DIFFERENTIAL GEOMETRY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 12
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1984

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЖЕСТКОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОДНОЗНАЧНО ПРОЕКТИРУЮЩИХСЯ НА ПЛОСКОСТЬ

И. ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Математическо-механический факультет, Софийский Университет,
София, Булгарска Народная Республика

1

Пусть регулярная поверхность S однозначно проектируется на плоскость μ. Тогда она имеет уравнение вида

$$S\colon\ z = f(x, y), \qquad (x, y) \in \bar{G}. \tag{1}$$

Предположим, что G — ограниченная, конечно-связная область, имеющая кусочно-гладкую границу ∂G.

Известно [1], [2], что третья координата поля $U(\xi, \eta, \zeta)$ бесконечно малого (б.м.) изгибания поверхности (1) удовлетворяет уравнению

$$z_{yy}\zeta_{xx} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{xx}\zeta_{yy} = 0 \tag{2}$$

и, что поле U является тривиальным тогда и только тогда, когда

$$\zeta = ax+by+c, \qquad a, b, c \text{ — произвольные константы.} \tag{3}$$

Уравнение (2) будет эллиптического типа в точках где гауссова кривизна $K > 0$, параболического типа в точках где $K = 0$ и гиперболического типа в точках где $K < 0$.

Имеется ряд интересных результатов в теории б.м. изгибаний выпуклых поверхностей, а также и в теории б.м. изгибаний поверхностей отрицательной или нулевой гауссовой кривизны. Совсем мало результатов имеется для б.м. изгибаний поверхностей, гауссова кривизна которых меняет свой знак. В настоящей статье дадим достаточные условия жесткости некоторых классов поверхностей, однозначно проектирующихся на плоскость, без ограничения для знака гауссовой кривизны.

Пусть линия L принадлежит поверхности S, ν — фиксированное направление в μ и n_μ — нормаль к μ.

Бесконечно малыми изгибаниями обобщенного скольжения поверхности S, вдоль кривой $L \subset S$ относительно плоскости μ, будем называть такие б.м. изгибания поверхности, при которых $\zeta|_L = Un_\mu = c_1 = \text{const}$. В частности, б.м. изгибания, при которых $\zeta|_L = 0$, т.е. когда точки кривой L не получают смещений ортогональных к плоскости μ, будем называть б.м. изгибаниями скольжения поверхности S вдоль L относительно μ [1].

Бесконечно малые изгибания поверхности S, при которых $\zeta_\nu|_{L_1} = 0$, где L_1 — проекция кривой L на плоскость μ, будем называть *ν-б.м. изгибаниями поверхности вдоль кривой $L \subset S$ относительно плоскости μ* (через ζ_ν обозначена производная функции ζ по направлению ν).

Будем говорить, что б.м. изгибание поверхности S *принадлежит классу* $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$, если $\zeta \in C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$.

2

Предположим, что $f(x, y) \in C^3(\bar{G})$, $\zeta(x, y) \in C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$ и в μ существует направление $l(l_1, l_2)$ такое, что для него и для перпендикулярного ему направления $\bar{l}(l_2, -l_1)$ выполнены неравенства

(4) $$f_{lll} > 0, \quad f_{lll}f_{l\bar{l}\bar{l}} - f_{ll\bar{l}}^2 > 0 \quad (f_{lll} < 0, \ f_{lll}f_{l\bar{l}\bar{l}} - f_{ll\bar{l}}^2 > 0)$$

на множестве $\tilde{G}$ всюду плотном в $\bar{G}$, $\tilde{G} \subset \bar{G}$. Пусть $n_\Gamma(n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ (Γ — гладкая часть ∂G) и

$$H = f_{ll}\cos^2\bar{\theta} - 2f_{l\bar{l}}\cos\theta\cos\bar{\theta} + f_{\bar{l}\bar{l}}\cos^2\theta,$$

где $\theta = (l, n_\Gamma)_e$, $\bar{\theta} = (\bar{l}, n_\Gamma)_e$, $0 \leqslant \theta, \bar{\theta} \leqslant \pi$.

Представим границу Γ следующим образом $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma^i$, $\Gamma^j \cap \Gamma^k = \varnothing, j \neq k$, где

на Γ^1

$$H\cos\theta \geqslant 0, \quad f_{ll}\cos\theta > 0 \quad (H\cos\theta \leqslant 0, \quad f_{ll}\cos\theta < 0);$$

на Γ^2

(а) $H\cos\theta < 0, \quad f_{ll}\cos\theta \leqslant 0 \quad (H\cos\theta > 0, \quad f_{ll}\cos\theta \geqslant 0)$,

или

(б) $n_\Gamma = \varepsilon\bar{l}$ и или $f_{ll} \neq 0$, или $f_{ll} = 0$, $\varepsilon f_{l\bar{l}} > 0$, $\varepsilon = \pm 1$

($n_\Gamma = \varepsilon\bar{l}$ и или $f_{ll} \neq 0$, или $f_{ll} = 0$, $\varepsilon f_{l\bar{l}} < 0$, $\varepsilon = \pm 1$);

на Γ^3

$$H\cos\theta < 0, \quad f_{ll}\cos\theta > 0 \quad (H\cos\theta > 0, \quad f_{ll}\cos\theta < 0);$$

на Γ^4

(а) $\theta \neq \pi/2$, $H\cos\theta \geqslant 0$, $f_{ll}\cos\theta \leqslant 0$ $(\theta \neq \pi/2$, $H\cos\theta \leqslant 0$, $f_{ll}\cos\theta \geqslant 0)$

или

(б) $n_\Gamma = \varepsilon \bar{l}$, $f_{ll} = 0$, $\varepsilon f_{\bar{l}\bar{l}} \leqslant 0$, $\varepsilon = \pm 1$ $(n_\Gamma = \varepsilon \bar{l}$, $f_{ll} = 0$, $\varepsilon f_{\bar{l}\bar{l}} \geqslant 0$, $\varepsilon = \pm 1)$.

При помощи этого разбиения границы Γ, для границы Γ_S поверхности S получаем $\Gamma_S = \bigcup\limits_{i=1}^{4} {}^c\Gamma_S^i$, где ${}^c\Gamma_S^i$ — замыкание множества Γ_S^i, а Γ_S^i — прообраз части Γ^i, $i = 1, \dots, 4$, при проектировании поверхности S на плоскость μ. Обозначим через $\Gamma_S^{2_1}$ эту часть границы Γ_S^2, которая проектируется на μ в отрезки параллельные направлению l. (Отметим, что некоторые из множеств Γ_S^i, $i = 1, \dots, 4$, могут быть пустыми.) Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Поверхность* (1), (4) *жестка относительно б.м. изгибаний класса $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$, которые: вдоль Γ_S^1 являются изгибаниями скольжения или обобщенного скольжения относительно плоскости μ; вдоль Γ_S^2 — l-изгибаниями относительно μ; вдоль Γ_S^3 — изгибаниями скольжения или обобщенного скольжения и l-изгибаниями относительно μ; а вдоль границы Γ_S^4 на изгибания не накладываются никакие условия.*

Теорема 2. *Поверхность* (1), (4), *имеющая границу $\Gamma_S = {}^c\Gamma_S^1 \cup {}^c\Gamma_S^{2_1} \cup {}^c\Gamma_S^4$, жестка относительно б.м. изгибаний класса $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$, которые вдоль $\Gamma_S^1 \cup \Gamma_S^{2_1}$ являются изгибаниями скольжения или обобщенного скольжения относительно μ, а вдоль границы Γ_S^4 на изгибания не накладываются никакие условия.*

Следствие. *Поверхность* (1), (4), *имеющая границу $\Gamma_S = {}^c\Gamma_S^1 \cup {}^c\Gamma_S^{2_1} \cup {}^c\Gamma_S^4$, жестка относительно б.м. изгибаний класса $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$, если граница $\Gamma_S^1 \cup \Gamma_S^{2_1}$ закреплена, а граница Γ_S^4 свободна.*

Теорема 3. *Любой выпуклой поверхности $\bar{S}$: $z = \bar{f}(x, y)$, $\bar{f}(x, y) \in C^3(\bar{G}_1)$, имеющей гауссову кривизну $K > 0$ на множестве $\tilde{G}_1$ всюду плотном в $\bar{G}_1$, $\tilde{G}_1 \subset \bar{G}_1$, соответствует семейство поверхностей класса* (1), (4) $\left(G_1 = \left\{(x,y) : \begin{matrix} x_0 < x < x_1 \\ y_0 < y < y_1 \end{matrix}\right\}\right)$.

3

В этом пункте предположим, что: (1°) $f(x, y) \in C^2(\bar{G})$,

(5) $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \varepsilon \theta^2(x, y) \varphi^m(x, y) \psi^n(x, y)$, $\varphi(x, y), \psi(x,y) \in C^2(\bar{G})$, $\theta(x, y) \neq 0$,

где m и n целые положительные числа, $\varepsilon = 1$, если хотя бы одно из чисел m и n нечетное и $\varepsilon = \pm 1$, если m и n — четные; (2°) отображение Λ: $\bar{G} \to \bar{D}$, заданное равенствами

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y) \tag{6}$$

является C^2-дифеоморфизмом; (3°) сеть линий Γ_1: $\varphi(x, y) = \gamma_1$ и Γ_2: $\psi(x, y) = \gamma_2$ сопряженная на поверхности S; (4°) линии c_1: $\varphi(x, y) = 0$

и c_2: $\psi(x, y) = 0$ не являются асимптотическими и функции $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют в D равенствам

$$\frac{f_{xx}\varphi_y^2 - 2f_{xy}\varphi_x\varphi_y + f_{yy}\varphi_x^2}{f_{xx}\psi_y^2 - 2f_{xy}\psi_x\psi_y + f_{yy}\psi_x^2} = \varepsilon\frac{\psi^n}{\varphi^m}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &f_{xx}\varphi_{yy} - 2f_{xy}\varphi_{xy} + f_{yy}\varphi_{xx} = 0, \\ &f_{xx}\psi_{yy} - 2f_{xy}\psi_{xy} + f_{yy}\psi_{xx} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть ∂G: $x = x(s), y = y(s)$, параметризована так, что длина дуги s растет при положительном обходе ∂G. Из предположений (1°) и (2°) следует, что линии c_1 и c_2 являются параболическими для поверхности S и имеют место следующие четырье случая:

(а) m и n — нечетные, $\varepsilon = 1$;

(б) m — четное, n — нечетное, $\varepsilon = 1$;

(в) m и n — четные, $\varepsilon = 1$;

(г) m и n — четные, $\varepsilon = -1$.

Таким образом уравнение (2) является в случаях (а) и (б) уравнением смешанного типа, в случае (в) — уравнением эллиптико-параболического типа, в случае (г) — уравнением гиперболо-параболического типа.

Разобьем в случае (а) гладкую часть границы Γ_S на непересекающиеся множества $\Gamma_{S^a}^i$, $i = 1, \dots, 6$, которые определяются следующим образом:

на $\Gamma_{S^a}^1$ — $N_a(\varphi^m + \psi^n) > 0$, $H_a(\varphi^m + \psi^n) \geqslant 0$;

на $\Gamma_{S^a}^2$ — $N_a H_a < 0$, $H_a(\varphi^m + \psi^n) \geqslant 0$;

на $\Gamma_{S^a}^3$ — (а) $N_a H_a < 0$, $H_a(\varphi^m + \psi^n) < 0$, или (б) $N_a = 0$, $\varepsilon_1\varphi > 0$, $\varphi\psi < 0$;

$$\Gamma_{S^a}^4 = \Gamma_{S^a}^{4_1} \cup \Gamma_{S^a}^{4_2};$$

на $\Gamma_{S^a}^{4_1}$ — $N_a = 0$, и или (а) $\varepsilon_1\varphi < 0$, $\varphi\psi \geqslant 0$, или (б) $\varepsilon_1\psi < 0$, $\varphi = 0$;

на $\Gamma_{S^a}^{4_2}$ — $N_a = 0$, $\varepsilon_1\psi > 0$, $\varphi\psi < 0$;

на $\Gamma_{S^a}^5$ — $N_a = 0$ и или (а) $\varepsilon_1\varphi > 0$, $\varphi\psi \geqslant 0$, или (б) $\varepsilon_1\psi > 0$, $\varphi = 0$;

на $\Gamma_{S^a}^6$ — (а) $N_a \neq 0$, $N_a H_a \geqslant 0$, $N_a(\varphi^m + \psi^n) \leqslant 0$, или (б) $N_a = 0$, $\varphi = \psi = 0$,

где

$$N_a = \eta[(\psi_x - \varphi_x)x' + (\psi_y - \varphi_y)y'], \qquad \eta = \operatorname{sgn}\Delta, \qquad \Delta = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)},$$

$$H_a = \psi^n(\psi_x x' + \psi_y y')^2 + \varphi^m(\varphi_x x' + \varphi_y y')^2, \qquad \varepsilon_1 = \operatorname{sgn}[\eta(\psi_x x' + \psi_y y')].$$

В случае (б) представим гладкую часть границы Γ_S как объединение непересекающихся множеств $\Gamma_{S^б}^i$, $i = 1, \dots, 6$, которые определяются следующим образом:

на $\Gamma^1_{s\text{б}}$ — $N_\text{б} H_\text{б} \geqslant 0$, $N_\text{б}(\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n) > 0$;

на $\Gamma^2_{s\text{б}}$ — $N_\text{б} H_\text{б} < 0$, $H_\text{б}(\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n) \geqslant 0$;

на $\Gamma^3_{s\text{б}}$ — (а) $N_\text{б} H_\text{б} < 0$, $H_\text{б}(\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n) < 0$, или (б) $N_\text{б} = 0$, $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') > 0$, $\psi < 0$;

$$\Gamma^4_{s\text{б}} = \Gamma^{4_1}_{s\text{б}} \cup \Gamma^{4_2}_{s\text{б}};$$

на $\Gamma^{4_1}_{s\text{б}}$ — $N_\text{б} = 0$, $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') < 0$, $\psi \geqslant 0$;

на $\Gamma^{4_2}_{s\text{б}}$ — $N_\text{б} = 0$ и или (а) $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') < 0$, $\psi < 0$, или (б) $\varphi = 0$;

на $\Gamma^5_{s\text{б}}$ — $N_\text{б} = 0$, $\psi \geqslant 0$, $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') > 0$;

на $\Gamma^6_{s\text{б}}$ — (а) $N_\text{б} \neq 0$; $N_\text{б} H_\text{б} \geqslant 0$; $H_\text{б}(\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n) \leqslant 0$, или (б) $N_\text{б} = 0$, $\varphi = \psi = 0$, где

$$\eta = \operatorname{sgn}\Delta, \quad N_\text{б} = \eta[(\varphi\psi_x - \lambda\varphi_x)x' + (\varphi\psi_y - \lambda\varphi_y)y'], \quad H_\text{б} = H_\text{а},$$

λ — достаточно большое положительное число.

В случае (в) разобьем гладкую часть границы Γ_s на непересекающиеся множества $\Gamma^i_{s\text{в}}$, $i = 1, \ldots, 5$, которые определяются следующим образом:

на $\Gamma^1_{s\text{в}}$ — $N_\text{в} > 0$, $H_\text{в} > 0$;

на $\Gamma^2_{s\text{в}}$ — $N_\text{в} < 0$, $H_\text{в} > 0$;

$$\Gamma^3_{s\text{в}} = \Gamma^{3_1}_{s\text{в}} \cup \Gamma^{3_2}_{s\text{в}};$$

на $\Gamma^{3_1}_{s\text{в}}$ — $N_\text{в} = 0$, $\psi \neq 0$, $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') < 0$;

на $\Gamma^{3_2}_{s\text{в}}$ — $N_\text{в} = 0$, $\psi = 0$, $\psi_x x' + \psi_y y' = 0$, $\varphi \neq 0$;

на $\Gamma^4_{s\text{в}}$ — $N_\text{в} = 0$, $\psi \neq 0$, $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') \geqslant 0$;

на $\Gamma^5_{s\text{в}}$ — $\varphi = \psi = 0$, где

$$\eta = \operatorname{sgn}\Delta, \quad N_\text{в} = \eta[(\varphi\psi_x - \psi\varphi_x)x' + (\varphi\psi_y - \psi\varphi_y)y'], \quad H_\text{в} = H_\text{а}.$$

В случае (г) представим гладкую часть границы Γ_s как объединение непересекающихся множеств $\Gamma^i_{s\text{г}}$, $i = 1, \ldots, 5$, которые определяются следующим образом:

на $\Gamma^1_{s\text{г}}$ — $N_\text{г} H_\text{г} \geqslant 0$, $N_\text{г}(\psi^{n+2} - \lambda^2\varphi^{m+2}) < 0$;

на $\Gamma^2_{s\text{г}}$ — $N_\text{г} H_\text{г} < 0$, $H_\text{г}(\psi^{n+2} - \lambda^2\varphi^{m+2}) \leqslant 0$;

на $\Gamma^3_{s\text{г}}$ — (а) $N_\text{г} H_\text{г} < 0$, $H_\text{г}(\psi^{n+2} - \lambda^2\varphi^{m+2}) > 0$, или (б) $N_\text{г} = 0$, $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') > 0$;

на $\Gamma^4_{s\text{г}}$ — $N_\text{г} = 0$ и или (а) $\psi \neq 0$, $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') \leqslant 0$ или (б) $\psi = 0$, $\varphi \neq 0$;

на $\Gamma^5_{s\text{г}}$ — (а) $N_\text{г} \neq 0$, $N_\text{г} H_\text{г} \geqslant 0$, $H_\text{г}(\psi^{n+2} - \lambda^2\varphi^{m+2}) \geqslant 0$, или (б) $\varphi = \psi = 0$‘

где

$$\eta = \operatorname{sgn}\Delta, \quad N_\text{г} = \eta[(\lambda\varphi\psi_x - \psi\varphi_x)x' + (\lambda\varphi\psi_y - \psi\varphi_y)y'],$$
$$H_\text{г} = \varphi^m(\varphi_x x' + \varphi_y y')^2 - \psi^n(\psi_x x' + \psi_y y')^2,$$

λ — достаточно большое положительное число.

Отметим, что некоторые из множеств $\Gamma^i_{S\text{а}}$, $\Gamma^i_{S\text{б}}$, $i = 1, \dots, 6$, $\Gamma^i_{S\text{в}}$, $\Gamma^i_{S\text{г}}$, $i = 1, \dots, 5$, могут быть пустыми. Обозначим через l_φ (l_ψ, $l_{\varphi-\psi}$, $l_{\psi/\varphi}$) поле направлений касательных к линиям $\varphi(x, y) = \text{const}$ ($\psi(x, y) = \text{const}$, $\varphi(x, y)-\psi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y)/\varphi(x, y) = \text{const}$) в G, а через $l^2_\text{б}$ ($l^2_\text{г}$) — векторное поле в G, имеющее координаты $(\varphi\psi_y-\lambda\varphi_y,\ \lambda\varphi_x-\varphi\psi_x)$ $((\lambda\varphi\psi_y-$ $-\psi\varphi_y,\ \psi\varphi_x-\lambda\varphi\psi_x))$. Имеют место следующие теоремы:

Теорема 4. *Поверхность* (1), (1°)-(4°), (а) *жестка в классе* $C^1(\overline{G})\cap C^2(G)$ *б.м. изгибаний, которые относительно плоскости* μ *являются: изгибаниями скольжения или обобщенного скольжения вдоль* $\Gamma^1_{S\text{а}}$ (*и в частности когда граница* $\Gamma^1_{S\text{а}}$ *закреплена*); $l_{\varphi-\psi}$ - *изгибаниями вдоль* $\Gamma^2_{S\text{а}}$ (*и в частности когда они* — l_φ- *и* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^2_{S\text{а}}$); l_φ- *и* l_ψ- *изгибаниями вдоль* $\Gamma^3_{S\text{а}}$; l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^{4_1}_{S\text{а}}$; l_φ- *или* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^{4_2}_{S\text{а}}$; l_φ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^5_{S\text{а}}$; *а вдоль границы* $\Gamma^6_{S\text{а}}$ *на изгибания не накладываются никаких условий.*

Теорема 5. *Поверхность* (1), (1°)-(4°), (б) *жестка в классе* $C^1(\overline{G})\cap C^2(G)$ *б.м. изгибаний, которые относительно плоскости* μ *являются: изгибаниями скольжения или обобщенного скольжения вдоль* $\Gamma^1_{S\text{б}}$ (*и в частности когда граница* $\Gamma^1_{S\text{б}}$ *закреплена*); $l^2_\text{б}$-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^2_{S\text{б}}$ (*и в частности когда они* — l_φ- *и* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^2_{S\text{б}}$); l_φ- *и* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^3_{S\text{б}}$; l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^{4_1}_{S\text{б}}$; l_φ- *или* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^{4_2}_{S\text{б}}$; l -*изгибаниями вдоль* $\Gamma^5_{S\text{б}}$; *а вдоль границы* $\Gamma^6_{S\text{б}}$ *на изгибания не накладываются никаких условий.*

Теорема 6. *Поверхность* (1), (1°)-(4°), (в) *жестка в классе* $C^1(\overline{G})\cap C^2(G)$ *б.м. изгибаний, которые относительно плоскости* μ *являются: изгибаниями скольжения или обобщенного скольжения вдоль* $\Gamma^1_{S\text{в}}$ (*и в частности когда граница* $\Gamma^1_{S\text{в}}$ *закреплена*); $l_{\psi/\varphi}$-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^2_{S\text{в}}$ (*и в частности когда они* — l_φ- *и* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^2_{S\text{в}}$); l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^{3_1}_{S\text{в}}$; l_φ- *или* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^{3_2}_{S\text{в}}$; l_φ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^4_{S\text{в}}$.

Теорема 7. *Поверхность* (1), (1°)-(4°), (г) *жестка в классе* $C^1(\overline{G})\cap C^2(G)$ *б.м. изгибаний, которые относительно плоскости* μ *являются: изгибаниями скольжения или обобщенного скольжения вдоль* $\Gamma^1_{S\text{г}}$ (*и в частности когда граница* $\Gamma^1_{S\text{г}}$ *закреплена*); $l^2_\text{г}$-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^2_{S\text{г}}$ (*и в частности когда они* — l_φ- *и* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^2_{S\text{г}}$); l_φ- *и* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^3_{S\text{г}}$; l_φ- *или* l_ψ-*изгибаниями вдоль* $\Gamma^4_{S\text{г}}$; *а вдоль границы* $\Gamma^5_{S\text{г}}$ *на изгибания не накладываются никаких условий.*

4. Доказательство теорем 1, 2

Напишем уравнение (2) в виде

(2′) $$L\zeta \equiv a^{11}\zeta_{xx}+2a^{12}\zeta_{xy}+a^{22}\zeta_{yy} = 0, \quad a^{11}= z_{yy}, \quad a^{12} = -z_{xy}, \quad a^{22} = z_{xx},$$

и предположим, что координатная система $0xyz$ выбрана так, что ось $0x$ определена через $\overline{l}$, а ось $0y$ — через l. Будем искать такие краевые условия, чтобы уравнение (2) имело единственное решение. Для этого к уравнению (2′)

применим известный метод „a, b, c" (см. [5]). Пусть $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ произвольные функции класса $C^1(\bar{G})$. Интегрируя по частям получаем (см. [3], (5) и (6))

$$2\int_G (\alpha\zeta_x+\beta\zeta_y)L\zeta\, dx\, dy = \int_G A(\zeta_x, \zeta_y)\, dx\, dy + \int_{\partial G} B(\zeta_x, \zeta_y)\, ds, \tag{9}$$

где

$$A(\zeta_x, \zeta_y) = [-(\alpha a^{11})_x - 2(\alpha a^{12})_y + (\beta a^{11})_y]\zeta_x^2 + [(\alpha a^{22})_x - (\beta a^{22})_y - 2(\beta a^{12})_x]\zeta_y^2 - 2[(\alpha a^{22})_y + (\beta a^{11})_x]\zeta_x\zeta_y, \tag{10}$$

$$B(\zeta_x, \zeta_y) = (\alpha a^{11}n_1 + 2\alpha a^{12}n_2 - \beta a^{11}n_2)\zeta_x^2 + (\beta a^{22}n_2 + 2\beta a^{12}n_1 - \alpha a^{22}n_1)\zeta_y^2 + 2(\alpha a^{22}n_2 + \beta a^{11}n_1)\zeta_x\zeta_y. \tag{11}$$

Обозначим через A^{ij}, $i, j = 1, 2$, коэфиценты квадратичной формы $A(\zeta_x, \zeta_y)$ и выберем $\alpha = 0$, $\beta = \mathrm{const}$, $\operatorname{sgn}\beta = \operatorname{sgn} a_y^{11}$ в $\tilde{G}$. Тогда $A^{11} = \beta a_y^{11}$, $A^{11}A^{22} - A^{12^2} = \beta^2(a_y^{11}a_y^{22} - a_x^{11^2})$, откуда из (4) следует, что квадратичная форма $A(\zeta_x, \zeta_y)$ положительно определена в $\tilde{G}$. После сделанного выбора для α и β, квадратичная форма $B(\zeta_x, \zeta_y)$ имеет представление [4]

$$B(\zeta_x, \zeta_y) = \frac{\beta}{n_2}[-a^{11}(\zeta_x n_2 - \zeta_y n_1)^2 + H\zeta_y^2] \quad \text{при} \quad n_2 \neq 0,$$

$$B(\zeta_x, \zeta_y) = 2\beta n_1(a^{11}\zeta_x\zeta_y + a^{12}\zeta_y^2) \quad \text{при} \quad n_2 = 0.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу Z': найти решение уравнения (2) в G, которое удовлетворяет краевым условиям

$$\zeta_x|_{\Gamma^1\cup\Gamma^3} = \varphi_1(s), \qquad \zeta_y|_{\Gamma^2\cup\Gamma^3} = \varphi_2(s). \tag{12}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Задача* Z', *в предположениях* (4), *может иметь не более одного решения в классе* $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$, *если* $\Gamma^1\cup\Gamma^3 \neq 0$.

Пусть ζ решение задачи Z' при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Так как $A(\zeta_x, \zeta_y) \geqslant 0$ в $\bar{G}$ и краевые условия (12) выбрани так, что $B(\zeta_x, \zeta_y) \geqslant 0$ на ∂G, то оба интеграла в правой части равенства (10) равны нулю. Тогда $A(\zeta_x, \zeta_y)$ равна нулю почти везде в G и так как $A(\zeta_x, \zeta_y)$ непрерывна, то $A(\zeta_x, \zeta_y) = 0$ везде в $\bar{G}$. Но из положительной определености квадратичной формы $A(\zeta_x, \zeta_y)$ на $\tilde{G}$ следует $\zeta_x|_{\tilde{G}} = \zeta_y|_{\tilde{G}} = 0$. Тогда из непрерывности функции ζ_x и ζ_y следует $\zeta_x = \zeta_y = 0$ в $\bar{G}$.

Из этой леммы сразу-же следуют утверждения теорем 1 и 2.

5. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим семейство поверхностей

$$S_h\colon\ z = f(x, y) \equiv \int_{y_0}^{y} \bar{f}(x, y)\, dy + h(x, y), \qquad (x, y) \in \bar{G}_1, \tag{13}$$

где $h(x, y) = \varphi_1(x)+a_1y$, $\varphi_1(x)$ — произвольная функция класса C^3, a_1 — произвольная константа. Обозначим через l единичный вектор оси Oy. Тогда $f_{ll} = \bar{f}_{yy}$, $f_{ll}f_{\bar{l}\bar{l}}-f_{l\bar{l}}^2 = \bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy}-\bar{f}_{xy}^2$. Так как $\bar{S}$ — выпуклая, то ее нормальные сечения в произвольной точке $P(x, y, \bar{f}(x, y))$ повернуты своей выпуклостью в одну и ту-же сторону относительно касательной плоскости в точке P. Но это означает, что никакие два нормальных сечения в P не могут иметь противоположные по знаку нормальные кривизны. Из последного вытекает, что $f_{ll} = \bar{f}_{yy} \geqslant 0$ ($f_{ll} = \bar{f}_{yy} \leqslant 0$). Из предположения для гауссовой кривизны поверхности $\bar{S}$ имеем $f_{ll}f_{\bar{l}\bar{l}}-f_{l\bar{l}}^2 = \bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy}-\bar{f}_{xy}^2 > 0$ на множестве $\tilde{G}_1$ всюду плотном в $\bar{G}_1$, $\tilde{G}_1 \subset \bar{G}_1$. Тогда $f_{ll} = \bar{f}_{yy} > 0$ ($f_{ll} = \bar{f}_{yy} < 0$) тоже на множестве $\tilde{G}_1$.

6. Доказательство теорем 4-7

В уравнение (2) делаем замену переменных (6). В силу предположения (3°) п. 3 получаем уравнение

$$\bar{a}^{11}(u, v)\zeta_{uu}+\bar{a}^{22}(u, v)\zeta_{vv}+b^1(u, v)\zeta_u+b^2(u, v)\zeta_v = 0, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}^{11}(u, v) &= W(L\varphi_y^2-2M\varphi_x\varphi_y+N\varphi_x^2),\\ \bar{a}^{22}(u, v) &= W(L\psi_y^2-2M\psi_x\psi_y+N\psi_x^2),\\ b^1(u, v) &= z_{xx}\varphi_{yy}-2z_{xy}\varphi_{xy}+z_{yy}\varphi_{xx},\\ b^2(u, v) &= z_{xx}\psi_{yy}-2z_{xy}\psi_{xy}+z_{yy}\psi_{xx}, \end{aligned} \tag{15}$$

L, M, N — коэфициенты второй квадратичной формы поверхности (1), а $W = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$. Из (6) имеем $x = \bar{\varphi}(u, v)$, $y = \bar{\psi}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, откуда для поверхности S получаем представление

$$S: \begin{cases} x = \bar{\varphi}(u, v),\\ y = \bar{\psi}(u, v),\\ z = f[\bar{\varphi}(u, v), \bar{\psi}(u, v)], \quad (u, v) \in \bar{D}. \end{cases} \tag{16}$$

Тогда $\bar{a}^{11}(u, v) = \Delta^3\bar{W}N$, $\bar{a}^{22} = \Delta^3\bar{W}L$, где $\Delta = D(\varphi, \psi)/D(x, y)$, $\bar{W} = \eta W/\Delta$, $\eta = \operatorname{sgn}\Delta$. Пользуясь предположением (1°) п. 3 и инвариантностью гауссовой кривизны поверхности S при замене переменных, получаем

$$\bar{a}^{11}\bar{a}^{22} = \varepsilon\theta^2\Delta^2u^mv^n. \tag{17}$$

В силу (17) и предположений (7) и (8), уравнение (14), после сокращения на $|\Delta\theta|$, принимает вид

$$u^m\zeta_{vv}+\varepsilon v^n\zeta_{uu} = 0. \tag{18}$$

Теперь применим опять метод „a, b, c", чтобы найти краевые условия, при которых уравнение (18) имеет единственное решение. Обозначим через $\Gamma_а^i$, $\Gamma_б^i$, $i = 1, \ldots, 6$, $\Gamma_в^i$, $\Gamma_г^i$, $i = 1, \ldots, 5$, соответственно образы границы $\Gamma_{Sа}^i$, $\Gamma_{Sб}^i$, $i = 1, \ldots, 6$, $\Gamma_{Sв}^i$, $\Gamma_{Sг}^i$, $i = 1, \ldots, 5$, при отображении $\Lambda \circ \Pi$, где Π проекция поверхности S на плоскость $0xy$. Применяя равенство (9) для уравнения (18), получаем из (10), что коэфициенты квадратичной формы $A(\zeta_u, \zeta_v)$ имеют вид

$$A^{11} = \varepsilon v^n(\beta_v-\alpha_u)+2\beta n v^{n-1}, \quad A^{12} = -\alpha_v u^m-\varepsilon\beta_u v^n, \tag{19}$$
$$A^{22} = u^m(\alpha_u-\beta_v)+m\alpha u^{m-1}.$$

Из (19) видно, что выбирая в случае (а) $\alpha = \beta = \mathrm{const} > 0$, то квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ будет положительно определена на множестве $\tilde{D}$ всюду плотном в $\bar{D}$, $\tilde{D} \subset \bar{D}$, а квадратичная форма $B(\zeta_u, \zeta_v)$ приймет вид

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = \frac{\alpha}{n_1+n_2}[H_{\text{a}}(\zeta_u+\zeta_v)^2-(u^m+v^n)(\zeta_u n_2-\zeta_v n_1)^2] \quad \text{при} \quad n_1+n_2 \neq 0,$$
$$B(\zeta_u, \zeta_v) = 2n_1\alpha[v^n\zeta_u^2+(v^n-u^m)\zeta_u\zeta_v-u^m\zeta_v^2] \quad \text{при} \quad n_1+n_2 = 0,$$

где $H_{\text{a}} = v^n n_1^2+u^m n_2^2$.

Рассмотрим следующую краевую задачу А: найти решение уравнения (18), (а) в D, которое удовлетворяет краевым условиям

$$\zeta|_{\Gamma_{\text{a}}^1} = \varphi_1(s), \quad \zeta_u+\zeta_v|_{\Gamma_{\text{a}}^2} = \varphi_2(s), \quad \zeta_u|_{\Gamma_{\text{a}}^3\cup\Gamma_{\text{a}}^{4_1}} = \varphi_3(s), \quad \zeta_v|_{\Gamma_{\text{a}}^3\cup\Gamma_{\text{a}}^5} = \varphi_4(s), \tag{20}$$
$$\zeta_u|_{\Gamma_{\text{a}}^{4_2}} = \varphi_5(s) \quad \text{или} \quad \zeta_v|_{\Gamma_{\text{a}}^{4_2}} = \varphi_6(s).$$

Из (19) видно, что в случае (б), если выберем $\alpha = \alpha_1 u$, $\beta = \mathrm{const} > 0$, $\alpha_1 = \mathrm{const} > 0$, то $A^{11} = v^{n-1}(\beta n-\alpha_1 v)$, $A^{12} = 0$, $A^{22} = \alpha_1 u^m(1+m)$. Фиксируем α_1, а β выберем столь большим, что $\beta n > \alpha_1 v$ в D. Тогда квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ будет положительно определена на множестве $\tilde{D}$ всюду плотном в $\bar{D}$, $\tilde{D} \subset \bar{D}$, а квадратичная форма

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = \frac{\alpha}{un_1+\lambda n_2}[H_6(u\zeta_u+\lambda\zeta_v)^2-(u^{m+2}+\lambda^2 v^n)(\zeta_u n_2-\zeta_v n_1)^2]$$
$$\text{при} \quad un_1+\lambda n_2 \neq 0,$$
$$B(\zeta_u, \zeta_v) = \frac{2n_1\alpha}{\lambda}[\lambda u v^n\zeta_u^2+(\lambda^2 v^n-u^{m+2})\zeta_u\zeta_v-u^{m+1}\zeta_v^2] \quad \text{при} \quad un_1+\lambda n_2 = 0,$$

где $\lambda = \beta/\alpha_1$, $H_6 = H_{\text{a}}$.

Рассмотрим следующую краевую задачу Б: найти решение уравнения (18), (б) в D, которое удовлетворяет краевым условиям

$$\zeta|_{\Gamma_6^1} = \varphi_1(s), \quad u\zeta_u+\lambda\zeta_v|_{\Gamma_6^2} = \varphi_2(s), \quad \zeta_u|_{\Gamma_6^3\cup\Gamma_6^{4_1}} = \varphi_3(s), \quad \zeta_v|_{\Gamma_6^3\cup\Gamma_6^5} = \varphi_4(s), \tag{21}$$
$$\zeta_u|_{\Gamma_6^{4_2}} = \varphi_5(s) \quad \text{или} \quad \zeta_v|_{\Gamma_6^{4_2}} = \varphi_6(s).$$

Из (19) видно, что если в случае (в) выберем $\alpha = \alpha_1 u$, $\beta = \beta_1 v$, $\alpha_1 = \beta_1 = \mathrm{const} > 0$, то квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ положительно определена на множестве $\tilde{D}$ всюду плотном в $\bar{D}$, $\tilde{D} \subset \bar{D}$, а квадратичная форма

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = \frac{\alpha_1}{un_1+vn_2}[H_{\text{в}}(u\zeta_u+v\zeta_v)^2-(u^{m+2}+v^{n+2})(\zeta_u n_2-\zeta_v n_1)^2]$$
$$\text{при} \quad un_1+vn_2 \neq 0,$$

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = \frac{2\alpha_1 n_1}{v} [uv^{n+1}\zeta_u^2 - vu^{m+1}\zeta_v^2 + (v^{n+2} - u^{m+2})\zeta_u\zeta_v]$$

$$\text{при} \quad un_1 + vn_2 = 0,\ v \neq 0,$$

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = 2\alpha_1 n_2 u^{m+1}\zeta_u\zeta_v \qquad \text{при} \quad un_1 + vn_2 = 0,\ v = 0,$$

где $H_в = H_а$.

Рассмотрим следующую краевую задачу В: найти решение уравнения (18), (в) в D, которое удовлетворяет краевым условиям

$$(22) \qquad \zeta\big|_{\Gamma_в^1} = \varphi_1(s), \quad u\zeta_u + v\zeta_v\big|_{\Gamma_в^2} = \varphi_2(s), \quad \zeta_u\big|_{\Gamma_в^{3_1}} = \varphi_3(s), \quad \zeta_u\big|_{\Gamma_в^{3_2}} = \varphi_4(s)$$

$$\text{или} \quad \zeta_v\big|_{\Gamma_в^{3_2}} = \varphi_5(s), \quad \zeta_v\big|_{\Gamma_в^4} = \varphi_6(s).$$

В случае (г) выбирая $\alpha = \alpha_1 u$, $\beta = \beta_1 v$, $\alpha_1 = \text{const} > 0$, $\beta_1 = \text{const} > 0$ имеем $A^{11} = v^n[\alpha_1 - \beta_1(n+1)]$, $A^{12} = 0$, $A^{22} = u^m[\alpha_1(m+1) - \beta_1]$. Тогда видно, что если фиксируем β_1, а α_1 выберем столь большим, что $\alpha_1 - \beta_1(n+1) > 0$, $\alpha_1(m+1) - \beta_1 > 0$, то квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ положительно определена на множестве $\tilde{D}$ всюду плотном в $\bar{D}$, $\tilde{D} \subset \bar{D}$, а

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = \frac{\beta_1}{\lambda u n_1 + v n_2} [H_г(\lambda u\zeta_u + v\zeta_v)^2 + (v^{n+2} - \lambda^2 u^{m+2})(\zeta_u n_2 - \zeta_v n_1)^2]$$

$$\text{при} \quad \lambda u n_1 + v n_2 \neq 0,$$

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = \frac{-2n_1\beta_1}{v} [\lambda uv^{n+1}\zeta_u^2 + (\lambda^2 u^{m+2} + v^{n+2})\zeta_u\zeta_v + \lambda vu^{m+1}\zeta_v^2]$$

$$\text{при} \quad \lambda u n_1 + v n_2 = 0,\ v \neq 0,$$

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = 2\beta_1 \lambda n_2 u^{m+1}\zeta_u\zeta_v \qquad \text{при} \quad \lambda u n_1 + v n_2 = 0,\ v = 0,$$

где $H_г = u^m n_2^2 - v^n n_1^2$.

Рассмотрим следующую краевую задачу Г: найти решение уравнения (18), (г) в D, которое удовлетворяет краевым условиям

$$(23) \qquad \zeta\big|_{\Gamma_г^1} = \varphi_1(s), \quad \lambda u\zeta_u + v\zeta_v\big|_{\Gamma_г^2} = \varphi_2(s), \quad \zeta_u\big|_{\Gamma_г^3} = \varphi_3(s), \quad \zeta_v\big|_{\Gamma_г^3} = \varphi_4(s),$$

$$\zeta_u\big|_{\Gamma_г^4} = \varphi_5(s) \quad \text{или} \quad \zeta_v\big|_{\Gamma_г^4} = \varphi_6(s).$$

Имеет место следующая

Лемма 2. *Задача* А (Б, В, Г) *может иметь не более одного решения в классе* $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$, *если* $\Gamma_а^1 \neq \varnothing$ $(\Gamma_б^1 \neq \varnothing,\ \Gamma_в^1 \neq \varnothing,\ \Gamma_г^1 \neq \varnothing)$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1. Из леммы 2 следуют утверждения теорем 4–7.

Литература

[1] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Москва 1959.

[2] Н. В. Ефимов, *Качественные вопросы теории деформаций поверхностей*, Успехи мат. наук 3, 2 (1948), 47–158.

[3] И. Иванова-Каратопраклиева, *О жесткости поверхностей смешанной кривизны*, Доклады БАН, 31, 5 (1978), 505–508.

[4] —, *Жесткость поверхностей знакопроизвольной кривизны, однозначно проектирующихся на плоскость*, Сердика 8 (1982), 170–182.

[5] Г. Д. Каратопраклиев, *Об одном классе уравнений смешанного типа в многомерных областях*, ДАН СССР 230, 4 (1976), 769.

Presented to the Semester
Differential Geometry
(*September 17–December 15, 1979*)