ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à argument fonctionnel

par K. Zima (Katowice)

Dans les chapitres VI-X de sa monographie [1], Szarski a exposé des méthodes qui permettent de ramener certains problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles aux problèmes correspondants dans la théorie des équations et des inégalités différentielles ordinaires. Dans ce travail, je me propose d'adapter les méthodes de Szarski aux équations aux dérivées partielles à argument fonctionnel. Quelques-uns des problèmes qui se rattachent aux équations de ce type se ramènent ainsi à des inégalités différentielles à argument retardé. D'autre part, ces inégalités se rattachent essentiellement aux équations différentielles à dérivée à gauche, dont l'étude a été faite dans le travail [2].

Les théorèmes que j'établis dans le présent travail sont en principe analogues aux théorèmes correspondants de Szarski et constituent une application de ses méthodes dans la théorie des équations aux dérivées partielles à argument fonctionnel.

1. Notations, définitions et hypothèses. Soit E^{n+1} l'espace à $n+1$ dimensions des points $P(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Les deux ensembles suivants, contenus dans E^{n+1}, vont jouer un rôle important dans ce qui suit:

$$(1)\quad \begin{aligned} H &= \{(t, x_1, \ldots, x_n)\colon\ 0 \leqslant t < a,\ a_i + Lt \leqslant x_i \leqslant b_i - Lt,\ i = 1, 2, \ldots, n\}\ ^{(1)},\\ G &= \{(t, x_1, \ldots, x_n)\colon\ p \leqslant t \leqslant 0,\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ p < 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

où a, a_i, b_i, L sont des constantes satisfaisant aux conditions:

$$L > 0, \quad a_i < b_i, \quad 0 < a \leqslant \frac{b_i - a_i}{2L}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Outre les ensembles H et G, nous allons considérer deux sous-ensembles de l'ensemble $G \cup H$:

$$(2)\quad \begin{aligned} \Delta_t &= \{(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G \cup H\colon\ p \leqslant \tau \leqslant t < a\},\\ S_t &= \{(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G \cup H\colon\ \tau = t,\ p \leqslant t < a\}. \end{aligned}$$

(1) L'ensemble H est appelé *pyramide de Haar*.

Suivant l'exemple de la monographie [1], nous utiliserons, autant que possible, la notation abrégée:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad P = (t, x) = (t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad U = (u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad Q(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right).$$

HYPOTHÈSES. *Soit $f_j(P, U, Q)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, un système de m fonctions qui satisfont aux conditions suivantes:*

1° *Les fonctions $f_j(P, U, Q)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, sont définies sur des ensembles D_j d'un espace à $2n+m+1$ dimensions, tels que $H \subset E^{n+1} \cap D_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$.*

2° *Les fonctions $f_j(P, U, Q)$ satisfont à la condition de Lipschitz généralisée:*

$$|f_j(P, \bar{U}, \bar{Q}) - f_j(P, \bar{\bar{U}}, \bar{\bar{Q}})| \leqslant \sigma_j(t, |\bar{u}_1 - \bar{\bar{u}}_1|, \ldots, |\bar{u}_m - \bar{\bar{u}}_m|) + L \sum_{i=1}^{n} |\bar{q}_i - \bar{\bar{q}}_i|, \quad P \in H,$$

où L est la constante qui intervient dans la définition de l'ensemble H.

3° *Les fonctions $\sigma_j(t, v_1, v_2, \ldots, v_m)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, sont non négatives, continues pour $t \in \langle 0, a)$, $v_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

4° *Si $\bar{v}_1 \geqslant \bar{\bar{v}}_1$, $\bar{v}_2 \geqslant \bar{\bar{v}}_2$, $\ldots$, $\bar{v}_m \geqslant \bar{\bar{v}}_m$, on a*

$$\sigma_j(t, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m) \geqslant \sigma_j(t, \bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_2, \ldots, \bar{\bar{v}}_m) \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Supposons encore données les transformations A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, de l'ensemble H en l'ensemble $G \cup H$ telles que $P = (t, X) \in H$ et $P^* = A_{ij}(P)$ entraînent $P^* \in \Delta_t$.

Dans ces conditions nous allons considérer le problème de Cauchy suivant:

$$\tag{3} \begin{aligned} &\frac{\partial u_i(P)}{\partial t} = f_i\big(P, u_1(A_{i1}(P)), \ldots, u_m(A_{im}(P)),\ Q(u_i)\big), \quad P \in H, \\ &u_i(P) = \varphi_i(P), \quad P \in G, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Nous appellerons *solution* du problème (3) dans l'ensemble H tout système de fonctions $\{u_1(P), u_2(P), \ldots, u_m(P)\}$, définies sur l'ensemble $G \cup H$, qui se confondent sur l'ensemble G avec les fonctions initiales $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_m(P)$ et vérifient, pour $P \in H$, la première condition du problème (3).

2. Deux lemmes. Une fonction $\psi(t, X)$, définie sur la pyramide H, sera dite ([1], p. 112) *fonction de classe D*, si elle est continue sur H, admet une différentielle de Stolz sur la surface latérale de la pyramide et des dérivées partielles par rapport à toutes les variables aux points intérieurs de l'ensemble H.

Nous énoncerons maintenant les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *La fonction $\psi(t, X)$ étant continue sur l'ensemble $G \cup H$ et de classe D sur l'ensemble H, considérons la fonction*

$$W(t) = \max_{X \in S_t} |\psi(t, X)|, \quad t \in \langle p, a) .$$

Je dis que pour tout $t^* \in (0, a)$ il existe un point X^* sur la section S_{t^*} tel qu'au point $(t^*, X^*) \in H$ a lieu l'inégalité

$$(4) \qquad D^- W(t^*) \leqslant |\psi_t(t^*, X^*)| - L \sum_{k=1}^{n} |\psi_{x_k}(t^*, X^*)| .$$

La démonstration de l'inégalité (4) résulte immédiatement des théorèmes 33.1, 34.1 et 35.1 de la monographie [1].

LEMME 2. *Supposons la fonction $\psi(t, X)$ continue sur l'ensemble $G \cup H$ et considérons les deux fonctions suivantes:*

$$W(t) = \max_{X \in S_t} |\psi(t, X)|, \quad t \in \langle p, a), \quad \mathfrak{W}(t) = \max_{P \in \Delta_t} |\psi(P)|, \quad t \in \langle p, a) .$$

Les fonctions $W(t)$ et $\mathfrak{W}(t)$ sont continues dans l'intervalle $\langle p, a)$ et la fonction $\mathfrak{W}(t)$ est non décroissante dans cet intervalle. En outre, pour tout $t \in \langle p, a)$, il existe un $\tilde{t} \in \langle p, t \rangle$ tel que $\mathfrak{W}(t) = W(\tilde{t})$. En effet, l'ensemble Δ_t étant fermé et borné, la fonction continue $|\psi(t, X)|$ admet un maximum en un point $(\tilde{t}, \tilde{X}) \in \Delta_t$. Le point $(\tilde{t}, \tilde{X})$ appartient en même temps à la section $S_{\tilde{t}}$, et $W(\tilde{t}) = \max_{X \in S_{\tilde{t}}} |\psi(\tilde{t}, X)| = |\psi(\tilde{t}, \tilde{X})| = \max_{P \in \Delta_t} |\psi(P)| = \mathfrak{W}(t)$. Evidemment, $\tilde{t} \leqslant t$. Désignons par $\tau(t)$ la borne inférieure des $\tilde{t} \in \langle p, t \rangle$ tels que, t étant donné, on a $W(\tilde{t}) = \mathfrak{W}(t)$. D'accord avec la définition, la fonction $\tau(t)$ est donc définie dans l'intervalle $\langle p, a)$ et ses valeurs appartiennent à cet intervalle. De plus, $\tau(t)$ est non décroissante dans l'intervalle $\langle p, a)$, ce qui résulte du fait que la fonction $\mathfrak{W}(t)$ est monotone. Le but essentiel du lemme 2 est, cependant, de prouver la continuité à gauche de la fonction $\tau(t)$.

LEMME. *La fonction $\tau(t)$ définie précédemment est continue à gauche dans l'intervalle (p, a).*

D é m o n s t r a t i o n du lemme. D'après la définition des fonctions $W(t)$ et $\mathfrak{W}(t)$ on a, pour $t \in \langle p, a)$, l'inégalité $W(t) \leqslant \mathfrak{W}(t)$. Puisque $p \leqslant \tau(t) \leqslant t$ et que la fonction $\mathfrak{W}(t)$ est non décroissante, on a $W(\tau(t)) \leqslant \mathfrak{W}(\tau(t)) \leqslant \mathfrak{W}(t)$. La continuité des fonctions $W(t)$ et $\mathfrak{W}(t)$ et la définition de la fonction $\tau(t)$ entraînent l'identité $W(\tau(t)) = \mathfrak{W}(t)$ qui, rapprochée de la dernière inégalité, donne

$$(*) \qquad W(\tau(t)) \equiv \mathfrak{W}(\tau(t)) \quad \text{pour } t \in \langle p, a) .$$

Soit $t_0 \in (p, a)$. La fonction $\tau(t)$ étant croissante et bornée, elle admet au point t_0 une limite à gauche. Soit $\lim_{t \to t_0 - 0} \tau(t) = s$. Evidemment, on a, pour $t < t_0$, $\tau(t) \leqslant \tau(t_0) \leqslant t_0$, donc $s \leqslant t_0$. Considérons les deux cas: I. $s = t_0$, II. $s < t_0$.

Dans le premier cas on a $s \leqslant \tau(t_0) \leqslant t_0 = s$, donc $s = \tau(t_0)$, ce qui prouve qu'au point t_0 la fonction $\tau(t)$ est continue à gauche.

Considérons maintenant le second cas. Puisque $\mathfrak{W}(t) \equiv W(\tau(t))$ et que les fonctions $W(t)$ et $\mathfrak{W}(t)$ sont continues, on a

$$(**) \qquad W(t_0) = \lim_{t \to t_0 - 0} \mathfrak{W}(t) = \lim_{t \to t_0 - 0} W(\tau(t)) = W(s) .$$

D'autre part, en tenant compte de $(*)$, on a aussi $\lim_{t \to t_0 - 0} W(\tau(t)) = \lim_{t \to t_0 - 0} \mathfrak{W}(\tau(t)) = \mathfrak{W}(s)$. Il en résulte l'égalité

$$(***) \qquad \mathfrak{W}(t_0) = W(s) = \mathfrak{W}(s) , \quad \text{c'est-à-dire } \mathfrak{W}(s) = \mathfrak{W}(t_0) .$$

Mais la fonction $\mathfrak{W}(t)$ est non décroissante, elle est donc nécessairement constante dans l'intervalle $\langle s, t_0 \rangle$. Par conséquent, la fonction $\tau(t)$ est constante dans $\langle s, t_0 \rangle$ d'où il s'ensuit qu'elle est continue à gauche au point t_0. La démonstration du lemme 2 est ainsi achevée.

3. Limitation de la différence de deux solutions du problème (3). Soient $\overline{U}(P) = \{\overline{u}_1(P), \ldots, \overline{u}_m(P)\}$ et $\overline{\overline{U}}(P) = \{\overline{\overline{u}}_1(P), \ldots$ $\ldots, \overline{\overline{u}}_m(P)\}$ deux solutions du problème (3), de classe D dans l'ensemble H, solutions qui correspondent à deux fonctions initiales continues $\overline{\Phi}(P) = \{\overline{\varphi}_1(P), \ldots, \overline{\varphi}_m(P)\}$ et $\overline{\overline{\Phi}}(P) = \{\overline{\overline{\varphi}}_1(P), \ldots, \overline{\overline{\varphi}}_n(P)\}$. On a donc les identités

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \overline{u}_i(P)}{\partial t} \equiv f_i\big(P, \overline{u}_1(A_{i1}(P)), \ldots, \overline{u}_m(A_{im}(P)), Q(\overline{u}_i(P))\big) \quad \text{pour } P \in H , \\ &\overline{u}_i(P) \equiv \overline{\varphi}_i(P) \quad \text{pour } P \in G , \; i = 1, 2, \ldots, m , \end{aligned}$$

et

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \overline{\overline{u}}_i(P)}{\partial t} = f_i\big(P, \overline{\overline{u}}_1(A_{i1}(P)), \ldots, \overline{\overline{u}}_m(A_{im}(P)), Q(\overline{\overline{u}}_i(P))\big) \quad \text{pour } P \in H , \\ &\overline{\overline{u}}_i(P) = \overline{\overline{\varphi}}_i(P) \quad \text{pour } P \in G , \; i = 1, 2, \ldots, m . \end{aligned}$$

Admettons les notations suivantes:

$$(7) \qquad w_i(P) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\varphi}_i(P) - \overline{\overline{\varphi}}_i(P) & \text{pour} \quad P \in G , \; i = 1, 2, \ldots, m , \\ \overline{u}_i(P) - \overline{\overline{u}}_i(P) & \text{pour} \quad P \in H , \; i = 1, 2, \ldots, m , \end{cases}$$

et $\eta_i = \max_G |\overline{\varphi}_i(P) - \overline{\overline{\varphi}}_i(P)|$.

En vertu de l'hypothèse 2° et des inégalités (5) et (6), on obtient pour les fonctions $w_i(P)$ l'inégalité

$$
(8) \qquad \begin{aligned}
&\left|\frac{\partial w_i(P)}{\partial t}\right| \leqslant \sigma_i\big(t, w_1(A_{i1}(P)), \ldots, w_m(A_{im}(P))\big) + L \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial w_k(P)}{\partial x_k}\right|, \quad P \in H, \\
&|w_i(P)| \leqslant \eta_i \quad \text{pour } P \in G, \ i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Posons encore

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
W_i(t) = \max_{X \in S_t} |w_i(t, X)|, \quad \mathfrak{W}_i(t) = \max_{P \in \Delta_t} |w_i(P)|, \\
V_{ij}(t) = \sup_{P \in \Delta_t} \left|w_i\big(A_{ij}(P)\big)\right|.
\end{aligned}
$$

En vertu du caractère „retardant" des transformations A_{ij} et des définitions des fonctions $W_i(t)$, $\mathfrak{W}_i(t)$ et $V_{ij}(t)$ on aura, pour les points $P = (t, X) \in G \cup H$, l'inégalité

$$
(10) \qquad \left|w_i\big(A_{ij}(P)\big)\right| \leqslant V_{ij}(t) \leqslant \mathfrak{W}_i(t), \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.
$$

En tenant compte de l'inégalité (10) et du fait que les fonctions $\sigma_i(t, v_1, \ldots, v_m)$ sont monotones par rapport aux variables $v_1, \ldots, v_m$ (hypothèse 4°), on déduit de (8) l'inégalité

$$
(11) \qquad \begin{aligned}
&\left|\frac{\partial w_i(P)}{\partial t}\right| - L \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial w_k(P)}{\partial x_k}\right| \leqslant \sigma_i\big(t, \mathfrak{W}_1(t), \ldots, \mathfrak{W}_m(t)\big), \quad t \in (0, a), \ P \in H, \\
&\mathfrak{W}_i(t) \leqslant \eta_i \quad \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle, \ i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

D'autre part, les fonctions $w_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, satisfont, dans l'ensemble $G \cup H$, aux hypothèses du lemme 1. En vertu de celui-ci il existe un ensemble $H_{w_i} \subset H$ tel que

$$
(12) \qquad D^- W_i(t) \leqslant \left|\frac{\partial w_i(t, X)}{\partial t}\right| - L \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{w_i(t, X)}{x_k}\right| \quad \text{pour } (t, X) \in H_{w_i}.
$$

Les inégalités (11) et (12) ont lieu simultanément pour $(t, X) \in H_{w_i}$. La projection de l'ensemble H_{w_i} sur l'axe des t étant, d'après l'énoncé du lemme 1, l'intervalle $(0, a)$, on a pour $t \in (0, a)$ l'inégalité

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
&D_- W_i(t) \leqslant \sigma_i\big(t, \mathfrak{W}_1(t), \ldots, \mathfrak{W}_m(t)\big), \quad t \in (0, a), \\
&W_i(t) \leqslant \eta_i \quad \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle, \ i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Remarquons enfin que (v. le lemme 2) pour tout $t^* \in \langle p, a)$ il existe un $\tilde{t} \in \langle p, t^*\rangle$ tel que $\mathfrak{W}_i(t^*) = W_i(\tilde{t})$. En posant, d'après la notation adoptée dans lemme 2, $\inf\{\tilde{t}\colon W_i(\tilde{t}) = \mathfrak{W}_i(t^*)\} = \tau_i(t^*)$, on a $\tau_i(t) \leqslant t$ et

$\mathfrak{W}_i(t) = W_i\big(\tau_i(t)\big)$, $t \in \langle p, a)$ et, de plus, en vertu du lemme les fonctions $\tau_i(t)$ sont continues à gauche. En tenant compte de cette égalité, on déduit de l'inégalité (13) pour les fonctions $W(t) = \{W_1(t), \dots, W_m(t)\}$ le système suivant d'inégalités différentielles à argument retardé:

$$(14)\qquad \begin{aligned} &D_-W_i(t) \leqslant \sigma_i\Big(t, W_1\big(\tau_1(t)\big), W_2\big(\tau_2(t)\big), \dots, W_m\big(\tau_m(t)\big)\Big), \quad t \in (0, a), \\ &W_i(t) \leqslant \eta_i, \quad t \in \langle p, 0\rangle, \ i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Les résultats établis dans [2] sur les équations et les inégalités différentielles à argument retardé permettent de conclure que les fonctions $W_i(t)$, qui vérifient l'inégalité (14), satisfont aussi à l'inégalité

$$(15)\qquad W_i(t) \leqslant Z_i(t), \quad t \in \langle 0, a), \ i = 1, 2, \dots, m,$$

où $\{Z_1(t), \dots, Z_m(t)\}$ est l'intégrale supérieure à droite du système suivant d'équations différentielles à argument retardé:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &\big(z_i(t)\big)'_- = \sigma_i\Big(t, z_1\big(\tau_1(t)\big), \dots, z_m\big(\tau_m(t)\big)\Big), \quad t \in \langle 0, a) \\ &z_i(t) = \eta_i \quad \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle, \ i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

4. Unicité et dépendance continue des solutions du problème (3) de la fonction initiale. Nous ferons ici encore une hypothèse sur les fonctions $\sigma_i(t, v_1, \dots, v_m)$:

5° $\sigma_i(t, 0, \dots, 0) \equiv 0$ *pour* $t \in \langle 0, a)$, $i = 1, 2, \dots, m$, *et le problème de Cauchy*:

$$(17)\qquad \begin{aligned} &v_i'(t) = \sigma_i\big(t, v_1(t), \dots, v_m(t)\big), \quad t \in \langle 0, a), \\ &v_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

n'admet que la solution nulle.

Soit $\{Z_1(t), \dots, Z_m(t)\}$ une solution du système (16) dans l'intervalle $\langle 0, a)$. Pour les fonctions $Z(t) = \{Z_1(t), \dots, Z_m(t)\}$ nous allons trouver une limitation en utilisant une intégrale convenable d'un système d'équations différentielles ordinaires de la forme (17).

En vertu de la définition des fonctions $\{Z_1(t), \dots, Z_m(t)\}$, dans l'intervalle $\langle 0, a)$ on a l'identité

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\big(Z_i(t)\big)'_- \equiv \sigma_i\Big(t, Z_1\big(\tau_1(t)\big), \dots, Z_m\big(\tau_m(t)\big)\Big), \quad t \in (0, a), \\ &Z_i(t) = \eta_i \quad \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle, \ i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte du fait que les fonctions σ_i et Z_i sont non négatives et monotones et que $\tau_i(t) \leqslant t$, il résulte l'inégalité

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\big(Z_i(t)\big)'_- \leqslant \sigma_i\big(t, Z_1(t), \dots, Z_m(t)\big), \quad t \in \langle 0, a), \\ &Z_i(0) = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

En s'appuyant ensuite sur les théorèmes correspondants de la théorie des inégalités différentielles (v. [1]), on obtient pour les fonctions $Z_i(t)$ la limitation

$$Z_i(t) \leqslant V_i(t), \quad t \in \langle 0, a), \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{20}$$

où $\{V_1(t), \ldots, V_m(t)\}$ est l'intégrale supérieure à droite dans l'intervalle $\langle 0, a)$ du système suivant:

$$\begin{aligned} & v_i'(t) = \sigma_i\big(t, v_1(t), \ldots, v_m(t)\big), \quad t \in \langle 0, a), \\ & v_i(0) = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{21}$$

Les formules (15) et (20) donnent enfin la suite d'inégalités

$$W_i(t) \leqslant Z_i(t) \leqslant V_i(t), \quad t \in \langle 0, a), \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{i}$$

Récapitulant, on peut dire:

Si $\{\overline{u}_1(P), \ldots, \overline{u}_m(P)\}$ et $\{\overline{\overline{u}}_1(P), \ldots, \overline{\overline{u}}_m(P)\}$ sont deux solutions du problème (3) dans l'ensemble H, correspondant aux fonctions initiales $\{\overline{\varphi}_1(P), \ldots, \overline{\varphi}_m(P)\}$ et $\{\overline{\overline{\varphi}}_1(P), \ldots, \overline{\overline{\varphi}}_m(P)\}$, et si $W_i(t) = \max\limits_{X \in S_t} \{|\overline{u}_i(t, X) - \overline{\overline{u}}_i(t, X)|\}$ et $\eta_i = \max\limits_{P \in G} |\overline{\varphi}_i(P) - \overline{\overline{\varphi}}_i(P)|$, on a, avec les hypothèses 1°-4°, l'inégalité

$$W_i(t) \leqslant V_i(t), \quad t \in \langle 0, a), \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{22}$$

où $\{V_1(t), \ldots, V_m(t)\}$ est l'intégrale supérieure à droite du système (21). Les hypothèses 1°-4° ainsi que l'hypothèse 5° assurent la dépendance continue de cette intégrale des conditions initiales au point initial zéro.

On peut donc énoncer pour le problème (3) le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* 1°-5° *la solution du problème* (3) *dans l'ensemble H est unique et dépend d'une manière continue de la fonction initiale.*

5. La solution du problème (3) comme limite d'une suite de solutions de systèmes correspondants à argument fonctionnel. Soit une suite infinie A_{ij}^{ν}, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $\nu = 1, 2, \ldots$, de transformations de l'ensemble H en l'ensemble $G \cup H$. Nous admettons que les transformations A_{ij}^{ν} ont la propriété suivante: si $P = (t, X)$, $\widetilde{P} = (\widetilde{t}, \widetilde{X})$ et $\widetilde{P} = A_{ij}^{\nu}(P)$, on a $\widetilde{t} \leqslant t$.

Nous allons considérer la suite de systèmes d'équations différentielles

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_i(P)}{\partial t} = f_i\big(P, v_1(A_{i1}^{\nu}(P)), \ldots, v_m(A_{im}^{\nu}(P)), Q(v_i)\big), \quad P \in H, \\ & v_i(P) = \varphi_i(P), \quad P \in G, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ \nu = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3'}$$

les fonctions f_i et φ_i étant les mêmes que dans le système (3).

Supposons que la suite $\{v_1^\nu(P), \ldots, v_m^\nu(P)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, soit définie sur l'ensemble $G \cup H$ et que son $\varkappa$-ème terme, c'est-à-dire $\{v_1^\varkappa(P), \ldots \ldots, v_m^\varkappa(P)\}$, soit une solution du problème (3^ν) dans H, pour $\nu = \varkappa$. Soit enfin $\{u_1(P), \ldots, u_m(P)\}$ une solution du problème (3) dans l'ensemble H. Nous établirons le

THÉORÈME 2. *Si les hypothèses* 1°-5° *sont vérifiées et si les transformations A_{ij}^ν tendent uniformément dans H vers la transformation A_{ij}, la suite $\{v_1^\nu(P), \ldots, v_m^\nu(P)\}$ tend vers la solution $\{u_1(P), \ldots, u_m(P)\}$ presque uniformément dans l'ensemble H.*

Démonstration. L'hypothèse 3° et la définition des fonctions $u_i(P)$ et $v_i^\nu(P)$ entraînent l'inégalité

$$(23)\quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial[u_i(P)-v_i^\nu(P)]}{\partial t}\right| \\ &\leqslant \sigma_i\Big(t, \big|u_1\big(A_{i1}(P)\big)-v_1^\nu\big(A_{i1}^\nu(P)\big)\big|, \ldots, \big|u_m\big(A_{im}(P)\big)-v_m^\nu\big(A_{im}^\nu(P)\big)\big|\Big)+ \\ &\qquad\qquad + L\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial[u_k(P)-v_k^\nu(P)]}{\partial x_k}\right|, \end{aligned}$$

$$|u_i(P)-v_i^\nu(P)| \equiv 0 \quad \text{pour } P \in G\,,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots$$

Soit H^* l'ensemble des points $P = (t, X) \in H$ tels que $0 \leqslant t \leqslant t^*$, où t^* est un nombre quelconque fixé de l'intervalle $(0, a)$. Posons $\lambda^\nu = \max\limits_{i,j}\big[\max\limits_{H^*}\big\{\big|u_i\big(A_{ij}^\nu(P)\big)-u_i\big(A_{ij}(P)\big)\big|\big\}\big]$,

$$\tilde{w}_i^\nu(P) = |u_i(P)-v_i^\nu(P)|+\lambda^\nu, \qquad P \in G \cup H\,,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{W}_i^\nu(t) = \max_{X \in S_t}\{\tilde{w}_i^\nu(t, X)\}\,, \qquad t \in \langle p, t^*\rangle\,,$$

$$\tilde{\mathfrak{W}}_i^\nu(t) = \max_{(t,X)\in\Delta_t}\{\tilde{w}_i^\nu(t, X)\}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Pour $P \in G$ on a l'égalité

$$\tilde{w}_i^\nu(P) = |u_i(P)-v_i^\nu(P)|+\lambda^\nu = |\varphi_i(P)-\varphi_i(P)|+\lambda^\nu = \lambda^\nu\,,$$

d'où $\tilde{W}_i^\nu(t) = \lambda^\nu$ pour $t \in \langle p, 0\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

D'autre part, pour $P \in H$ on a l'inégalité

$$(24)\quad \begin{aligned} &\big|u_i\big(A_{ij}(P)\big)-v_i^\nu\big(A_{ij}^\nu(P)\big)\big| \\ &\qquad \leqslant \big|u_i\big(A_{ij}^\nu(P)\big)-v_i^\nu\big(A_{ij}^\nu(P)\big)\big|+\big|u_i\big(A_{ij}^\nu(P)\big)-u_i\big(A_{ij}(P)\big)\big| \\ &\qquad \leqslant \tilde{w}_i^\nu\big(A_{ij}^\nu(P)\big) \leqslant \tilde{\mathfrak{W}}_i^\nu(t) = \tilde{W}_i^\nu\big(\tau_i(t)\big)\,, \end{aligned}$$

où $\tau_i(t) \leqslant t$ (lemme 2).

Les inégalités (23) et (24) étant vérifiées et les fonctions étant monotones, on obtient l'inégalité

$$
(25)\qquad \begin{aligned} &D_{-}\widetilde{W}_i^{\nu}(t) \leqslant \sigma_i\big(t, \widetilde{W}_1^{\nu}(\tau_1(t)), \ldots, \widetilde{W}_m^{\nu}(\tau_m(t))\big), \qquad t \in \langle 0, t^* \rangle, \\ &\widetilde{W}_i^{\nu}(t) \leqslant \lambda^{\nu} \quad \text{pour } t \in \langle p, 0 \rangle, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; \nu = 1, 2, \ldots \end{aligned}
$$

En vertu des théorèmes correspondants de la théorie des inégalités différentielles (v. [2]), l'inégalité (25) entraîne pour les fonctions $\widetilde{W}_i^{\nu}(t)$ la limitation

$$
(26)\qquad \widetilde{W}_i^{\nu}(t) \leqslant w_i^{\nu}(t), \qquad t \in \langle 0, t^* \rangle, \; i = 1, 2, \ldots, m,
$$

où $\{w_1^{\nu}(t), w_2^{\nu}(t), \ldots, w_m^{\nu}(t)\}$ est l'intégrale supérieure à droite du système

$$
y_i'(t) = \sigma_i\big(t, y_1(t), \ldots, y_m(t)\big), \qquad t \in \langle 0, t^* \rangle, \; i = 1, 2, \ldots, m,
$$

avec la condition initiale $y_i(0) = \lambda^{\nu}$.

Comme la suite $A_{ij}^{\nu}(P)$ est, par hypothèse, uniformément convergente vers la fonction $A_{ij}(P)$ sur l'ensemble H^*, on a $\lim_{\nu\to\infty} \lambda^{\nu} = 0$, d'où il résulte, à cause des propriétés 3°, 4° et 5° des fonctions σ_i, que la suite $w_i^{\nu}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, converge uniformément vers zéro dans l'intervalle $\langle 0, t^* \rangle$. En tenant compte de ce fait, de l'inégalité (26) et de la définition des fonctions $\widetilde{W}_i^{\nu}(t)$, on obtient finalement la conclusion du théorème 2.

6. Remarques en rapport avec le théorème 2. Si dans l'équation (3$^{\nu}$) on pose A_{ij}^{ν}: $\Big\{(t, X) \to \Big(t - \frac{1}{\nu}, X\Big)\Big\}$, le système (3$^{\nu}$) prendra la forme

$$
(\ast)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial v_i(t, X)}{\partial t} = f_i\Big(t, X, v_i\Big(t - \frac{1}{\nu}, X\Big), \ldots, v_m\Big(t - \frac{1}{\nu}, X\Big), Q(v_i)\Big), \qquad (t, X) \in H. \\ &v_i(t, X) = \varphi_i(t, X), \qquad (t, X) \in G, \; i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}
$$

Si ν est fixé, c'est un système d'équations à retard constant $1/\nu$ et, sur les tranches correspondantes de la pyramide H, il se décompose en m équations indépendantes, ne contenant que les dérivées de la fonction inconnue. Donc, si le système (3) est quasi-linéaire ou presque-linéaire, le système $(\ast)$ est un système linéaire sur des tranches convenables de la pyramide H.

Le théorème 2 affirme que si ν est suffisamment grand, la solution du problème $(\ast)$ diffère peu dans l'ensemble H de celle du problème (3). Dans les cas particuliers où il est possible de déterminer effectivement le nombre λ^{ν} et les fonctions $w_i^{\nu}(t)$, le théorème 2 peut être utile pour la recherche d'une solution approchée du problème (3).

Dans la démonstration du théorème 2, plus précisément dans celle de la convergence de la suite $\{v_1^\nu(P), \ldots, v_m^\nu(P)\}$, nous avons profité explicitement de l'hypothèse que le problème (3) admet une solution dans l'ensemble H. En renforçant convenablement les hypothèses sur le système (✻), nous allons démontrer que la suite $\{v_1^\nu(P), \ldots, v_m^\nu(P)\}$ converge dans l'ensemble H indépendamment de l'existence d'une solution du problème (3). La limite de cette suite pourra être considérée comme une solution généralisée du problème (3) dans l'ensemble H. Cette remarque permet d'énoncer le

THÉORÈME 3. *Supposons que le système* (✻) *vérifie, outre les hypothèses* 1°-5°, *encore l'hypothèse suivante:*

6° *Les fonctions $f_i(P, U, Q)$ sont bornées sur tout sous-ensemble $H^* \times U^* \times Q$ de l'ensemble D_i, où H^* est l'ensemble des points $(t, X) \in H$ tels que $t \leqslant t^*$, $t^* \in \langle 0, a)$, U^* est un ensemble fermé de l'espace E^m, enfin Q est un ensemble quelconque de l'espace E^n.*

Dans ces conditions, la suite $\{v_1^\nu(P), \ldots, v_m^\nu(P)\}$ de solutions du problème (✻) *dans H, solutions de classe C^1, converge dans la pyramide H presque uniformément.*

Démonstration. Si dans la démonstration du théorème 2 on remplace les fonctions $\{u_1(P), \ldots, u_m(P)\}$ par $\{v_1^1(P), \ldots, v_m^1(P)\}$, on constate que la suite $\{v_1^\nu(P), \ldots, v_m^\nu(P)\}$ est bornée dans son ensemble sur l'ensemble H^*. De l'hypothèse 6° et du fait que les termes de cette suite vérifient l'équation (✻) il résulte que les fonctions $\{v_1^\nu(P), \ldots, v_m^\nu(P)\}$ sont équicontinues par rapport à la variable t et uniformément convergentes par rapport à la variable X dans l'ensemble H^*; plus précisément on a l'inégalité

$$(✻✻)\qquad \begin{gathered} |v_i^\nu(\bar{t}, X) - v_i^\nu(\bar{\bar{t}}, X)| \leqslant K|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|; \\ (\bar{t}, X), (\bar{\bar{t}}, X) \in H^*,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, \end{gathered}$$

où K est une constante. En prenant deux termes quelconques $\{v_1^\nu(P), \ldots \ldots, v_m^\nu(P)\}$ et $\{v_1^\mu(P), \ldots, v_m^\mu(P)\}$ de la suite des solutions du système (✻) on obtient pour les fonctions $v_i^\nu(P)$ et $v_i^\mu(P)$ l'inégalité

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial[v_i^\nu(P) - v_i^\mu(P)]}{\partial t}\right| \\ &\leqslant \sigma_i\left(t, \left|v_1^\nu\left(t-\frac{1}{\nu}, X\right) - v_1^\mu\left(t-\frac{1}{\mu}, X\right)\right|, \ldots, \left|v_m^\nu\left(t-\frac{1}{\nu}, X\right) - v_m^\mu\left(t-\frac{1}{\mu}, X\right)\right|\right) + \\ &\qquad\qquad + L\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial[v_k^\nu(P) - v_k^\mu(P)]}{\partial x_k}\right|, \qquad P \in H\,. \\ &\qquad |v_i^\nu(P) - v_i^\mu(P)| = 0 \qquad \text{pour } P \in G\,,\ i = 1, 2, \ldots, m\,. \end{aligned}$$

En posant $M_i^{\nu\mu}(t) = \max_{X \in S_t} |v_i^\nu(t, X) - v_i^\mu(t, X)|$

$$\lambda^{\nu\mu} = \max_{H^*} \left| v_i^\nu\left(t - \frac{1}{\nu}, X\right) - v_i^\nu\left(t - \frac{1}{\mu}, X\right) \right|$$

et en appliquant le lemme 1, on déduit de l'inégalité (27) la limitation suivante pour les fonctions $M_i^{\nu\mu}(t)$:

$$M_i^{\nu\mu}(t) \leqslant \eta_i^{\mu\nu}(t), \quad t \in \langle 0, t \rangle, \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{28}$$

où $\{\eta_1^{\nu\mu}(t), \ldots, \eta_m^{\nu\mu}(t)\}$ est l'intégrale supérieure à droite du système

$$y_i'(t) = \sigma_i\big(t, y_1(t), \ldots, y_m(t)\big), \quad t \in \langle 0, a), \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

avec la condition initiale $y_i(0) = \lambda^{\nu\mu}$. Comme $\lim_{\nu,\mu \to \infty} \lambda^{\nu\mu} = 0$, la suite $\{\eta_1^{\nu\mu}(t), \ldots$ $\ldots, \eta_m^{\nu\mu}(t)\}$ converge presque uniformément vers zéro dans l'intervalle $\langle 0, a)$ lorsque $\nu, \mu \to \infty$. En tenant compte de l'inégalité (28) et de la définition des fonctions $M_i^{\nu\mu}(t)$, on constate que la suite $\{v_1^\nu(P), \ldots, v_m^\nu(P)\}$ satisfait dans l'ensemble H^* à la condition de convergence uniforme de Cauchy et la démonstration du théorème 3 est ainsi achevée.

Travaux cités

[1] J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

[2] K. Zima, *Sur un système d'équations différentielles avec dérivée à gauche*, ce fascicule, pp. 37-47.

[3] — *O jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego dla równań różniczkowych z przesuniętym argumentem*, Zeszyty Naukowe WSP, Katowice, Sekcja Matematyczna, Nr 5.

Reçu par la Rédaction le 1. 8. 1967