in* $|z| < 1$, *wenn gilt:*

$$(3.11) \qquad |a_3| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1+5\beta_3}{3}, & -\frac{1}{5} \leqslant \beta_3 \leqslant \frac{1}{10}, \\ 2(\beta_3 - \beta_3^2)^{1/2} - \beta_3, & \frac{1}{10} \leqslant \beta_3 \leqslant \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Beweis. Wir nehmen wieder o.B.d.A. $a_3 \geqslant 0$ an. Zum Beweis benutzen wir die Identität

$$\frac{\sin 5\eta}{\sin\eta} = \left(\frac{\sin 3\eta}{\sin\eta}\right)^2 - \frac{\sin 3\eta}{\sin\eta} - 1$$

und setzen $x = \dfrac{\sin 3\eta}{\sin\eta}$. Aus (3.2) erhält man hiermit

$$a_3 \leqslant \min_{-1 \leqslant x \leqslant 3} \frac{1+(x^2-x-1)\beta_3}{|x|}.$$

Für $-\frac{1}{5} \leqslant \beta_3 \leqslant \frac{1}{10}$ wird das Minimum bei $x = 3$, für $\frac{1}{10} \leqslant \beta_3 \leqslant \frac{1}{5}$ bei $x = \sqrt{1-\beta_3}/\sqrt{\beta_3}$ angenommen, woraus sich unmittelbar die Ungleichungen (3.11) ergeben.

Unsere Methode führt auch im Falle der Polynome $z+a_pz^p+\beta_pz^{2p-1}$ mit komplexen Koeffizienten zu einer scharfen Koeffizientenabschätzung.

Satz 3.2. *Das Polynom* $z+a_pz^p+\beta_pz^{2p-1}$, $a_p, \beta_p \in C$, $p = 2, 3, \ldots,$ *sei schlicht in* $|z| < 1$. *Dann gilt:*

$$|a_p| \leqslant \frac{2p}{2p-1} \sin\frac{\pi}{2p}. \tag{3.12}$$

Diese Ungleichung ist scharf und das Gleichheitszeichen tritt (bis auf Drehungen) nur für das Polynom

$$z+z^p\frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p}+\frac{1}{2p-1}z^{2p-1}$$

auf.

Beweis. Wir können wieder o.B.d.A. nur den Fall $a_p \geqslant 0$ betrachten. Aus (3.9) und (3.10) ersieht man, daß (3.12) richtig ist für die Polynome $z+a_pz^p+\beta_pz^{2p-1}$, $a_p, \beta_p \in \boldsymbol{R}$, $a_p \geqslant 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für das Polynom

$$z+z^p\frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p}+\frac{1}{2p-1}z^{2p-1}$$

angenommen wird. Da das Minimum der Funktion $G(\eta, |\beta_p|)$ nur in einem Intervall angenommen wird, in dem $\dfrac{\sin(2p-1)\eta}{\sin\eta} > 0$ gilt, folgt für $\beta_p \in C$, $|\beta_p| \leqslant \dfrac{1}{2p-1}$ aus (3.1)

$$a_p \leqslant \min_{0\leqslant\eta\leqslant\pi/2} G(\eta, |\beta_p|) \leqslant \frac{2p}{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p},$$

wobei das Gleichheitszeichen offenbar nur für $\beta_p \in \boldsymbol{R}$ angenommen werden kann.

IV. Die Familie M. Beim Beweis der folgenden Sätze ist ein wesentliches Hilfsmittel die in [7] bewiesene Charakterisierung der Familie M:

$$M = \left\{f \in S \mid \frac{1}{z}(f*g)(z) \neq 0 \text{ für alle } g \in S^* \text{ und alle } z,\ |z| < 1\right\}, \tag{4.1}$$

wobei mit S^* die Klasse der im Einheitskreis holomorphen und sternförmigen Funktionen $g(z)$, die durch $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ normiert sind, bezeichnet wird. Diese Tatsache in Verbindung mit den Ergebnissen des Kapitels II erlaubt den Beweis des folgenden Satzes.

Satz 4.1. *Sei die Funktion* $f(z) = z+\sum_{\mu=2}^{\infty} a_\mu z^\mu \in M$ *und*

$$a_{2p-1} = 0 \quad \textit{für ein } p \geqslant 2. \tag{4.2}$$

Dann gilt: $|a_p| < p/\sqrt{2}$.

Beweis. Nach (4.1) gilt insbesondere für $f \in M$: $\frac{1}{z}(f*g)(z) \neq 0$ für alle $g \in S_p^*$ und $|z| < 1$. Wegen (4.2) folgt hieraus $1 + \alpha_p a_p z^{p-1} \neq 0$, wenn wir $g(z) = z + \alpha_p z^p + \beta_p z^{2p-1}$ setzen. Mit Korollar 2.1 ergibt sich $|a_p| \leqslant 1/\alpha_p^0 < p/\sqrt{2}$, was zu beweisen war.

Bemerkung 1. Der Fall $p = 2$ zeigt, daß diese Abschätzung im allgemeinen nicht scharf sein wird, denn es ist bekannt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes gilt: $|a_2| \leqslant 1$.

Bemerkung 2. Der Satz 4.1 ist ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Satzes:

Sei $f(z) = z + \sum_{\mu=2}^{\infty} a_\mu z^\mu \in M$ und (α_p, β_p) ein Punkt aus dem Inneren von $\mathfrak{B}_p^*$. Dann gilt:

$$|\arg(\alpha_p a_p + \beta_p a_{2p-1} + 1)| < \pi.$$

Der Beweis ergibt sich aus [8], Satz 2.1.

Bei der Berechnung des Koeffizientenbereiches

$$\mathfrak{B}_2^M := \{(\alpha, \beta) \mid z + \alpha z^2 + \beta z^3 \in M,\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\} \tag{4.3}$$

benutzen wir das

Lemma III (Brannan [1]). *Das Polynom* $z + \alpha z^2 + \beta z^3$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, *ist genau dann schlicht in* $|z| < 1$, *wenn*

$$|\alpha| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1+3\beta}{2}, & -\frac{1}{3} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{5}, \\ 2(\beta - \beta^2)^{1/2}, & \frac{1}{5} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Wir beweisen:

Satz 4.2. *Jedes in* $|z| < 1$ *schlichte Polynom* $z + \alpha z^2 + \beta z^3$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, *liegt in* M.

Beweis. Wir zeigen, daß die durch (4.3) und (4.4) gekennzeichneten Koeffizientenbereiche gleich sind. Nach Peschl [6] gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^* :&= \{(a_2, a_3) \mid z + \sum_{\mu=2}^{\infty} a_\mu z^\mu \in S^*\} \\ &= \{(a_2, a_3) \mid |a_3 - \tfrac{3}{4} a_2^2| \leqslant 1 - |a_2|^2/4\}. \end{aligned}$$

Hiermit und mit (4.1) folgt

$$\mathfrak{B}_2^M = \left\{(\alpha, \beta) \left| \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \boldsymbol{R},\ 1 + \alpha a_2 z + \beta a_3 z^2 \neq 0 \text{ in } |z| < 1 \\ \text{für alle } a_2, a_3 \text{ mit } |a_3 - \frac{3}{4} a_2^2| \leqslant 1 - |a_2|^2/4 \end{array} \right.\right\}. \tag{4.5}$$

Bei der Untersuchung von (4.5) kann man offensichtlich o.B.d.A. $a_2 \geqslant 0$ voraussetzen. Die Cohnsche Regel liefert die Bedingung

$$(\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}_2^M \Leftrightarrow |\alpha| \leqslant \frac{1-\beta^2|a_3|^2}{a_2|1-\beta a_3|} \quad \text{für alle } (a_2, a_3) \in \mathfrak{B}^*,\ a_2 \geqslant 0.$$

Die Behauptung des Satzes 4.2 reduziert sich somit auf

$$\min \frac{1-\beta^2|a_3|^2}{a_2|1-\beta a_3|} = \begin{cases} \dfrac{1+3\beta}{2}, & -\frac{1}{3} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{5}, \\ 2(\beta-\beta^2)^{1/2}, & \frac{1}{5} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{3}, \end{cases} \tag{4.6}$$

wobei das Minimum über $(a_2, a_3) \in \mathfrak{B}^*$, $a_2 \geqslant 0$, genommen wird. Für $\beta \leqslant 0$ wird dies Minimum offensichtlich für $(a_2, a_3) = (2, 3) \in \mathfrak{B}^*$ angenommen, woraus sich in diesem Fall sofort (4.6) ergibt.

Im folgenden sei $\beta > 0$. Wir setzen $a := a_2/2$ und

$$a_3 = 3a^2 + re^{i\varphi}(1-a^2), \qquad r \in [0, 1],\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

Dann wird

$$\frac{1-\beta^2|a_3|^2}{a_2|1-\beta a_3|} = \frac{A+B\cos\varphi}{\sqrt{C+D\cos\varphi}} =: k(\varphi)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 1-9\beta^2a^4-r^2(1-a^2)^2\beta^2, \\ B &= -6\beta^2a^2r(1-a^2), \\ C &= 4a^2\big((1-3\beta a^2)^2+\beta^2r^2(1-a^2)^2\big), \\ D &= -8a^2r\beta(1-a^2)(1-3\beta a^2). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mögliche Extrema der Funktion $k(\varphi)$ liegen bei $\varphi = 0$, π und bei

$$\cos\varphi = \frac{AD-2BC}{BD}. \tag{4.8}$$

Ein Minimum liegt bei $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$, wenn

$$|AD-2BC| > BD,$$

ein Minimum in (4.8), wenn

$$|AD-2BC| \leqslant BD. \tag{4.9}$$

Tritt der erste Fall ein, so gilt:

$$\begin{aligned} \min \frac{1-\beta^2|a_3|^2}{a_2|1-\beta a_3|} &= \min_{\substack{-1\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant a\leqslant 1}} \frac{1+\beta\big(3a^2+x(1-a^2)\big)}{2a} \\ &= \min_{0\leqslant a\leqslant 1} \frac{1+\beta(4a^2-1)}{2a} = \begin{cases} \dfrac{1+3\beta}{2}, & 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{5}, \\ 2(\beta-\beta^2)^{1/2}, & \frac{1}{5} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Es bleibt der Fall zu untersuchen, daß (4.9) erfüllt ist. Einsetzen von (4.7) in (4.9) ergibt die Bedingung

$$|L_1(\beta, r, a)| \leqslant 1,$$

wobei

$$L_1(\beta, r, a) := \frac{(1-3\beta a^2)^3 - r^2\beta^2(1-a^2)^2(1+3\beta a^2)}{6ra^2\beta^2(1-a^2)(1-3\beta a^2)}$$

ist. Mit (4.7) und (4.8) ist das gesuchte Minimum durch

$$\min \frac{1-\beta^2|a_3|^2}{a_2|1-\beta a_3|} = \min_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant a\leqslant 1}} \sqrt{3\beta}\left[1-\beta^2 r^2 \frac{(1-a^2)^2}{(1-3\beta a^2)^2}\right]^{1/2} = \min_{0\leqslant a\leqslant 1} L_2(\beta, a)$$

gegeben. Dabei wurde

$$L_2(\beta, a) := \sqrt{3\beta}\left[1-\beta^2 \frac{(1-a^2)^2}{(1-3\beta a^2)^2}\right]^{1/2}$$

gesetzt. Zum Beweis von (4.6) weisen wir nach:

(4.10) $\quad L_1(\beta, r, a) \geqslant 1 \quad$ für $\beta \leqslant \min\{\frac{1}{3}, \beta_1(a)\}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant a \leqslant 1$,

(4.11) $\quad L_2(\beta, a) \geqslant 2(\beta-\beta^2)^{1/2} \quad$ für $\beta_1(a) \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant a \leqslant 1$,

mit

$$\beta_1(a) := \frac{1}{24a^4}\left(6a^2+1-(1+12a^2-12a^4)^{1/2}\right).$$

(4.11) ergibt sich leicht aus der Diskussion der Gleichung

$$[L_2(\beta, a)]^2 = 4(\beta-\beta^2),$$

bei festem a, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant a \leqslant 1$.

Für $0 \leqslant a < 1/\sqrt{2}$ gilt: $\beta_1(a) > \frac{1}{3}$ und für $1/\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1$: $\frac{1}{4} \leqslant \beta_1(a) \leqslant \frac{1}{3}$. Im ersten Fall verifiziert man (4.10) durch Einsetzen. Im zweiten Fall ist (4.10) äquivalent zu

$$\left(1-\beta_1-6\beta_1 a^2+12\beta_1^2 a^4+\beta_1(1-3\beta_1)a^2\right)(1+\beta_1-4\beta_1 a^2) \geqslant 0 \ (^4).$$

Da $1-\beta_1-6\beta_1^2+12\beta_1^2 a^4 = 0$, ist diese Bedingung in dem angegebenen Bereich für a und $\beta_1(a)$ stets erfüllt, womit alles gezeigt ist.

---

(4) Dabei wird in beiden Fällen von den Monotonieeigenschaften der Funktion $L_1(\beta, r, a)$ bzgl. β und r Gebrauch gemacht.

Als Folgerung aus diesem Satz beweisen wir den

SATZ 4.3. *M ist keine Teilmenge von C^*.*

Beweis. Nach Satz 4.2 und Lemma III gehört die Funktion

$$w(z) = z + \frac{2\sqrt{2}}{3} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3$$

zur Familie M. Die Kurve $w(e^{i\varphi})$ hat für $\varphi = 3\pi/4$ und $\varphi = 5\pi/4$ horizontale Tangenten bei $w(e^{3\pi i/4}) = w(e^{5\pi i/4}) = -\sqrt{2}/3$, während bei $\varphi = \pi$ eine vertikale Tangente vorliegt (vgl. Suffridge [9]). Aus den bekannten geometrischen Eigenschaften fast-konvexer Gebiete (siehe Lewandowski [4]) folgt: $w(z) \notin C^*$.

Zusatz bei der Korrektur.

1) Die Behauptung $C^* \subset M$ wurde inzwischen bewiesen (St. Ruscheweyh, T. Sheill-Small, *Hadamard products of Schlicht functions and the Pólya–Schoenberg conjecture*, Comment. Math. Helv. 48 (1973), S. 119-135).

2) D. A. Brannan hat in seiner Arbeit *On univalent polynomials* (Glasgow Math. J. 11 (1970), S. 102-107) die von uns in Korollar 3.1 und Satz 2.1 gelösten Probleme ebenfalls behandelt. Die dortigen Ergebnisse sind aber weniger allgemein.

Literatur

[1] D. A. Brannan, *Coefficient regions for univalent polynomials of small degree*, Mathematika 14 (1967), S. 165–169.

[2] A. Cohn, *Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise*, Math. Z. 14 (1922), S. 110–148.

[3] J. Dieudonné, *Sur le rayon d'univalence des polynomes*, C. R. Acad. Sci. Paris 192 (1931), S. 78–81.

[4] Z. Lewandowski, *Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes II*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 (1960), S. 19–46.

[5] C. Michel, *Eine Bemerkung zu schlichten Polynomen*, Bull. Acad. Polon. Sci. 18 (1970), S. 513–519.

[6] E. Peschl, *Zur Theorie der schlichten Funktionen*, J. reine angew. Math. 176 (1936), S. 61–93.

[7] St. Ruscheweyh, *Über die Faltung schlichter Funktionen*, Erscheint in Math. Z.

[8] — und K.-J. Wirths, *Über die Faltung schlichter Funktionen II*, Erscheint in Math. Z.

[9] T. J. Suffridge, *On univalent polynomials*, J. London Math. Soc. 44 (1969), S. 496–504.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT BONN

Reçu par la Rédaction le 7. 9. 1972