ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLV (1985)

Fonctions algébriques de Grunsky–Shah

par HALINA JONDRO (Gliwice)

Abstract. The paper deals with the algebraic functions of Grunsky–Shah. We call algebraic function of Grunsky–Shah every function $f \in H(U)$, $f(0) = 0$, $f(z) \neq 0$ for $z \neq 0$, satisfying the equation of the form:

$$\lambda \log w + \Omega(w) = \lambda \log z + \mathscr{T}(z),$$

where the functions $\Omega(w)$ and $\mathscr{T}(z)$ are rational, $\mathscr{T}(z)$ is purely imaginary on the unit circle with 0 and ∞ as the only poles of the order N, $\Omega(w)$ is a rational function with 0 as the pole of the order N and satisfying the condition:

$$\Omega(w) = \overline{-\Omega(-1/\bar{w})} \quad \text{for every } w.$$

We prove that the class of algebraic functions is dense in the class $\mathscr{K}$.

1. Les propriétés des fonctions algébriques de Grunsky–Shah. Soit $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes dans $U = \{z: |z| < 1\}$, avec la convergence uniforme sur des ensembles compacts, $H'(U)$ l'espace conjugué, $\mathscr{K}$ la famille des fonctions holomorphes et univalentes dans U, de la forme

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

et satisfaisant à la condition:

$$f(z_1)\overline{f(z_2)} \neq -1 \quad \text{pour } z_1, z_2 \in U \text{ arbitraires.} \tag{2}$$

Définissons dans la famille $\mathscr{K}$ la fonctionnelle:

$$I(f) = \operatorname{Re}\left\{\lambda^2 \log f'(0) + 2\lambda L\left(\log\frac{f(z)}{z}\right) + L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2\left(\log\left(1+f(z)\overline{f(\zeta)}\right)\right)\right\}, \tag{3}$$

où $L^2(\varphi(z, \zeta)) = L(L(\varphi(z, \zeta)))$, $|L|^2(\varphi(z, \bar{\zeta})) = L(\overline{L(\varphi(z, \bar{\zeta}))})$, $\varphi(z, \zeta)$ est une fonction holomorphe dans $U \times U$, λ un nombre réel arbitraire.

THÉORÈME [2]. *Si f est la fonction maximale pour la fonctionnelle* (3), *f satisfait à la relation*:

$$(4)\quad \lambda \log\frac{f(\zeta)}{\zeta}+L\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)-\overline{L(\log(1+\overline{f(\zeta)}f(z)))}+$$
$$+\overline{L(\log(1-\bar{\zeta}z))}=\lambda\log f'(0)+L\left(\log\frac{f(z)}{z}\right),$$

et la valeur de la fonctionnelle (3) *pour* f *admet la forme suivante*:

$$\operatorname{Re} I(f)=I(f)=-|L|^2(\log(1-\bar{\zeta}z)).$$

Définissons la fonctionnele L de (3) de la manière suivante: $L(1)=0$, $L(z^n)=\lambda_n$, pour $n=1,\ldots,N$, $L(z^n)=0$ pour $n>N$, où λ_n sont des nombres complexes arbitraires. Par exemple, une fonctionnelle qui satisfait à ces conditions est la fonctionnelle linéaire $L=L(h)$, dépendant seulement du nombre fini des coefficients de la fonction h. Dans ce cas, on peut écrire l'équation de la fonction extrémale (4) sous une forme plus concrète, en exprimant les fonctions $\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$ et $\log(1+f(z)\overline{f(\zeta)})$ par les polynômes de Faber. Ainsi, en utilisant la relation connue

$$(5)\qquad \log(1-tf(z))=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(F_m(t)-ma_{m0})z^m,$$

où $\sum_{m=0}^{\infty}a_{m0}z^m=\log f(z)/z$ et $F_m(t)$ désigne le polynôme de Faber de degré m pour la fonction $1/f(z)$, nous obtenons, en posant successivement $1/f(\zeta)$ et $-\overline{f(\zeta)}$ au lieu de t dans les relations (5)

$$\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(F_m\left(\frac{1}{f(\zeta)}\right)-ma_{m0}\right)z^m-\log(\zeta-z)+\log f(\zeta)$$

et

$$\log(1+f(z)\overline{f(\zeta)})=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(F_m(-\overline{f(\zeta)})-ma_{m0})z^m.$$

En tenant encore compte du fait que pour z suffisamment proches de 0

$$\log(\zeta-z)=\log\zeta-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\zeta^k}z^k\qquad\text{et}\qquad\log(1-\bar{\zeta}z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\bar{\zeta}^kz^k,$$

et du fait que $\operatorname{Re}(\lambda\log f'(0)+L(\log(f(z)/z)))=0$ ((11) dans [2]), nous constatons que la fonction extrémale $w=f(\zeta)$ satisfait à l'équation fonctionnelle de la forme:

$$(6)\quad \lambda\log w-\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}(F_m(1/w)-\overline{F_m(-\bar{w})})=\lambda\log\zeta-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}\left(\frac{\lambda_k}{\zeta^k}-\bar{\lambda}_k\zeta^k\right)\right)+C,$$

où C est une constante imaginaire. L'équation (6) est un cas particulier d'une équation plus générale, notamment de l'équation de la forme:

$$(7)\qquad \lambda \log w+\Omega(w) = \lambda \log z+\mathcal{X}(z),$$

où $\Omega(w)$ et $\bar{\mathcal{X}}(z)$ sont des fonctions rationnelles, $\mathcal{X}(z)$ est une fonction imaginaire sur la circonférence ∂U admettant des pôles seulement aux points 0 et ∞. Désignons l'ordre de ces pôles par N (vu la symétrie $\mathcal{X}(z)$ par rapport à ∂U, l'ordre de ces deux pôles doit être le même). $\Omega(w)$ est une fonction rationnelle possédant, entre autres, le pôle 0 d'ordre N et satisfisant à la condition

$$(8)\qquad \Omega(w) = \overline{-\Omega(-1/\bar{w})} \qquad \text{pour tout } w.$$

Nous allons prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si* $w=f(z), f\in H(U), f(0)=0, f(z)\neq 0$ *pour* $z\neq 0$, *est une fonction qui satisfait à l'équation* (7) *dans* U, *et si* $\log f(z)/z$ *est une certaine branche de* $\log f(z)/z$, *alors*

1° f *se prolonge d'une manière continue sur le cercle unité, fermé,*

2° $f\in\mathcal{K}$,

3° *le bord* ∂D, $D=f(U)$, *se confond avec* $\Gamma=f(\partial U)$. *Ce bord est composé des points* w *pour lesquels* $\operatorname{Re}\{\lambda \log w+\Omega(w)\}=0$.

Démonstration. La démonstration se compose de 3 parties qui correspondent aux propriétés annoncées.

ad 1°. Pour prouver la première propriété il suffit de démontrer que pour chaque suite de points $\{z_j\}$, $z_j\to z_0$, $|z_j|<1$, $|z_0|=1$, la suite $f(z_j)\to w_0$ dépend seulement de z_0. Considérons l'équation

$$(9)\qquad \lambda \log w+\Omega(w) = \mathcal{X}(z_0)+\lambda \log z_0.$$

Soient w_h des racines différentes de l'équation (9). Nous allons démontrer que le nombre des solutions de l'équation (9) est fini. Supposons le contraire. Soit $\{w_h\}$ la suite des solutions de l'équation ci-dessus. Seuls les pôles de la fonction $\Omega(w)$ peuvent être des points d'accumulation de la suite $\{w_h\}$.

Supposons que $w_h\to w^*\neq\infty$ et soit w^* un pôle d'ordre L de la fonction Ω (w^* peut être aussi 0, donc en même temps un point singulier de la fonction $\log w$). De plus multiplions les deux membres de l'égalité

$$\lambda \log w_h+\Omega(w_h) = \mathcal{X}(z_0)+\lambda\cdot\log z_0 \qquad \text{par } (w_h-w^*)^L.$$

Passant à la limite avec $h\to\infty$, nous obtenous la conclusion qu'un coefficient de $(w_h-w^*)^{-L}$ dans la série de Laurent de la fonction $\Omega(w)$ doit être égal à zéro, en contradiction avec la definition de L comme ordre du pôle w^*. De même nous pouvons prouver que ∞ ne peut être un point d'accumulation de la suite $\{w_h\}$. Ainsi nous avons démontré que le nombre des solutions de l'équation (9) est fini; désignons – le par R.

Soit à présent $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire, suffisamment petit pour que tous les cercles $K(w_h, \varepsilon)$, $h = 1, \ldots, R$, pris avec leurs circonférences soient disjoints. Soit U_0 un voisinage du point z_0 tel que pour $z \in U_0 \cap U$, z arbitraire, toutes les racines de l'équation (7) appartiennent à l'ensemble $S = \bigcup_h K(w_h, \varepsilon)$. Mais pour chaque $z \in U_0 \cap U$ les nombres $f(z)$ sont les racines de l'équation (7).

D'autre part, $f(U_0 \cap U)$ est un ensemble connexe, donc il existe h_0 tel que $f(U_0 \cap U) \subset K(w_{h_0}, \varepsilon)$. Donc si $z_j \in U_0 \cap U$, alors

$$f(z_j) \in K(w_{h_0}, \varepsilon). \tag{10}$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitraire et que la condition (10) est remplie, il résulte que $f(z_j) \to w_{h_0}$, et, en vertu de la définition w_{h_0}, que w_{h_0} dépend seulement de z_0. En posant donc $w_0 = w_{h_0}$ nous obtenons que la suite $f(z_j) \to w_0$, et la propriété 1° est ainsi prouvée.

ad 2°. Considérons la fonction $h(z) = -1/\overline{f(\bar{z})}$. C'est une fonction méromorphe dans U, avec un seul pôle $z = 0$. Posons $D' = h(U)$, $\Gamma_1 = h(\partial U)$. Après un calcul facile, en utilisant l'identité (8), nous constatons que la fonction $w = h(z)$ satisfait à l'équation

$$\lambda \log(wz) + \Omega(w) = -\overline{\mathscr{X}(\bar{z})} + \lambda \log(-1) \quad \text{dans } U, \tag{11}$$

où $\log(h(z)z)$ est une certaine branche du logarithme de la fonction $zh(z)$ dans U. En vertu de 1° $f(z)$ et $h(z)$ se prolongent d'une façon continue sur le cercle $\bar{U}$, d'où nous déduisons que f et h satisfont respectivement aux équations (7) et (11) dans $\bar{U}$. Comme les seconds membres des équations (7) et (11) sont imaginaires sur la circonférence ∂U, on a $\mathrm{Re}\{\lambda \log w + \Omega(w)\} = 0$, sur Γ, ainsi que sur Γ_1. En outre, puisque les seconds membres des équations (7) et (11) sont bornés sur la circonférence ∂U, les courbes Γ et Γ_1 ne passent ni par 0 ni par ∞ (ni d'ailleurs par d'autres pôles de la fonction Ω), donc en particulier elles sont bornées. On voit aussi tout de suite que $\partial D \subset \Gamma$ et $\partial D' \subset \Gamma_1$, car $f(z)$ et $h(z)$ sont méromorphes dans U. Ainsi ∂D et $\partial D'$ sont des ensembles bornés. Ni zéro, ni aucun des pôles de la fonction $\Omega(w)$ ne leur appartiennent pas. Puisque ∂D est borné et la fonction f est holomorphe dans U, il résulte que D est aussi borné; le domaine D' n'est évidemment pas borné, car il contient ∞.

On peut prouver, de plus, que les continus Γ et Γ_1 ne coupent pas respectivement les domaines D et D'. Remarquons d'abord que D et D' ne contiennent aucun pôle de la fonction $\Omega(w)$, que $0 \in D$ et $\infty \in D'$. Supposons ensuite que Γ coupe le domaine D, c'est-à-dire que $D \setminus \Gamma$ n'est pas connexe. Alors, outre la composante S_0 contenant le point 0, il existerait une seconde composante S, qui est bornée comme ensemble compris dans l'ensemble borné D. Le bord de cette composante est contenu évidemment dans $\partial D \cup \Gamma$, donc dans Γ. Conformément à ce qui précède la fonction $\lambda \log w + \Omega(w)$

aurait sur le bord du domaine S une partie réelle nulle ce qui n'est pas possible, car chaque branche de cette fonction est holomorphe dans S (S ne contient pas de pôles de la fonction $\Omega(w)$) et cette fonction n'est pas constante. De même on peut prouver que Γ_1 ne coupe pas D'. Si Γ_1 coupait D', alors outre la composante non bornée S_0, $\infty \in S_0$, il existerait encore une composante bornée S telle que $0, \infty \notin S$, ce qui n'est pas possible pour la même raison que ci-dessus.

A présent nous allons prouver que $f(U) \cap h(U) = D \cap D' = \emptyset$. Supposons en effet, que $D \cap D' \neq \emptyset$. L'ensemble $D \cap D'$ est certainement ouvert et ne contient pas 0 et ∞, car $\infty \notin D$ et $0 \notin D'$. Le bord de cet ensemble est compris dans $\partial D \cup \partial D'$, donc dans $\Gamma \cup \Gamma_1$. En considérant la partie réelle de la fonction $\lambda \log w + \Omega(w)$, nous obtenons une contradiction.

Pour achever la démonstration de la deuxième partie, nous devons prouver encore que la fonction $f(z)$ est univalente. Cette démonstration est pareille à celle du travail [1].

ad 3°. Des considérations précédentes nous savons que $\partial D \subset \Gamma$. Il suffit alors de montrer que inversement, $\partial D \supset \Gamma$. Supposons que $\Gamma \not\subset \partial D$. Comme $\Gamma \subset \bar{D}$ il en résulte que l'ensemble Γ aurait un point commun w_0 avec D. Alors il y aurait des points $\zeta_0 \in \partial U$ et $z_0 \in U$ tels que, $f(\zeta_0) = f(z_0) = w_0$, ce qui n'est pas possible, car la fonction $f(z)$ est univalente.

De faits précédents il résulte que $\lambda \log w + \Omega(w)$ est imaginaire sur ∂D.

Nous appellerons fonction algébrique de Grunsky–Shah chaque fonction $f \in H(U)$, $f(0) = 0$, $f(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$, qui satisfait à l'équation du type (7), où $\Omega(w)$ et $\mathscr{X}(z)$ sont les fonctions mentionnées au début de ce paragraphe.

2. La densité de la classe des fonctions algébriques dans la classe $\mathscr{K}$. Soit $f \in \mathscr{K}$. Posons $D = f(U)$, $D' = h(U)$, où $h(z) = -1/\overline{f(\bar{z})}$. Evidemment $D \cap D' = \emptyset$. Considérons la fonction $z = f^{-1}(w)$ inverse de $f(z)$ dans D et posons

$$F(w) = \begin{cases} f^{-1}(w), & w \in D, \\ \overline{f^{-1}(-1/\bar{w})}, & w \in D'. \end{cases}$$

C'est une fonction holomorphe dans l'ensemble ouvert $D \cup D'$. Soit r un nombre arbitraire, $0 < r < 1$, et soient $D_r = f(\{|z| < r\})$, $D'_r = h(\{|z| < r\})$. Evidemment $\bar{D}_r \cup \bar{D}'_r \subset D \cup D'$. En vertu du théorème de Runge pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(1-r)$, il existe une fonction rationnelle $r_\varepsilon(w)$ telle que

$$|\tfrac{1}{2}F(w) - r_\varepsilon(w)| < \varepsilon \quad \text{pour } w \in \bar{D}_r \cup \bar{D}'_r,$$

et possédant des pôles uniquement dans $C \setminus (D \cup D')$.

On peut poser que $r_\varepsilon(0) = r_\varepsilon(\infty) = 0$. En effet, dans le cas contraire, transformons la surface (w) à l'aide de l'homographie

$$\omega = H(w) = \frac{w-a}{w-b},$$

où $a \neq b$, $b \in C \setminus (\bar{D}_r \cup \bar{D}'_r)$, a est arbitraire. $H(\bar{D}_r)$ et $H(\bar{D}'_r)$ sont des domaines fermés et bornés, $H(0) = a/b$, $H(\infty) = 1$, $w = H^{-1}(\omega) = (b\omega - a)/(\omega - 1)$. Considérons la fonction

$$\Phi(\omega) = F\big(H^{-1}(\omega)\big)/(\omega - a/b)(\omega - 1).$$

En vertu de $F(0) = F(\infty) = 0$, la fonction $\Phi(\omega)$ est holomorphe dans $H(D) \cup H(D')$. Vu le théorème de Runge pour $\varepsilon' > 0$ arbitraire, il existe une fonction rationnelle $\varrho(\omega)$, avec des pôles situés dans $C \setminus \big(H(D) \cup H(D')\big)$, donc différents de a/b et 1, telle que

$$|\tfrac{1}{2}\Phi(\omega) - \varrho(\omega)| < \varepsilon' \quad \text{pour } \omega \in H(\bar{D}_r) \cup H(\bar{D}'_r);$$

alors

$$\big|\tfrac{1}{2}F(H^{-1}(\omega)) - (\omega - a/b)(\omega - 1)\varrho(\omega)\big| < \varepsilon\,|\omega - a/b|\,|\omega - 1| \leqslant \varepsilon' \cdot M, \tag{12}$$

pour

$$\omega \in H(\bar{D}_r) \cup H(\bar{D}'_r), \quad \text{où} \quad M = \sup_{H(\bar{D}_r) \cup H(\bar{D}'_r)} |\omega - a/b|\,|\omega - 1|.$$

Posant maintenant $\omega = H(w)$ et $\varepsilon' = \varepsilon/M$ dans (12), nous obtenons

$$\big|\tfrac{1}{2}F(w) - \big(H(w) - a/b\big)\big(H(w) - 1\big)\varrho\big(H(w)\big)\big| < \varepsilon \quad \text{dans } \bar{D}_r \cup \bar{D}'_r.$$

La fonction

$$r_\varepsilon(w) = \big(H(w) - a/b\big)\big(H(w) - 1\big)\varrho\big(H(w)\big)$$

est déjà telle que $r_\varepsilon(0) = r_\varepsilon(\infty) = 0$, et elle est holomorphe dans $D \cup D'$, car le pôle b ne lui appartient pas, et les pôles de la fonction $\varrho(\omega)$ n'appartiennent pas à $H(D) \cup H(D')$.

Posons maintenant

$$Q_\varepsilon(w) = r_\varepsilon(w) + \overline{r_\varepsilon(-1/\bar{w})},$$

c'est une fonction rationnelle, $Q_\varepsilon(0) = 0$, elle est holomorphe dans $D \cup D'$, et enfin

$$|F(w) - Q_\varepsilon(w)| < 2\varepsilon \quad \text{dans } \bar{D}_r \cup \bar{D}'_r. \tag{13}$$

En effet, si $w \in \bar{D}_r$, alors

$$\begin{aligned} |F(w) - Q_\varepsilon(w)| &\leqslant |\tfrac{1}{2}F(w) - r_\varepsilon(w)| + |\tfrac{1}{2}F(w) - \overline{r_\varepsilon(-1/\bar{w})}| \\ &= |\tfrac{1}{2}f^{-1}(w) - r_\varepsilon(w)| + |\tfrac{1}{2}f^{-1}(w) - \overline{r_\varepsilon(-1/\bar{w})}|, \end{aligned}$$

et comme

$$|\tfrac{1}{2}f^{-1}(w) - r_\varepsilon(w)| < \varepsilon \quad \text{pour } w \in \bar{D}_r$$

et

$$|\tfrac{1}{2}\overline{f^{-1}(-1/\bar{\omega})} - r_\varepsilon(\omega)| < \varepsilon \quad \text{pour } \omega \in \bar{D}'_r,$$

alors en posant dans la dernière inégalité $\omega = -1/\bar{w}$, $w \in \bar{D}_r$, nous obtenons $|\frac{1}{2}f^{-1}(w) - \overline{r_\varepsilon(-1/\bar{w})}| < \varepsilon$, de même que $w \in \bar{D}'_r$, alors (13) est remplie. On a aussi

$$Q_\varepsilon(w) = \overline{Q_\varepsilon(-1/\bar{w})}, \tag{14}$$

et pour ε suffisamment petit $Q_\varepsilon(w)$ est univalente dans $\bar{D}_r$, et aussi dans $\bar{D}'_r$, donc en particulier $Q_\varepsilon(\omega) \neq 0$ pour $\omega \neq 0$, $\omega \in \bar{D}_r$. Puisque $f^{-1}(\partial D_r) = \{|z| = r\}$, en vertu de (13) $Q_\varepsilon(\partial D_r) \subset \{r - 2\varepsilon < |z| < r + 2\varepsilon\}$, et il résulte que $\{|z| = r - 2\varepsilon\} \subset Q_\varepsilon(D_r)$. Posons $\Gamma_{r\varepsilon} = Q_\varepsilon^{-1}(\{|z| = r - 2\varepsilon\})$. On voit que $Q_\varepsilon(\Gamma_{r\varepsilon}) = \{|z| = r - 2\varepsilon\}$, et encore en vertu de la convergence uniforme $Q_\varepsilon^{-1}(z) \to f(z)$ avec $\varepsilon \to 0$ dans le cercle $U_r = \{|z| \leqslant r\}$, les courbes $\Gamma_{r\varepsilon}$ sont convergentes vers la courbe ∂D_r au sens de Fréchet, c'est-a-dire au sens de la convergence uniforme des descriptions paramétriques.

En effet, soit $Z \subset U_r$ un ensemble arbitraire, fermé et soit $\varrho = \operatorname{dist}(Z, C \setminus U)$. Si $2\varepsilon < \varrho$, alors $Z \subset Q_\varepsilon(D_r)$, car $U_{r-2\varepsilon} \subset Q_\varepsilon(D_r)$, et $Z \subset \bar{U}_{r-\varrho} \subset U_{r-2\varepsilon}$. Soit $\eta > 0$ arbitraire. De la continuité uniforme de la fonction f dans Z nous déduisons qu'il existe $\sigma > 0$ tel que si $z_1, z_2 \in Z$ et $|z_1 - z_2| < \sigma$, alors $|f(z_1) - f(z_2)| < \eta$. Mais, en vertu de (13), $|Q_\varepsilon(w) - f^{-1}(w)| < 2\varepsilon$ pour chaque $w \in \bar{D}_r$. En posant $w = Q_\varepsilon^{-1}(z)$, $z \in Z$, dans la dernière inégalité, nous obtenons l'inégalité $|z - f^{-1}(Q_\varepsilon^{-1}(z))| < 2\varepsilon$. Alors si $\varepsilon < \frac{1}{2}\sigma$, $|f(z) - Q_\varepsilon^{-1}(z)| < \eta$, ce qui prouve la convergence uniforme de $Q_\varepsilon^{-1}(z)$ vers $f(z)$ dans U. Evidemment $\Gamma_{r\varepsilon} \subset D_r$, donc l'intérieur de la courbe $\Gamma_{r\varepsilon}$ appartient à D_r en vertu du fait que D_r est connexe. En désignant cet intérieur par $G_{r\varepsilon}$, nous constatons que $0 \in G_{r\varepsilon}$, et que $G_{r\varepsilon}$ converge avec $\varepsilon \to 0$ vers D_r, au sens de la convergence vers le noyau.

La fonction rationnelle $Q_\varepsilon(w)$ est holomorphe dans $\bar{G}_{r\varepsilon}$ et elle s'annule dans $\bar{G}_{r\varepsilon}$ seulement au point $w = 0$.

Enfin posons

$$\Omega_\varepsilon(w) = \frac{i}{\dfrac{1}{r - 2\varepsilon} Q_\varepsilon(w)} + \frac{i}{(r - 2\varepsilon) Q_\varepsilon(w)}. \tag{15}$$

C'est une fonction rationnelle qui possède un pôle unique dans $G_{r\varepsilon}$ au point $w = 0$, en plus, en vertu de (14) et (15), la relation suivante a lieu

$$\Omega_\varepsilon(w) = -\overline{\Omega_\varepsilon(-1/\bar{w})}, \tag{16}$$

et on a

$$\operatorname{Re} \Omega_\varepsilon(w) = 0 \quad \text{pour } w \in \Gamma_{r\varepsilon}. \tag{17}$$

A présent on peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *La classe des fonctions algébriques de Grunsky–Shah est dense dans la classe $\mathscr{K}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{K}$ et $\hat{f}_r(z) = f(rz)$, $0 < r < 1$. Evidemment $\hat{f}_r \in \mathscr{K}$ et $\hat{f}_r(z) \to f(z)$ où $r \to 1^-$ presque uniformément dans U. Si $Z \subset U$ est un ensemble arbitraire compact, alors pour $\eta > 0$ arbitraire il existe r_0, $0 < r_0 < 1$, tel que pour chaque $r_0 < r < 1$ et pour chaque $z \in Z$

$$(18) \qquad |\hat{f}_r(z) - f(z)| < \eta.$$

Maintenant soit r_1, $r_0 < r_1 < 1$, arbitraire, mais fixé. Soit $G_{r_1 \varepsilon}$ la famille de domaines décrite ci-dessus, construite pour le domaine D_{r_1}. Soit la fonction $\hat{f}_\varepsilon(z)$, $\hat{f}_\varepsilon(0) = 0$, qui représente U sur $G_{r_1 \varepsilon}$. En vertu de la convergence $G_{r_1 \varepsilon}$ à D_{r_1} où $\varepsilon \to 0$ au sens de la convergence vers le noyau, $\hat{f}_\varepsilon(z) \to \hat{f}_{r_1}(z)$ presque uniformément dans U, d'où il existe un ε_0 tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et pour chaque $z \in Z$

$$(19) \qquad |\hat{f}_\varepsilon(z) - f_{r_1}(z)| < \eta.$$

Vu (18) et (19) nous concluons que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et pour chaque $z \in Z$

$$|\hat{f}_\varepsilon(z) - f(z)| < 2\eta,$$

ce qui prouve la possibilité d'approcher presque uniformément la fonction f par les fonctions $\hat{f}_\varepsilon$.

D'autre part, $\hat{f}_\varepsilon$ sont des fonctions algébriques de Grunsky–Shah. En effet, la composition $\Omega_\varepsilon(\hat{f}_\varepsilon(z))$, $z \in U$, est une fonction méromorphe dans U avec un pôle seulement au point $z = 0$. En outre, vu le théorème de Carathéodory–Osgood, $\hat{f}_\varepsilon$ étant une fonction qui représente le cercle U sur le domaine $G_{r\varepsilon}$ borné par la courbe de Jordan $\Gamma_{r\varepsilon}$, elle se prolonge d'une façon continue sur le cercle fermé $\bar{U}$, en représentant d'une façon homéomorphe $\bar{U}$ sur $\bar{G}_{r\varepsilon} = G_{r\varepsilon} \cup \Gamma_{r\varepsilon}$. La fonction $\Omega_\varepsilon(\hat{f}_\varepsilon(z))$ se prolonge donc d'une façon continue sur $\bar{U}$, et en vertu de (17) $\operatorname{Re} \Omega_\varepsilon(\hat{f}_\varepsilon(z)) = 0$ pour $z \in \partial U$. Vu le principe de la symétrie de Schwarz la fonction $\Omega_\varepsilon(\hat{f}_\varepsilon(z))$ se prolonge comme fonction rationnelle avec les seuls pôles $z = 0$ et $z = \infty$ sur tout le plan, restant imaginaire sur ∂U. En désignant la fonction ainsi prolongée par $\mathscr{X}_\varepsilon(z)$, nous concluons que la fonction $\hat{f}_\varepsilon$ est une fonction algébrique de Grunsky–Shah, ce qui achève la démonstration du théorème.

Travaux cités

[1] Z. Charzyński, J. Śladkowska-Zahorska, *Application de la méthode des fonctions algébriques à la représentation conforme*, Dissertationes Math. 195 (1982), 1–60.

[2] H. Jondro, *Les inégalités du type de Grunsky pour fonctions de la classe $\mathscr{K}$*, Ann. Polon. Math., ce volume, 43–53.

Reçu par la Rédaction le 30.11.1982