COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLIII 1980 FASC. 1

ISOMETRIEN DES KONVEXRINGES

VON

PETER M. GRUBER (WIEN)

1. Einleitung. Es sei $\mathfrak{R}$ der Konvexring im $\boldsymbol{R}^d$, ausgestattet mit der Hausdorff-Metrik. Im folgenden werden die Isometrien von $\mathfrak{R}$ auf sich bestimmt, ferner gewisse Isometrien in sich.

$\boldsymbol{R}^d$ bezeichne den d-dimensionalen euklidischen Raum ($d \geqslant 1$) und E seine Einheitskugel. Für $A, B \subset \boldsymbol{R}^d$ und $\lambda \in \boldsymbol{R}$ sei

$$A+B := \{x+y \mid x \in A,\ y \in B\} \quad \text{und} \quad \lambda A := \{\lambda x \mid x \in A\}.$$

Auf der Menge $\mathfrak{K}$ der nichtleeren kompakten Teilmengen des $\boldsymbol{R}^d$ kann man eine Metrik δ in folgender Weise definieren:

Für $A, B \in \mathfrak{K}$ sei

$$\delta(A, B) := \inf\{\lambda \in \boldsymbol{R}^+ \mid A \subset B+\lambda E, B \subset A+\lambda E\}$$
$$= \max\{\sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \|x-y\|, \sup_{x\in B} \inf_{y\in A} \|x-y\|\}.$$

δ heißt die *Hausdorff-Metrik* auf $\mathfrak{K}$ (s. [4], S. 293). Neben $\mathfrak{K}$ betrachten wir die Menge $\mathfrak{C}$ der nichtleeren kompakten und konvexen Teilmengen des $\boldsymbol{R}^d$, also der (eigentlichen und uneigentlichen) *konvexen Körper* und die Menge $\mathfrak{R}$ der nichtleeren, endlichen Vereinigungen von konvexen Körpern. $\mathfrak{R}$ heißt der *Konvexring* im $\boldsymbol{R}^d$ (s. [3], S. 236).

Unter den zahlreichen Aussagen über $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ gibt es relativ wenige, die sich mit den metrischen Räumen $\langle\mathfrak{C}, \delta\rangle$, $\langle\mathfrak{R}, \delta\rangle$, $\langle\mathfrak{K}, \delta\rangle$ befassen. Vielfach wird nur die Topologie betrachtet, welche durch δ erzeugt wird. Schneider hat in [5] die Frage nach den Isometrien dieser Räume angeschnitten. Er hat für $d \geqslant 2$ gezeigt, daß es zu jeder Isometrie I von $\langle\mathfrak{C}, \delta\rangle$ auf sich eine Isometrie i des $\boldsymbol{R}^d$ auf sich gibt, sodaß für alle $C \in \mathfrak{C}$ gilt $I(C) = i(C)$. I wird also durch i erzeugt. Die Umkehrung ist klar.

Im zweiten Abschnitt werden die Isometrien von $\langle\mathfrak{C}, \delta\rangle$, $\langle\mathfrak{R}, \delta\rangle$, $\langle\mathfrak{K}, \delta\rangle$ in sich bestimmt, die wenigstens einen Punkt in einen Punkt überführen.

Die Isometrien von $\langle\mathfrak{R}, \delta\rangle$ auf sich werden im dritten Abschnitt angegeben. Dabei werden wir auch den von Schneider nicht behandelten Fall $d = 1$ bei den Isometrien von $\langle\mathfrak{C}, \delta\rangle$ auf sich betrachten.

$\|\cdot\|$ und $\perp$ bezeichnen die Norm und die Orthogonalitätsrelation im $\boldsymbol{R}^d$. Für $A \subset \boldsymbol{R}^d$ seien $\operatorname{bd} A$, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{aff} A$ und $\operatorname{conv} A$ der Rand, das Innere, die affine und die konvexe Hülle von A. $\operatorname{aff}_o A$ sei das Translat von $\operatorname{aff} A$ durch den Ursprung o. Ist $A \in \mathfrak{C}$, dann bezeichnet $\dim A$ die Dimension von A. Für $p \in \boldsymbol{R}^d$ wird statt $\{p\}$ auch einfach p geschrieben.

2. Spezielle Isometrien von $\langle\mathfrak{C}, \delta\rangle$, $\langle\mathfrak{R}, \delta\rangle$ und $\langle\mathfrak{K}, \delta\rangle$ in sich.

Satz 1. *Die Isometrien von $\langle\mathfrak{C}, \delta\rangle$, $\langle\mathfrak{R}, \delta\rangle$ und $\langle\mathfrak{K}, \delta\rangle$ in sich, die mindestens einen Punkt wieder in einen Punkt überführen, sind genau die Abbildungen, welche durch die Isometrien des $\boldsymbol{R}^d$ auf sich erzeugt werden.*

Beweis. Die Beweise für $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{R}$ ergeben sich aus dem für $\mathfrak{K}$ durch naheliegende Vereinfachungen. Wir betrachten daher nur den Fall $\mathfrak{K}$.

Jede Isometrie des $\boldsymbol{R}^d$ auf sich erzeugt offenbar eine Isometrie von $\langle\mathfrak{K}, \delta\rangle$ auf sich, die Punkte in Punkte überführt.

I sei nun eine Isometrie von $\langle\mathfrak{K}, \delta\rangle$ in sich, die mindestens einen Punkt in einen Punkt überführt. Wir zeigen

(1) $\quad M := \{p \in \boldsymbol{R}^d \mid I(p) \text{ ist nicht einpunktig}\}$ ist konvex.

Andernfalls kann man $p, q \in M$ und $r \in \operatorname{conv}\{p, q\}$ so wählen, daß $r \notin M$ gilt. $I(r)$ ist also einpunktig, etwa gleich $\{s\}$. Da I eine Isometrie ist, folgt aus $I(r) = s$

(2) $$I(p) \subset s + \|p-r\| E,$$

(3) $$I(q) \subset s + \|q-r\| E.$$

Wegen $p \in M$ enthält $I(p)$ mehr als einen Punkt. Aus (2) ergibt sich daher $I(p) + \lambda E \supset s + \|q-r\| E$ für ein passendes $\lambda \in [0, \|p-r\| + \|q-r\|[$. Daraus, aus (3) und da wegen $r \in \operatorname{conv}\{p, q\}$ jedenfalls $\|p-r\| + \|q-r\| = \|p-q\| = \delta(p, q)$ ist, folgt

(4) $\quad I(p) + \lambda E \supset I(q) \quad$ für ein passendes $\lambda \in [0, \delta(p, q)[$.

Auf analoge Weise zeigt man

(4′) $\quad I(q) + \mu E \supset I(p) \quad$ für ein passendes $\mu \in [0, \delta(p, q)[$.

Die Aussagen (4) und (4′) zusammen zeigen, daß $\delta(I(p), I(q)) < \delta(p, q)$. Widerspruch. Damit ist (1) bewiesen.

Wir zeigen nun

(5) $$M = \emptyset.$$

Jeder Punkt von $\boldsymbol{R}^d \setminus M$ wird durch I wieder auf einen Punkt des $\boldsymbol{R}^d$ abgebildet, wobei die Abstände invariant bleiben. Daher gibt es jedenfalls eine Isometrie i des $\boldsymbol{R}^d$ auf sich, sodaß J, definiert durch $J(A) := i^{-1}(I(A))$ für $A \in K$, eine Isometrie von $\langle \mathfrak{K}, \delta \rangle$ in sich ist, die jeden Punkt von $\boldsymbol{R}^d \setminus M$ fest läßt. Da I mindestens einen Punkt wieder auf einen Punkt abbildet, ist $M \neq \boldsymbol{R}^d$. Ferner ist M wegen (1) konvex. Wir können also einen abgeschlossenen Halbraum $H \subset \boldsymbol{R}^d \setminus M$ wählen. n sei ein nach innen weisender Normaleneinheitsvektor von H. Angenommen, (5) ist falsch. Dann sei $p \in M$ gewählt. J ist eine Isometrie von $\langle \mathfrak{K}, \delta \rangle$, die jeden Punkt von $\boldsymbol{R}^d \setminus M$ und damit auch von H fest läßt. Es folgt $J(p) \subset q + \|p-q\| E$ für alle $q \in H$. $J(p)$ liegt also auf dem von p in Richtung n auslaufenden Halbstrahl. Wegen $p \in M$ ist $I(p)$ und damit auch $J(p)$ nicht einpunktig. Außerdem ist mit $I(p)$ auch $J(p)$ kompakt. Es gibt also Zahlen λ, $\mu \in \boldsymbol{R}^+ \cup \{0\}$, $\lambda < \mu$, mit

$$\{p+\lambda n,\ p+\mu n\} \subset J(p) \subset \operatorname{conv}\{p+\lambda n,\ p+\mu n\}. \tag{6}$$

Es sei nun $\nu \in\ ]\mu-\lambda,\ +\infty[$ so groß gewählt, daß

$$A := \operatorname{conv}\{p+(\lambda+\nu)n,\ p+(\mu+\nu)n\} \subset H$$

ist. J ist eine Isometrie von $\langle \mathfrak{K}, \delta \rangle$, die jeden Punkt von H fest läßt. Damit gilt

$$J(A) \subset q+\delta(q,A)E \quad \text{und} \quad q \subset J(A)+\delta(q,A)E \quad \text{für alle } q \in H.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\{p+(\lambda+\nu)n,\ p+(\mu+\nu)n\} &\subset J(A) \\ &\subset A = \operatorname{conv}\{p+(\lambda+\nu)n,\ p+(\lambda+\nu)n\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Wegen

$$\operatorname{conv}\{p+\lambda n,\ p+\mu n\} \cap \operatorname{conv}\{p+(\lambda+\nu)n,\ p+(\lambda+\nu)n\} = \emptyset$$

$(\nu \in\ ]\mu-\lambda,\ +\infty[\,!)$, (6) und (7) ist

$$\nu \geqslant \delta(J(p), J(A)) = \delta(p, A) = \mu+\nu > \nu.$$

Widerspruch. Damit ist (5) bewiesen.

Nach (1), (5) und der Definition von $J(=i^{-1}I)$ ist also J eine Isometrie von $\langle \mathfrak{K}, \delta \rangle$, die jeden Punkt des $\boldsymbol{R}^d$ in sich überführt. Nun gilt folgendes:

(8) Es sei $A \in \mathfrak{K}$. Dann ist $\operatorname{conv} A = \operatorname{conv} J(A)$.

Ist $p+\lambda E$, $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$, eine Kugel im $\boldsymbol{R}^d$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$A \subset p+\lambda E, \quad \delta(A,p) \leqslant \lambda, \quad \delta(J(A), J(p)=p) \leqslant \lambda, \quad J(A) \subset p+\lambda E.$$

A und $J(A)$ liegen also in denselben Kugeln des $\boldsymbol{R}^d$. Daraus folgt (8). Da eine kompakte Menge die extremen Punkte ihrer konvexen Hülle enthält, ergibt sich aus (8) folgende Aussage:

(9) Es sei $A \in \mathfrak{K}$. Dann enthält $J(A)$ die extremen Punkte von $\operatorname{conv} A$.

Wir zeigen nun folgendes:

(10) Es sei $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$ und $p+S$ sei eine endliche, nichtleere Teilmenge von $p+\operatorname{bd}\lambda E$. Dann ist $p+S = J(p+S)$.

Wegen (8) und (9) ist

$$J(p+S) \subset p+\lambda E, \quad J(p+S)\cap(p+\operatorname{bd}\lambda E) = p+S. \tag{11}$$

Nun gilt

$$J(p+S)\cap(p+\operatorname{int}\lambda E) = \emptyset. \tag{12}$$

Andernfalls gibt es einen Punkt $p+q \in J(p+S)\cap\operatorname{int}(p+\lambda E)$. Es sei $\mu := (\lambda - \|q\|)/2$. Wegen $\mu \leqslant \lambda/2$ ist $\operatorname{bd}\mu E+(\lambda-\mu)E = \lambda E$. Daraus und aus (11) folgt

$$p+\operatorname{bd}\mu E+(\lambda-\mu)E = p+\lambda E \supset J(p+S). \tag{13}$$

Andererseits folgt aus $\|q\| = \lambda-2\mu$ und $q \in J(p+S)$

$$J(p+S)+(\lambda-\mu)E \supset p+q+(\lambda-\mu)E \supset p+\mu E. \tag{13'}$$

Nach (8) und (9) ist $p+\operatorname{bd}\mu E \subset J(p+\mu E) \subset p+\mu E$. Daraus und aus den Aussagen (13) und (13') folgt

$$\delta\big(J(p+S),\, J(p+\mu E)\big) \leqslant \lambda-\mu.$$

Wegen $p+S \subset p+\operatorname{bd}\lambda E$, $p \in p+\mu E$ und $\mu < \lambda$ ist

$$\delta(p+S,\, p+\mu E) = \lambda.$$

Widerspruch zur Isometrie-Eigenschaft von J. Damit gilt (12). Aus (11) und (12) folgt (10). Die nächste Aussage lautet folgendermaßen:

(14) Es sei $A \in \mathfrak{K}$. Dann ist $A \subset J(A)$.

Angenommen, $A \not\subset J(A)$. Es sei $p \in A\setminus J(A)$. Wegen der Kompaktheit von $J(A)$ ist

$$\mu := \inf\{\|x\| \mid p+x \in J(A)\}/2 > 0. \tag{15}$$

$\{p+x+(\|x\|-\mu)\operatorname{int}E \mid p+x \in J(A)\}$ ist daher eine offene Überdeckung von $J(A)$. Da $J(A)$ kompakt ist, kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen, etwa $\{p+x_k+(\|x_k\|-\mu)\operatorname{int}E \mid k \in \{1,\ldots,n\}\}$. Für $\nu \in [1, +\infty[$ und $k = \{1,\ldots,n\}$ gilt offenbar

$$x_k+(\|x_k\|-\mu)\operatorname{int}E \subset \nu x_k+(\|\nu x_k\|-\mu)\operatorname{int}E.$$

Wählt man nun $\nu_1, \ldots, \nu_n \in [1, +\infty[$ so, daß $\|\nu_1 x_1\| = \ldots = \|\nu_n x_n\| =: \lambda$ gilt, dann ist, wenn wir noch $y_1 := \nu_1 x_1, \ldots, y_n := \nu_n x_n$ setzen, offensichtlich $\{p + y_k + (\lambda - \mu)\operatorname{int} E \mid k \in \{1, \ldots, n\}\}$ eine Überdeckung von $J(A)$. Ist $S := \{y_1, \ldots, y_n\}$ ($\subset \operatorname{bd} \lambda E$), so folgt jedenfalls

(16) $$p + S + (\lambda - \mu)E \supset J(A).$$

Andererseits ergibt sich aus der Definition (15) von μ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ offenbar $\|x_k\| \geqslant 2\mu$. Daraus und aus $y_k = \nu_k x_k$ mit $\nu_k \in [1, +\infty[$ folgt $\|y_k - x_k\| = \|y_k\| - \|x_k\| \leqslant \lambda - 2\mu$, d.h.

(16′) $$p + S \subset J(A) + (\lambda - 2\mu)E.$$

Nach (10) ist $p + S = J(p + S)$. Das, zusammen mit den Aussagen (16) und (16′), zeigt, daß $\delta(J(p+S), J(A)) \leqslant \lambda - \mu$. Wegen $p \in A$ und $p + S \subset p + \operatorname{bd} \lambda E$ ist jedenfalls $\delta(p + S, A) \geqslant \lambda$. Widerspruch zur Isometrie-Eigenschaft von J. Damit ist (14) bewiesen. Durch Vertauschung der Rollen von A und $J(A)$ kommt man nach einem ganz analogen Beweis zu folgender Aussage:

(17) Es sei $A \in \mathfrak{K}$. Dann ist $J(A) \subset A$.

Aus (14) und (17) folgt $J(A) = A$ für alle $A \in \mathfrak{K}$. Wegen $J = i^{-1}I$ ergibt sich daraus $I(A) = i(A)$ für alle $A \in \mathfrak{K}$. I wird also durch die Isometrie i des $\boldsymbol{R}^d$ erzeugt.

Damit ist der Satz bewiesen.

3. Die Isometrien von $\langle \mathfrak{R}, \delta \rangle$ auf sich.

Satz 2. *Die Isometrien von $\langle \mathfrak{C}, \delta \rangle$ und $\langle \mathfrak{R}, \delta \rangle$ auf sich sind genau die Abbildungen, welche durch die Isometrien des $\boldsymbol{R}^d$ auf sich erzeugt werden.*

Beweis. Der Beweis für $\mathfrak{C}$ ergibt sich aus dem für $\mathfrak{R}$ durch auf der Hand liegende Vereinfachungen. Wir gehen daher nicht näher darauf ein.

Jede Isometrie des $\boldsymbol{R}^d$ auf sich erzeugt eine Isometrie von $\langle \mathfrak{R}, \delta \rangle$ auf sich.

Es sei nun I eine Isometrie von $\langle \mathfrak{R}, \delta \rangle$ auf sich. Wir zeigen zunächst folgende Aussage:

(1) Es sei $p, q \in \boldsymbol{R}^d$, $p \neq q$. Dann ist $I(p) \subset \operatorname{bd}(I(q) + \|p - q\|E)$.

Angenommen, $I(p) \not\subset \operatorname{bd}(I(q) + \|p - q\|E)$. Da wegen $\delta(I(p), I(q)) = \delta(p, q) = \|p - q\|$ jedenfalls $I(p) \subset I(q) + \|p - q\|E$ gilt, muß

$$I(p) \cap \operatorname{int}(I(q) + \|p - q\|E) \neq \emptyset$$

sein. Für $\lambda := \|p - q\|/2$ ist daher

(2) $$A := (I(p) + \lambda E) \cap (I(q) + \lambda E) \in \mathfrak{R}, \qquad \operatorname{int} A \neq \emptyset.$$

Wir zeigen

(3) $$I(p) \subset A + \lambda E, \qquad I(q) \subset A + \lambda E.$$

Es sei $x \in I(p)$. Aus $\delta(I(p), I(q)) = \|p-q\| = 2\lambda$ folgt $I(p) \subset I(q) + 2\lambda E$. Zu x gibt es also $y \in I(q)$, $z \in E$ mit $x = y + 2\lambda z$. Daraus ergibt sich

$$x + \lambda(-z) = y + \lambda z \in (I(p) + \lambda E) \cap (I(q) + \lambda E) = A$$

und somit $x \in A + \lambda z \subset A + \lambda E$. Damit ist die erste Inklusion in (3) bewiesen. Die zweite ergibt sich auf analoge Weise. Die Aussage

$$A \subset I(p) + \lambda E, \qquad A \subset I(q) + \lambda E \tag{4}$$

folgt unmittelbar aus (2). Aus (3) und (4) folgt

$$\delta(I(p), A),\ \delta(A, I(q)) \leqslant \lambda.$$

Wegen $\delta(I(p), I(q)) = \|p-q\| = 2\lambda$ ergibt sich daraus wegen der Dreiecksungleichung

$$\delta(I(p), A) = \delta(A, I(q)) = \lambda. \tag{5}$$

Nach (2) ist $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. Wir schneiden nun aus A einen offenen Würfel heraus, der ganz in $\operatorname{int} A$ liegt und einen Durchmesser $< \lambda$ hat. Für den verbleibenden Bereich $B \subsetneqq A$ gilt $B \in \mathfrak{R}$ und $B + \lambda E = A + \lambda E$, d.h. (3) und (4) gelten auch, wenn man A durch B ersetzt. Daher ergibt sich auf genau dieselbe Weise wie (5) die Aussage

$$\delta(I(p), B) = \delta(B, I(q)) = \lambda. \tag{6}$$

Da I surjektiv ist, gilt $A = I(C)$, $B = I(D)$ für passende $C, D \in \mathfrak{R}$. Wegen $A \neq B$ ist $C \neq D$. Da I eine Isometrie ist, folgt aus (5) und (6)

$$\delta(p, C) = \delta(C, q) = \delta(p, D) = \delta(D, q) = \lambda = \|p-q\|/2.$$

Wegen der Definition von δ gilt daher $C, D \subset (p + \lambda E) \cap (q + \lambda E) = (p+q)/2$, also $C = D = (p+q)/2$. Widerspruch zu $C \neq D$. Damit ist (1) bewiesen.

Die nächste Aussage lautet wie folgt:

(7) Es sei $C \in \mathfrak{C}$, $\dim C < d$ und $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$. Dann haben alle echten Seiten von $C + \lambda E$ eine Dimension $\leqslant \dim C$. Die $\dim C$-dimensionalen Seiten haben die Form $C + \lambda e$ mit $e \in (\operatorname{aff}_0 C)^\perp \cap \operatorname{bd} E$.

Aus [2], S. 81, entnimmt man folgendes:

Die echten Seiten von $C + \lambda E$ sind genau die Mengen der Form $(C \cap H) + \lambda e$, wobei H eine Stützhyperebene von C ist und e ein Normaleneinheitsvektor von H, der in den (in einen) von C freien Halbraum weist. Es sei nun $(C \cap H) + \lambda e$ eine echte Seite von $C + \lambda E$. Ihre Dimension ist offenbar $\leqslant \dim C$. Gilt Gleichheit, so muß $C \subset H$, also auch $\operatorname{aff} C \subset H$ gelten, d.h. sie ist von der Form $C + \lambda e$ und es ist

$$e \in (\operatorname{aff}_0 H)^\perp \cap \operatorname{bd} E \subset (\operatorname{aff}_0 C)^\perp \cap \operatorname{bd} E.$$

Damit gilt (7).

Wir zeigen nun folgendes:

(8) Es sei $B, C \in \mathfrak{C}$, $N := (\text{aff}_o B)^\perp$ und $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$. Ferner gelte

$$B \cap \text{int}(C + \lambda E) = \emptyset, \quad B' := B \cap \text{bd}(C + \lambda E) \in \mathfrak{C}$$

und

$$\dim B = \dim B' \geqslant \dim C.$$

Dann sind aff$B$, aff$C$ Translate voneinander. Ist $b \in B'$, dann sind $(b+N) \cap B$ $(= b)$ und $(b+N) \cap C$ zwei Punkte mit dem Abstand λ.

Es ist $\dim C \leqslant \dim B' < d$. Nach (7) haben die echten Seiten von $C + \lambda E$ eine Dimension $\leqslant \dim C$ und Gleichheit gilt für die Seiten der Form $C + \lambda e$ mit $e \in (\text{aff}_o C)^\perp \cap \text{bd} E$. B' hat die Dimension $\dim B$ und liegt in einer echten Seite von $C + \lambda E$. Es folgt $\dim B = \dim C$ und diese Seite ist von der Form $C + \lambda e$ mit $e \in (\text{aff}_o C)^\perp \cap \text{bd} E$ passend. Ferner gilt

$$\text{aff}\, B = \text{aff}\, B' = \text{aff}(C + \lambda e).$$

aff$B$ und aff$C$ sind also Translate voneinander. Es folgt $N = (\text{aff}_o B)^\perp = (\text{aff}_o C)^\perp$. Daher gilt für jedes $b \in B'$ wegen $B' \subset B$ jedenfalls $(b+N) \cap B = b$ und wegen $B' \subset C + \lambda e$ auch $(b+N) \cap C = b - \lambda e$. Somit ist (8) bewiesen.

Es sei nun $A \in \mathfrak{C}$ ein Körper maximaler Dimension, sodaß A in der Bildmenge eines Punktes des $\boldsymbol{R}^d$ liegt, etwa $A \subset I(r)$. Ferner sei $N := (\text{aff}_o A)^\perp$ und a sei ein fester Punkt in A.

Für jedes $p \in \boldsymbol{R}^d$ ist $I(p)$ die Vereinigung von endlich vielen konvexen Körpern der Dimension $\leqslant \dim A$. Wir halten eine solche Darstellung von $I(p)$ fest, etwa

$$I(p) = B_1 \cup \ldots \cup B_l \cup \ldots \cup B_m.$$

Dabei seien B_i $(i \leqslant l)$ die Körper mit $\text{aff}_o B_i = \text{aff}_o A$ $(l \geqslant 0)$. Man sieht leicht, daß $B_1 \cup \ldots \cup B_l$ unabhängig von der speziellen Darstellung von $I(p)$ ist. Das wird aber im folgenden nicht benötigt. Wir definieren

$$J(p) := (a+N) \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_l).$$

Nun gilt folgendes:

(9) Es sei $p \in \boldsymbol{R}^d$. Dann ist $J(p)$ endlich.

Wegen $\text{aff}_o B_i = \text{aff}_o A$ für $i \in \{1, \ldots, l\}$ ist

$$N = (\text{aff}_o A)^\perp = (\text{aff}_o B_i)^\perp.$$

$a + N$ hat also mit B_i höchstens einen Punkt gemeinsam. Aus

$$J(p) = \big((a+N) \cap B_1\big) \cup \ldots \cup \big((a+N) \cap B_l\big)$$

ergibt sich nun (9).

Die nächste Aussage lautet wie folgt:

(10) Es sei $p, q \in \boldsymbol{R}^d$. Dann gilt für alle $b \in J(p)$, $d \in J(q)$ die Ungleichung $\|b-d\| \geqslant \|p-q\|$.

Wegen $J(p) \subset I(p)$, $J(q) \subset I(q)$ und (1) ist

$$J(p) \cap \operatorname{int}\big(J(q)+\|p-q\|E\big) = \emptyset.$$

Daraus folgt (10). Nun gilt folgendes:

(11) Es sei $p, q \in \boldsymbol{R}^d$ und $b \in J(p)$. Dann gibt es ein $c \in J(q)$ mit $\|b-c\| = \|p-q\|$, während für alle anderen $d \in J(q)$ gilt $\|b-d\| > \|p-q\|$.

Es sei $I(q) = C_1 \cup \ldots \cup C_n \cup \ldots \cup C_p$, wobei genau für $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\operatorname{aff}_o C_j = \operatorname{aff}_o A$ $(n \geqslant 0)$ gilt. $i \in \{1, \ldots, l\}$ sei so gewählt, daß $b \in (a+N) \cap B_i$ gilt. Dann ist jedenfalls

(12) $$a+N = b+N.$$

Aus (1) folgt

$$B_i \subset I(p) \subset \operatorname{bd}\big(I(q)+\|p-q\|E\big) \subset \bigcup_1^p \operatorname{bd}(C_j+\|p-q\|E)$$

und daraus jedenfalls

$$B_i \cap \operatorname{int}(C_j+\|p-q\|E) = \emptyset \qquad \text{für } j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Die Teilmenge B_i wird also durch die endlich vielen konvexen Körper $B_i \cap \operatorname{bd}(C_j+\|p-q\|E)$ $(j \leqslant p)$ überdeckt. Zur Überdeckung von B_i reichen schon die Körper der Dimension $\dim B_i$ $(= \dim A)$ aus. Es sei $B_i \cap \operatorname{bd}(C_j+\|p-q\|E)$ von der Dimension $\dim B_i$. Da $B_i \cap \operatorname{int}(C_j+\|p-q\|E) = \emptyset$, $\dim B_i' = \dim A \geqslant \dim C_j$ (nach Definition von A) und wegen $i \in \{1, \ldots, l\}$ und (8) ist $\operatorname{aff}_o B_i = \operatorname{aff}_o A = \operatorname{aff}_o C_j$, also $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ferner sind $(b+N) \cap B_i = b$ und $(b+N) \cap C_j =: c$ zwei Punkte mit dem Abstand $\|p-q\|$. Aus $c = (b+N) \cap C_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, (12) und der Definition von J folgt $c \in J(q)$. Damit ist der erste Teil von (11) bewiesen. Wegen (10) gilt für alle $d \in J(q)$ jedenfalls $\|b-d\| \geqslant \|p-q\|$. Angenommen, neben c gibt es noch einen weiteren Punkt $d \in J(q)$ mit $\|b-c\| = \|b-d\| = \|p-q\|$. Es sei $s := p-(q-p)$. Dann ist $\|s-p\| = \|p-q\|$. Wendet man den ersten Teil von (11) auf p, s, b statt auf p, q, b an, so sieht man, daß es ein $e \in J(s)$ gibt mit $\|b-e\| = \|p-s\|$. Aus $\|b-c\| = \|b-d\| = \|p-q\|$, $c \neq d$ folgt daher

$$\|e-c\|, \|e-d\| \leqslant 2\|p-q\| = \|s-q\|,$$

wobei in mindestens einem Fall das Kleinerzeichen gilt. Das ist aber ein Widerspruch zu (10), angewendet auf s, q statt auf p, q. Damit ist auch der zweite Teil von (11) bewiesen.

Wir schreiben nun statt a auch $i(r)$. Für $p \in \boldsymbol{R}^d$ sei $i(p)$ der — nach (11) eindeutig bestimmte — Punkt aus $J(p)$ mit $\|i(p)-i(r)\| = \|p-r\|$.

Die so erhaltene Abbildung

(13) $i\colon \boldsymbol{R}^d \to a+N$ ist stetig.

Dazu seien

(14) $$p_0, p_1, \ldots \in \boldsymbol{R}^d \quad \text{mit } p_0 = \lim p_n$$

gewählt. Nach Definition von i ist

(15) $$\|p_0 - r\| = (\lim \|p_n - r\| =) \lim \|i(p_n) - i(r)\|.$$

Die Folge $i(p_1), \ldots$ ist also beschränkt. s sei einer ihrer Häufungspunkte und es gelte etwa

(16) $$s = \lim i(p_{n_k}).$$

Wegen (11) gibt es Punkte $b_1, b_2, \ldots \in J(p_0)$ mit $\|i(p_{n_1}) - b_1\| = \|p_{n_1} - p_0\|, \ldots$ Da $J(p_0)$ endlich ist, kann man nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge annehmen, daß $b_1 = \ldots = b \in J(p_0)$ ist, d.h. $\|i(p_{n_1}) - b\| = \|p_{n_1} - p_0\|, \ldots$ Daraus, aus (16) und (14), folgt $s = b \in J(p_0)$. Andererseits gilt wegen (15) und (16) die Gleichheit $\|s - i(r)\| = \|p_0 - r\|$. Aus der Definition von i ergibt sich daher $s = i(p_0)$. Da s ein beliebiger Häufungspunkt der beschränkten Folge $i(p_1), \ldots$ war, erhält man schließlich $i(p_0) = \lim i(p_n)$ und (13) ist bewiesen.

Wir zeigen nun, daß i eine Isometrie des $\boldsymbol{R}^d$ ist:

(17) Es sei $p, q \in \boldsymbol{R}^d$, $p \neq q$. Dann ist $\|i(p) - i(q)\| = \|p - q\|$.

Für $\lambda \in [0, 1]$ sei $q(\lambda) := (1-\lambda)r + \lambda q$. Ferner sei

$$\mu := \sup\{\lambda \in [0,1] \mid \|i(p) - i(q(\lambda))\| = \|p - q(\lambda)\|\}.$$

Weil $q(0) = r$ gilt und da nach Definition von i die Gleichheit $\|i(p) - i(r)\| = \|p - r\|$ besteht, ist $\mu \geqslant 0$. Wegen (13) wird μ angenommen, d.h. es ist

(18) $$\|i(p) - i(q(\mu))\| = \|p - q(\mu)\|.$$

Nach (9) ist $J(q(\mu))$ endlich. Wegen (11) gilt daher für ein passendes $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^+$

(19) $$\|i(p) - c\| \geqslant \|p - q(\mu)\| + 2\varepsilon \quad \text{für alle } c \in J(q(\mu)) \setminus \{i(q(\mu))\}.$$

Wir wählen ε so klein, daß die ε-Umgebungen der Punkte von $J(q(\mu))$ disjunkt sind. Angenommen, $\mu < 1$. Nach Definition von $q(\cdot)$ und (13) kann man ein $\lambda \in]\mu, 1]$ so nahe bei μ wählen, daß

(20) $$\|q(\lambda) - q(\mu)\| < \varepsilon, \quad \|i(q(\lambda)) - i(q(\mu))\| < \varepsilon$$

ist.

Aus $\|q(\lambda)-q(\mu)\| < \varepsilon$ folgt durch mehrfache Anwendung von (11), daß die Punkte von $J(q(\lambda))$ sich auf die disjunkten ε-Umgebungen der Punkte von $J(q(\mu))$ verteilen, wobei in jeder ε-Umgebung genau einer liegt. Speziell liegt nach (20) $i(q(\lambda))$ in der ε-Umgebung von $i(q(\mu))$. Daraus und aus (19) folgt

$$\|i(p)-d\| \geqslant \|p-q(\mu)\|+2\varepsilon-\varepsilon \quad \text{für alle } d \in J(q(\lambda)) \setminus \{i(q(\lambda))\}.$$

Andererseits ist wegen (18) und (20)

$$\|i(p)-i(q(\lambda))\| < \|p-q(\mu)\|+\varepsilon.$$

Unter allen Punkten von $J(q(\lambda))$ liegt also der Punkt $i(q(\lambda))$ dem Punkt $i(p) \in J(p)$ am nächsten. Wegen (11) muß also $\|i(p)-i(q(\lambda))\| = \|p-q(\lambda)\|$ sein. Wegen $\lambda \in \,]\mu, 1]$ ist das ein Widerspruch zur Definition von μ. Damit ist bewiesen, daß $\mu = 1$ gilt. Wegen $q(1) = q$ folgt aus (18) die Gleichheit $\|i(p)-i(q)\| = \|p-q\|$ und (17) ist bewiesen.

Nun gilt folgendes:

(21) Es sei $p \in \boldsymbol{R}^d$. Dann ist $I(p) = J(p)$.

Die Abbildung i: $\boldsymbol{R}^d \to a+N (\subset \boldsymbol{R}^d)$ ist nach (17) eine Isometrie. Daher muß $a+N = \boldsymbol{R}^d$, also $N = \boldsymbol{R}^d$ gelten. Aus den Definitionen von N und J folgt daraus (21).

Zum Abschluß zeigen wir die folgende Aussage:

(22) Es sei $q \in \boldsymbol{R}^d$. Dann ist $I(q) = i(q)$.

Wegen $i(q) \in J(q)$ und (21) gilt $i(q) \in I(q)$. Angenommen, (22) ist falsch. Es seien $c, d \in I(q)$, $c \neq d$, so gewählt, daß $\|c-d\|$ minimal ist. Für $b := (c+d)/2$ ist dann der Abstand von allen Punkten von $I(q)$ größer als $\|c-d\|/2$, ausgenommen von c, d, von denen b den Abstand $\|c-d\|/2$ hat. Da i eine Isometrie des $\boldsymbol{R}^d$ ist, kann man ein $p \in \boldsymbol{R}^d$ so wählen, daß $i(p) = b$ gilt. Dann ist $b \in I(p)$. b hat von allen Punkten von $I(q)$ einen Abstand $\geqslant \|c-d\|/2$, wobei Gleichheit genau für $c, d \in I(q)$ gilt. Da wegen (21) die Aussage (11) auch für I statt J gilt, ist das ein Widerspruch. Damit ist (22) bewiesen.

I ist eine Isometrie von $\mathfrak{R}$ auf sich, die nach (22) Punkte in Punkte überführt. Aus dem Satz 1 folgt daher, daß I durch eine Isometrie des $\boldsymbol{R}^d$ erzeugt wird und der Beweis von Satz 2 ist abgeschlossen.

4. Schlußbemerkung. Die Frage nach allen Isometrien der Räume $\langle \mathfrak{C}, \delta \rangle$, $\langle \mathfrak{R}, \delta \rangle$, $\langle \mathfrak{K}, \delta \rangle$ bleibt offen (**P 1168**). Im Fall $\langle \mathfrak{C}, \delta \rangle$ gibt es außer den durch Isometrien des $\boldsymbol{R}^d$ erzeugten Isometrien noch andere (s. [5]). Vermutlich werden aber in den Fällen $\langle \mathfrak{R}, \delta \rangle$ und $\langle \mathfrak{K}, \delta \rangle$ alle Isometrien durch Isometrien des $\boldsymbol{R}^d$ erzeugt. Neben der Metrik δ gibt es eine Reihe von anderen gebräuchlichen Metriken (s. [2] und [6]). Wie hier die Isometrien aussehen, ist nicht bekannt.

5. Bemerkung bei der Korrektur. Unter Zuhilfenahme von Resultaten dieser Arbeit wurden in [8] und [9] alle Isometrien der Räume $\langle \mathfrak{C}, \delta \rangle$, $\langle \mathfrak{N}, \delta \rangle$ und $\langle \mathfrak{K}, \delta \rangle$ in sich bestimmt. Andere Metriken und der sphärische Fall wurden in [7] und [10] behandelt.

LITERATURNACHWEIS

[1] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916, New York 1949, Berlin 1956.
[2] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge Tracts in Mathematics 47 (1958).
[3] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isometrie*, Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 93 (1957).
[4] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, New York 1949.
[5] R. Schneider, *Isometrien des Raumes der konvexen Körper*, Colloquium Mathematicum 33 (1975), S. 219-224.
[6] G. C. Shephard and R. J. Webster, *Metrics for sets of convex bodies*, Mathematica 12 (1965), S. 73-88.
[7] P. M. Gruber, *Isometries of the space of convex bodies of* E^d, ibidem 25 (1978), S. 270-278.
[8] — and G. Lettl, *Isometries of the space of convex bodies in Euclidean space*, Bulletin of the London Mathematical Society (im Erscheinen).
[9] — *Isometries of the space of compact subsets of* E^d, eingereicht.
[10] G. Lettl, *Isometrien des Raumes der konvexen Teilmengen der Sphäre*, Archiv der Mathematik (im Erscheinen).

INSTITUT FÜR ANALYSIS
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Reçu par la Rédaction le 15. 7. 1976