ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Contribution à la théorie des pseudo-objets géométriques

par E. Siwek (Katowice) et A. Zajtz (Kraków)

Introduction. La notion de pseudo-objet géométrique ainsi que certaines relations entre les objets et les pseudo-objets géométriques ont été étudiées dans la note [2]. La notion de pseudo-objet géométrique associé à un objet géométrique est étroitement liée à celle de comitant algébrique d'un objet géométrique. Le but de la présente note est d'établir cette connection, ainsi que d'exploser un certain aspect algébrique de ces notions en vue d'appliquer ces résultats au problème de classification des pseudo-objets associés à certains objets géométriques linéaires, ce qui sera le sujet d'une note prochaine.

§ 1. Notions fondamentales et notations. Dans la théorie classique on appelle *objet géométrique* relatif au pseudogroupe $\mathfrak{G}$ des transformations des systèmes locaux des coordonnées au point p_0 d'une variété chaque application ω d'ensemble Σ de ces systèmes sur un ensemble $X \subset R^m$ et telle que pour tout couple $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma$ $\omega(\sigma')$ ne dépende que de $\omega(\sigma)$ et de la transformation $T_{\sigma'\sigma}$ du système σ en σ'. Il en résulte qu'il existe pour tout objet géométrique ω une fonction Φ, appelée *loi de transformation* de cet objet géométrique, telle que

$$\omega(\sigma') = \Phi\{\omega(\sigma), T_{\sigma'\sigma}\}$$

et satisfaisant, par égard à l'univalence de l'application ω, aux conditions suivantes:

$$\Phi\{\Phi(x, T_{\sigma'\sigma}), T_{\sigma''\sigma'}\} = \Phi(x, T_{\sigma''\sigma}), \qquad \Phi(x, T_{\sigma'\sigma}) = x$$

pour tout $x \in X$ et $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma$.

Si l'ensemble X et la fonction Φ satisfont à la condition:

$$\Phi(x, T) \in X$$

pour tout $x \in X$ et $T \in \mathfrak{G}$, on considère l'ensemble Ω de tous les objets géométriques $\omega\colon \Sigma \to X$ avec la loi de transformation Φ, appelé *objet* *géométrique abstrait* avec la loi de transformation Φ et ayant pour fibre X (voir [1]).

Comme nous ne considérerons que des objets géométriques purement différentiels d'une classe r, nous pouvons remplacer le pseudogroupe $\mathfrak{G}$ par un sous-groupe arbitraire G du groupe L_n^r des jets différentiels d'ordre r en un point fixe des transformations dans l'espace à n dimensions. Le sous-groupe G peut être naturellement identique à tout groupe L_n^r.

Il en résulte qu'un objet géométrique abstrait, purement différentiel, relatif à un groupe G peut être considéré, au point de vue algébrique, comme une structure algébrique composée d'un ensemble $X \subset R^m$ appelé, comme plus haut, fibre et d'une opération $(g, x) \to gx$ des éléments g du groupe G sur les éléments x de X, prenant ses valeurs dans X et satisfaisant pour $g_1, g_2 \in G$ et $x \in X$ aux conditions:

(1) $$g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x, \qquad ex = x,$$

où e dénote l'unité du groupe G (¹). Dans la suite nous désignerons les objets géométriques (toujours considérés comme des structures algébriques) et leurs fibres par le même symbole p. ex. X.

Un objet géométrique X est dit *transitif* si le groupe G est transitif dans X.

Nous appellerons *congruence* pour l'objet géométrique X toute relation C réflexive, symétrique et transitive définie dans X et satisfaisant à la condition:

(2) $$(x, x') \in C \Rightarrow (gx, gx') \in C$$

pour tout $g \in G$.

Nous admettons les notations suivantes: pour tout objet géométrique X $\boldsymbol{x}$ dénote une classe d'équivalence des éléments de X par rapport à une congruence C, $\mathbf{X} = X/C$ l'ensemble de toutes les classes $\boldsymbol{x}$, $[x]$ la classe des éléments de X congruents à x par rapport à C. La classe $[gx]$ ne dépend pas, par égard à la condition (2), du choix de x appartenant à $[x]$ et, par conséquent, nous pouvons définir dans $\mathbf{X}$ l'opération $(g, \boldsymbol{x}) \to g\boldsymbol{x}$ par la formule:

(3) $$g[x] \stackrel{\mathrm{df}}{=} [gx].$$

Il est facile de voir que cette opération doit satisfaire aux conditions de la forme (1).

Un *pseudo-objet géométrique* $\mathbf{X}$ associé à l'objet géométrique X par rapport à une congruence C peut être considéré comme une structure algébrique X/C composée de $\mathbf{X}$ comme fibre et de l'opération $(g, \boldsymbol{x}) \to g\boldsymbol{x}$ définie par (3).

(¹) Cet aspect algébrique de la notion d'objet géométrique a été développé dans la note [3].

Un objet géométrique U est dit *comitant algébrique* de l'objet géométrique X, si U est une structure homomorphe à X, c'est-à-dire s'il existe une application φ: $X \to U$ telle que

$$\varphi(gx) = g\varphi(x) \tag{4}$$

pour tout $g \in G$.

Les objets géométriques X et Y sont dits *équivalents* s'ils forment des structures isomorphes, c'est-à-dire s'il existe une bijection θ de X sur Y satisfaisant à la condition de la forme (4). Remarquons que la relation d'équivalence, ainsi définie, peut être appliquée à un objet et à un pseudo-objet géométrique ([2]).

§ 2. Pseudo-objets et comitants. Soit U le comitant d'un objet géométrique X et φ un homomorphisme de X sur U. Nous pouvons définir une congruence C par la formule:

$$(x, x') \in C \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) = \varphi(x') . \tag{5}$$

Comme φ satisfait à la condition (4) la relation C, qui est évidement réflexive, symétrique et transitive, doit satisfaire à la condition (2) et, par conséquent, elle est une congruence pour l'objet X.

Le pseudo-objet géométrique X/C, où C est la congruence définie par la condition (5), sera aussi désigné par le symbole X/U.

La correspondance:

$$(X, U) \to X/U \tag{6}$$

n'est pas, en général, univalente puisqu'elle dépend de l'homomorphisme φ. Toutefois nous pouvons démontrer le lemme suivant:

LEMME 1. *Le pseudo-objet géométrique X/U est équivalent au comitant U.*

Démonstration. Soit φ un homomorphisme de X sur U, C la congruence définie par (5) et $\mathbf{X} = X/C$. L'application θ définie par la formule:

$$\theta([x]) = \varphi(x)$$

est, d'après (5), une bijection de $\mathbf{X}$ sur U. En vertu de (3) et (4) on a aussi:

$$\theta(g[x]) = \theta([gx]) = \varphi(gx) = g\varphi(x) = g\theta([x])$$

pour tout $g \in G$. Cela signifie que la bijection θ établit une équivalence entre $\mathbf{X}$ et U et notre lemme se trouve démontré.

([2]) On peut considérer un objet géométrique comme un cas particulier de pseudo-objet géométrique. Dans ce cas la notion d'équivalence définie plus haut coincide avec celle des pseudo-objets géométriques (voir [2]).

D'autre part nous pouvons établir le lemme suivant:

LEMME 2. *Tout pseudo-objet géométrique* $\mathbf{X}$ *associé à un objet géométrique* X *par rapport à une congruence* C *détermine un comitant* U *de l'objet* X *équivalent au pseudo-objet* $\mathbf{X}$.

Démonstration. Comme $X \subset R^m$ il existe une injection θ de $\mathbf{X} = X/C$ dans R^m. Pour tout $g \in G$ et $u \in U \overset{\text{df}}{=} \theta(\mathbf{X})$ nous pouvons définir l'opération $(g, u) \to gu \in U$ par la formule:

$$gu \overset{\text{df}}{=} \theta(g\boldsymbol{x}), \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{x} = \theta^{-1}(u) . \tag{7}$$

En supposant dans (7) $u = \theta(\boldsymbol{x})$ on constate que l'application θ, satis faisant à la condition:

$$g\theta(\boldsymbol{x}) = \theta(g\boldsymbol{x}) , \tag{8}$$

induit dans U une structure d'objet géométrique et établit une équivalence entre $\mathbf{X}$ et U.

Donc il reste à montrer que l'objet U est un comitant de X. En effet, si nous posons $\varkappa$: $x \to [x]$ et $\varphi \overset{\text{df}}{=} \theta\varkappa$ nous pouvons, en vertu de (3) et (8), écrire:

$$\varphi(gx) = \theta([gx]) = \theta(g[x]) = g\theta([x]) = g\varphi(x)$$

d'où il vient que l'application φ est un homomorphisme de X sur U. Il en résulte que l'objet U est un comitant de X et notre lemme se trouve ainsi démontré.

Les lemmes 1 et 2 montrent que la correspondance (6) détermine une correspondance biunivoque entre les classes des pseudo-objets géométriques équivalents associés à un objet géométrique X et celles des comitants équivalents de l'objet X. Donc nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour tout objet géométrique abstrait* X *purement différentiel il existe une correspondance biunivoque entre les classes des pseudo-objets géométriques équivalents associés à l'objet* X *et celles des comitants équivalents de l'objet* X. *Le pseudo-objet et le comitant appartenant aux classes correspondantes sont équivalents.*

Ce théorème joue un rôle important dans le problème de classification des comitants des objets géométriques.

De ce théorème résulte, en particulier, le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Le problème de classification des comitantes d'un objet géométrique est équivalent à celui de la classification des pseudo-objets géométriques associés à cet objet.*

§ 3. Pseudo-objets et sous-groupes du groupe G**.** Dans ce paragraphe nous supposons l'objet géométrique considéré X *transitif*.

Il est facile de vérifier que pour tout sous-ensemble A de la fibre X l'ensemble:

(9) $$H_A \overset{\text{df}}{=} \{g \in G\colon\ gA \subset A\}$$

forme un sous-groupe du groupe G appelé *sous-groupe de stabilité* de l'ensemble A. En désignant par H_x et H_y les sous-groupes de stabilité des points x et y appartenant à X nous pouvons facilement vérifier que les sous-groupes H_x et H_y du groupe G sont *conjugués*, c'est-à-dire qu'il existe un élément $g \in G$ tel que l'on ait:

$$H_y = g^{-1}H_xg \text{ (}^3\text{)}.$$

Soit C une congruence pour l'objet géométrique X. Remarquons d'abord que doit être remplie la relation suivante:

(10) $$H_x \subset H_{[x]}.$$

En effet, si $(x, x') \in C$ on a, en vertu de (2), la relation:

$$(hx, hx') \in C$$

pour tout $h \in H_x$. Comme $hx = x$ pour $h \in H_x$ (en vertu de (9)), il en résulte:

$$h \in H_x \Rightarrow h \in H_{[x]}$$

et la relation (10) se trouve ainsi démontrée.

Nous pouvons aussi démontrer le lemme suivant:

LEMME 3. *Les sous-groupes de stabilité $H_{[x]}$ et $H_{[y]}$ correspondant à des élements arbitraires $x, y \in X$ sont conjugués.*

Démonstration. D'après la définition (9) et la propriété des classes d'équivalence, d'après laquelle elles ne doivent être qu'identiques ou disjointes et non vides, nous obtenons:

(11) $$h \in H_{[x]} \Longleftrightarrow h[x] = [x].$$

Comme l'objet géométrique X est transitif, il existe un élément $g \in G$ tel que

$$x = gy$$

et, par conséquent, on doit avoir aussi:

(12) $$[x] = g[y].$$

En utilisant (11) et (12) nous pouvons écrire les relations suivantes:

$$h \in H_{[x]} \Longleftrightarrow h[x] = [x] \Longleftrightarrow hg[y] = g[y] \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow g^{-1}hg[y] = [y] \Longleftrightarrow g^{-1}hg \in H_{[y]}.$$

(³) Pour les propriétés des sous-groupes de stabilité voir [4].

Il en résulte que les sous-groupes $H_{[x]}$ et $H_{[y]}$ sont conjugués et notre lemme se trouve démontré.

D'après le lemme 3 et la relation (10), à tout pseudo-objet géométrique X/C associé à l'objet géométrique X par rapport à une congruence C correspond un sous-groupe H_C du groupe G qui est le sous-groupe de stabilité d'une classe $[x] \in X/C$ et contient le sous-groupe H_0 de stabilité d'un élément $x_0 \in X$. La correspondance $X/C \to H_C$ n'est pas en général univalente, mais tous les sous-groupes H_C correspondant au même pseudo-objet X/C doivent être conjugués l'un à l'autre.

D'autre part nous pouvons démontrer le lemme suivant:

LEMME 4. *Tout sous-groupe H du groupe G, contenant le sous-groupe H_0 de stabilité d'un élément x_0 appartenant à la fibre de l'objet géométrique X, détermine une congruence C_H pour cet objet.*

Démonstration. Nous définissons la congruence C_H par la condition:

$$(x, x') \in C \overset{\text{df}}{\iff} \exists_{g \in G}(x, x' \in gHx_0) . \tag{13}$$

où

$$Hx_0 \overset{\text{df}}{=} \{x \in X\colon\ x = hx_0,\ h \in H\} . \tag{14}$$

La réflexivité de la relation C_H suit immédiatement de (13) et (14) et de la transitivité de l'objet X. La symétrie ainsi que la propriété (2) sont évidentes (la dernière par égard à la condition (1)). Il reste donc à vérifier la transitivité de la relation C_H.

Si $(x_1, x_2) \in C_H$ et $(x_2, x_3) \in C_H$ il existe, d'après (13) et (14), des éléments $g, \bar{g} \in G$ et $h_1, h_2, \bar{h}_2, \bar{h}_3 \in H$ tels que l'on ait:

$$x_1 = gh_1x_0, \qquad x_2 = gh_2x_0 = \bar{g}\bar{h}_2x_0, \qquad x_3 = \bar{g}\bar{h}_3x_0 . \tag{15}$$

Comme $gh_2x_0 = \bar{g}\bar{h}_2x_0$ on a aussi:

$$x_0 = h^{-1}g^{-1}\bar{g}\bar{h}_2x_0 .$$

Il en résulte que

$$h_2^{-1}g^{-1}\bar{g}\bar{h}_2 \in H_0 \subset H_C$$

donc aussi

$$g^{-1}\bar{g} \in H_C$$

et, par suite, il existe un $h \in H$ tel que l'on ait:

$$\bar{g} = gh .$$

En mettant cette relation dans l'expression pour x_3 dans (15) nous constantons qu'on a $(x_1, x_3) \in C_H$; donc la relation C_H est transitive et notre lemme se trouve démontré.

Maintenant on peut se demander dans quelle mesure les correspondances

$$X/C \to H_C \qquad \text{et} \qquad H \to C_H , \tag{16}$$

définies plus haut, pourraient être regardées comme inverses l'une de l'autre. Le lemme suivant nous donne la réponse à cette question:

LEMME 5. *Les pseudo-objets géométriques X/C et X/C_{H_C}, où la correspondance*

$$X/C \to C_{H_C}$$

est la superposition des correspondances (16), *sont équivalents.*

Démonstration. Soit H_C un sous-groupe du groupe G correspondant au pseudo-objet géométrique X/C et désignons par x_0 un élément de X tel que H_C soit le sous-groupe de stabilité de $[x_0]$. D'après (10), (13) et la transitivité de l'objet géométrique X, les classes d'équivalence constituant les éléments de X/C et X/C_{H_C} peuvent être représentés sous la forme resp. $g[x_0]$ et gH_Cx_0, où $g \in G$. Cela étant, nous pouvons définir l'application θ de X/C sur X/C_{H_C} par la formule:

$$\theta(g[x_0]) \overset{\mathrm{df}}{=} gH_Cx_0 . \tag{17}$$

Il en résulte immédiatement que l'on a:

$$\theta(\bar{g}g[x_0]) = \bar{g}\theta(g[x_0])$$

pour tout $\bar{g} \in G$; donc l'application θ est un homomorphisme de X/C sur X/C_{H_C}.

Mais, d'après (1), (3) et la définition élément x_0, on a:

$$g_1[x_0] = g_2[x_0] \Longleftrightarrow g_2^{-1}g_1[x_0] \neq [x_0] \Longleftrightarrow g_2^{-1}g_1 \notin H_C \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow g_2^{-1}g_1H_Cx_0 \neq H_Cx_0 \Longleftrightarrow g_1H_Cx_0 \neq g_2H_Cx_0 .$$

Il en résulte, d'après (17), que l'application θ établit un isomorphisme entre les pseudo-objets X/C et X/C_{H_C}. Notre lemme se trouve ainsi démontré.

Entenant compte des lemmes 3, 4 et 5 et de la relation (10), nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Pour tout objet géométrique abstrait X purement differentiel et transitif il existe une correspondance biunivoque entre les classes des pseudo-objets géométriques équivalents associés à l'objet X et celles des sous-groupes conjugués du groupe G contenant un sous-groupe de stabilité d'un élément de X.*

D'après le théorème 2 nous avons le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Le problème de classification des pseudo-objets géométriques associés à un objet géométrique transitif relatif à un groupe G se réduit à celui de la classification des sous-groupes du groupe G contenant un sous-groupe H_0 étant la sous-groupe de stabilité d'un élément de la fibre X de l'objet géométrique considéré.*

Remarque. Comme tout objet géométrique non transitif peut être entendu comme une famille d'objets géométriques transitifs avec la même opération $(g, x) \to gx$, le problème de la classification des pseudo-objets associes à des objets géométriques non transitifs peut être réduit à celui de la classification des objets géométriques transitifs.

Travaux cités

[1] M. Kucharzewski et M. Kuczma, *Some remarks on geometric objects and their equivalence I et II*, Tensor N. S. 13 (1963), p. 251-260 et 261-268.

[2] E. Siwek, *Pseudoobjets géométriques*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), p. 209-218.

[3] A. Zajtz, *Algebraic objects*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, Prace Matematyczne (sous presse).

[4] — *Über die Äquivalenz der geometrischen Objekte*, Ann. Polon. Math. (sous presse).

Reçu par la Rédaction le 5. 5. 1966