ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 1 (1966)

R. ZUBER (Wrocław)

O PEWNYM ALGORYTMIE ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH PIERWSZEGO RZĘDU (II)

Wstęp. W pierwszej części niniejszej pracy [1] omówiliśmy algorytm Z, umożliwiający budowanie ciągu kolejnych przybliżeń $\{y_n(x)\}$ zbieżnego do rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\text{(i)} \qquad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Przy omawianiu konstrukcji algorytmu Z sformułowaliśmy warunki, jakie powinien spełniać ciąg funkcji $\{F_n(x, y)\}$ określających algorytm Z. Najistotniejszy z nich jest następujący:

$$\text{(ii)} \qquad F_n\big(x, y_n(x)\big) = f\big(x, y_n(x)\big) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Geometrycznie warunek ten oznacza, że powierzchnie $z = F_n(x, y)$ i $z = f(x, y)$ przecinają się wzdłuż pewnej krzywej przestrzennej, której rzut prostopadły na płaszczyznę (x, y) daje krzywą $y_n(x)$. Warunek ten stanowi kryterium bliskości powierzchni $F_n(x, y)$ oraz $f(x, y)$ w otoczeniu krzywej $y_n(x)$.

Wprowadzimy określenia uogólniające warunek (ii).

OKREŚLENIE 1. Funkcje $f(x, y)$ i $F(x, y)$ mają *styczność rzędu* s wzdłuż krzywej $y = a(x)$, dla x z przedziału $[x_0, x_1]$, jeśli dla każdego x z tego przedziału spełnione są warunki

$$D^i F\big(x, a(x)\big) \equiv D^i f\big(x, a(x)\big) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s,$$

gdzie przez $D^i F(x, y)$ oznaczyliśmy pochodną cząstkową $\dfrac{\partial^i F(x, y)}{\partial y^i}$.

OKREŚLENIE 2. Funkcja $F(x, y)$ jest *powierzchnią interpolacyjną* dla funkcji $f(x, y)$ z krzywymi węzłowymi

$$y = a_i(x) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, s),$$

dla x z przedziału $[x_0, x_1]$, jeśli dla każdego x z tego przedziału spełnione są warunki

$$F\big(x, a_i(x)\big) \equiv f\big(x, a_i(x)\big) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s.$$

Twierdzenie 1, sformułowane w pierwszej części niniejszej pracy [1], zapewnia zbieżność algorytmu Z już wówczas, gdy ciąg funkcji określających $F_n(x, y)$ ma styczność rzędu zero z prawą stroną równania różniczkowego (i) odpowiednio wzdłuż krzywych $y_n(x)$ lub jest powierzchnią interpolacyjną z jedną tylko krzywą węzłową $y_n(x)$.

Natomiast w twierdzeniu sformułowanym i udowodnionym w pracy [2] podane są oszacowania dla ciągu liczb $\{\varrho_n\}$, gdzie

$$\varrho_n = \sup_{|x-x_0|<h} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|,$$

w tych przypadkach, kiedy ciąg funkcji określających $F_n(x, y)$ ma z powierzchnią $f(x, y)$ styczność rzędu $s > 0$ lub kiedy funkcje $F_n(x, y)$ są dla $f(x, y)$ powierzchniami interpolacyjnymi wzdłuż $s+1$ krzywych węzłowych.

Z oszacowań tych wynika, że ciąg kolejnych przybliżeń $\{y_n(x)\}$ jest tym szybciej zbieżny do rozwiązania zagadnienia początkowego (i), im większa jest liczba s.

W niniejszej pracy omówimy konstrukcje takich ciągów funkcji określających, aby odpowiadające im algorytmy Z wyznaczały ciągi kolejnych przybliżeń szybko zbieżne do rozwiązania zagadnienia początkowego (i).

1. O pewnej klasie funkcji określających algorytm Z. Rozpatrzmy funkcję dwu zmiennych

$$F(x, y) = \frac{W\big(x, g(x, y)\big) - g'_x(x, y)}{g'_y(x, y)},$$

gdzie $W(x, y)$ oraz $g(x, y)$ są dowolnymi funkcjami ciągłymi ze względu na obie zmienne w pewnym interesującym nas obszarze. O pochodnej cząstkowej $g'_y(x, y)$ zakładamy, że jest różna od zera w danym obszarze.

Zauważmy przede wszystkim, że zagadnienie początkowe

$$y' = F(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

po podstawieniu nowej funkcji $u = g(x, y)$ przyjmie postać

$$u' = W(x, y), \qquad u(x_0) = g(x_0, y_0).$$

Mając to na uwadze, będziemy konstruować ciąg funkcji $F_n(x, y)$ określających algorytm w postaci

$$(1.1) \qquad F_n(x, y) = \frac{W_n\big(x, g_n(x, y)\big) - g'_{nx}(x, y)}{g'_{ny}(x, y)} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ciągi funkcji $W_n(x,y)$ oraz $g_n(x,y)$ dobierzemy tak, żeby:

1° Ciąg zagadnień początkowych

$$u_n' = W_n(x,y), \qquad u_n(x_0) = g_n(x_0, y_0)$$

można było rozwiązać przez kwadratury.

2° Funkcje (1.1) miały, z powierzchnią $f(x,y)$ styczność rzędu s wzdłuż określonej krzywej $y_n(x)$ lub były powierzchniami interpolacyjnymi dla funkcji $f(x,y)$ wzdłuż $s+1$ określonych krzywych $y_n(x)$, $y_{n+1}(x), \ldots, y_{n+s}(x)$.

2. Konstrukcja funkcji dwu zmiennych mającej z daną powierzchnią styczność rzędu s. Z określenia 1, podanego we wstępie niniejszej pracy, wynika, że funkcja $F_n(x,y)$ ma z funkcją $f(x,y)$ styczność rzędu s wzdłuż krzywej $y_n(x)$ wtedy, kiedy spełniony jest następujący układ warunków:

$$D^i F_n\big(x, y_n(x)\big) \equiv D^i f\big(x, y_n(x)\big) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s. \tag{2.1}$$

Będziemy konstruować funkcje $F_n(x,y)$ w postaci (1.1). W tym celu należy ustalić postacie funkcji $W_n(x,y)$ oraz $g_n(x,y)$. Załóżmy, że funkcje $W_n(x,y)$ są tak dobrane, że każda z nich spełnia warunek

$$D^i W_n\big(x, y_n(x)\big) \equiv D^i f\big(x, y_n(x)\big) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k, \tag{2.2}$$

tzn. ma z powierzchnią $f(x,y)$ styczność rzędu k wzdłuż krzywej $y_n(x)$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą spełniającą warunek $-1 \leqslant k \leqslant s$.

Przez styczność rzędu -1 będziemy rozumieli taki przypadek, kiedy funkcja $W_n(x,y)$ jest zupełnie dowolna, tzn. nie spełnia żadnego z warunków (2.2).

Przyjmijmy ponadto następującą postać funkcji $g_n(x,y)$

$$g_n(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s+1} \big(y - y_n(x)\big)^i a_{n,i-j-1}(x) + y & \text{dla} \quad k \leqslant s-1 \\ y & \text{dla} \quad k = s, \end{cases} \tag{2.3}$$

gdzie $a_{n,j}(x)$ są dowolnymi funkcjami zmiennej x, $s-k-j$ razy różniczkowalnymi, jeśli $j = 1, 2, \ldots, s-k$, oraz $a_{n,j}(x) \equiv 0$, jeśli $j \equiv 0$.

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 1. *Funkcja $F_n(x,y)$, określona wzorem* (1.1), *w przypadku gdy $W_n(x,y)$ spełnia warunki* (2.2) *oraz gdy $g_n(x,y)$ jest postaci* (2.3), *ma z powierzchnią $f(x,y)$ styczność rzędu k wzdłuż krzywej $y_n(x)$ przy dowolnych funkcjach $a_{n,j}(x)$.*

D o w ó d. Należy udowodnić, że spełnione są warunki (2.1) dla $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Rozpatrzmy wpierw najprostszy przypadek $k = s$. Z (2.3) otrzymujemy $g_n(x, y) = y$, natomiast z (1.1) $F_n(x, y) = W_n(x, y)$, skąd wobec założeń (2.2) od razu wynika prawdziwość tezy.

Rozpatrzmy teraz przypadek $k < s$. Zauważmy przede wszystkim, że prawdziwe są następujące wzory:

$$(2.4)\qquad D^r g'_{nx}(x, y_n) = \\ = r!\,a'_{n,r-k-1} - (r+1)!\,y'_n a_{n,r-k} \quad \text{dla} \quad r = 0, 1, 2, \ldots, s+1,$$

$$(2.5)\qquad D^r g_n(x, y_n) = \begin{cases} y_n & \text{dla} \quad r = 0, \\ a_{n,r-k-1}+1 & \text{dla} \quad r = 1, \\ r!\,a_{n,r-k-1} & \text{dla} \quad r = 2, 3, \ldots, s+1. \end{cases}$$

Wzory (2.4) i (2.5) są prawdziwe dla $k = -1, 0, 1, 2, \ldots, s-1$. Dalej, uwzględniając (2.5) dla $r = 0$ oraz założenia (2.2), otrzymamy

$$(2.6)\qquad D^i W_n\big(x, g_n(x, y_n(x))\big) = D^i f\big(x, y_n(x)\big) \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

Przepiszmy teraz równość (1.1) w następującej postaci:

$$F_n(x, y)\,Dg_n(x, y) = W_n(x, g_n(x, y)) - g'_{nx}(x, y).$$

Różniczkując tę równość i razy obustronnie względem y, otrzymamy

$$(2.7)\qquad \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} D^{i-j} F_n(x, y)\,D^{j+1} g_n(x, y) = D^i W_n\big(x, g_n(x, y)\big) - D^i g'_{nx}(x, y).$$

Jeśli teraz podstawimy do wzoru (2.7) $y = y_n(x)$ oraz uwzględnimy wzory (2.4) i (2.5), to otrzymamy

$$(2.8)\qquad (i+1)!\,a_{n,i-k} y'_n - f(x, y_n) = D^i F_n(x, y_n) - D^i W_n(x, y_n) + \\ + \sum_{l=0}^{i-1} \tbinom{i}{l}(l+1)!\,D^{i-l} F_n(x, y_n)\,a_{n,l-k} + i!\,a'_{n,i-k-1}.$$

Widzimy, że dla $i \leqslant k$ wszystkie funkcje $a_{n,j}(x)$, występujące we wzorze (2.8), są tożsamościowo równe zero, albowiem $j \leqslant 0$ (patrz wyjaśnienie do wzoru (2.3)). Zatem z (2.8) otrzymamy

$$D^i F_n(x, y_n) - D^i W_n(x, y_n) \equiv 0 \qquad \text{dla} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

skąd na mocy (2.6) otrzymujemy warunki (2.1) dla $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, co dowodzi, że funkcja $F_n(x, y)$ ma styczność rzędu k z powierzchnią $f(x, y)$ wzdłuż krzywej $y_n(x)$, niezależnie od postaci funkcji $a_{n,j}(x)$, występujących we wzorze (2.3). Funkcje $a_{n,j}(x)$ dobierzemy w ten sposób, aby spełnione były warunki (2.1) również dla $i = k+1, k+2, \ldots, s$.

Jeżeli podstawimy do wzoru (2.8)

$$D^i F_n\big(x, y_n(x)\big) = D^i f\big(x, y_n(x)\big)$$

oraz zmienimy odpowiednio wskaźniki, to otrzymamy wzór rekurencyjny, umożliwiający przy zadanych s oraz k znajdowanie funkcji $a_{n,j}(x)$

$$(2.10)\quad a_{n,j} = \frac{D^{j+k}f(x, y_n) - D^{j+k}W_n(x, y_n)}{(k+j+1)!\big(y_n' - f(x, y_n)\big)} + \\ + \frac{\sum_{l=k+1}^{k+j-1}\binom{k+j}{l}(l+1)!\,a_{n,l-k}D^{k+j-l}f(x, y_n) + (k+j)!\,a_{n,j-1}'}{(k+j+1)!\big(y_n' - f(x, y_n)\big)}$$

dla $j = 1, 2, \ldots, s-k$.

3. Konstrukcja powierzchni interpolacyjnych. Na to, by funkcja $F_n(x, y)$ była powierzchnią interpolacyjną dla funkcji $f(x, y)$ z krzywymi węzłowymi $y_n(x), y_{n+1}(x), \ldots, y_{n+s}(x)$, musi być spełniony układ warunków

$$(3.1)\quad F_n\big(x, y_{n+i}(x)\big) \equiv f\big(x, y_{n+i}(x)\big) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, będziemy konstruować funkcję $F_n(x, y)$ w postaci (1.1).

Załóżmy, że funkcja $W_n(x, y)$ jest tak dobrana, że spełniony jest układ warunków

$$(3.2)\quad W_n\big(x, y_{n+i}(x)\big) \equiv f\big(x, y_{n+i}(x)\big)$$

dla $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą z przedziału $[-1, s]$. Przypadek $k = -1$ oznacza, że funkcja $W_n(x, y)$ jest zupełnie dowolna, tzn. nie spełnia żadnego z warunków (3.2). Zatem z założenia funkcja $W_n(x, y)$ jest powierzchnią interpolacyjną dla funkcji $f(x, y)$ z krzywymi węzłowymi $y_{n+i}(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$.

Przyjmijmy ponadto postać funkcji $g_n(x, y)$

$$(3.3)\quad g_n(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{j=k+1}^{s}{}' S_j(x, y)\,a_{n,j}(x) + y & \text{dla} \quad k \leqslant s-1, \\ y & \text{dla} \quad k = s, \end{cases}$$

gdzie

$$S_j(x, y) = \frac{1}{y - y_{n+j}(x)} \prod_{l=0}^{s} \big(y - y_{n+l}(x)\big)^2, \qquad j \leqslant s.$$

TWIERDZENIE 2. *Funkcja $F_n(x, y)$, określona wzorem* (1.1), *w przypadku gdy funkcja $W_n(x, y)$ spełnia warunki* (3.2) *oraz $g_n(x, y)$ jest postaci* (3.3), *jest powierzchnią interpolacyjną dla funkcji $f(x, y)$ z krzywymi węzłowymi $y_{n+i}(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$.*

Dowód. Wprowadźmy oznaczenie

$$P_j(x, y) = \frac{S_j(x, y)}{y - y_{n+j}} \qquad (j \leqslant s).$$

Łatwo jest sprawdzić prawdziwość następujących wzorów:

$$g_n(x, y_{n+i}) = y_{n+i} \qquad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s,$$

$$g'_{nx}(x, y_{n+i}) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k \\ -y'_{n+i}P_i(x, y_{n+i})a_{n,i} & \text{dla} \quad i = k+1, \ldots, s, \end{cases}$$

$$g'_{ny}(x, y_{n+i}) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k, \\ P_i(x, y_{n+i})a_{n,i} + 1 & \text{dla} \quad i = k+1, \ldots, s. \end{cases}$$

Wstawiając do obu stron równości (1.1) y_{n+i} zamiast y oraz uwzględniając powyższe wzory, otrzymamy

(3.4)
$$F_n(x, y_{n+i}) = \begin{cases} W_n(x, y_{n+i}) & (i = 0, 1, 2, \ldots, k), \\ \dfrac{W_n(x, y_{n+i}) + y'_{n+i}P_i(x, y_{n+i})a_{n,i}}{P_i(x, y_{n+i})a_{n,i} + 1} & (i = k+1, \ldots, s). \end{cases}$$

Uwzględniając założenia o funkcji $W_n(x, y)$, widzimy, że $F_n(x, y)$ jest powierzchnią interpolacyjną dla funkcji $f(x, y)$ z krzywymi węzłowymi $y_{n+i}(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ niezależnie od postaci funkcji $a_{n,i}(x)$, c.b.d.o.

Dobierzemy teraz funkcje $a_{n,i}(x)$ w ten sposób, aby $F_n(x, y)$ była powierzchnią interpolacyjną dla $f(x, y)$ również wzdłuż krzywych węzłowych $y_{n+i}(x)$ $(i = k+1, k+2, \ldots, s)$.

Żądając dla tych krzywych spełnienia warunków (3.1), otrzymamy z (3.4) wzory umożliwiające znajdowanie funkcji $a_{n,i}(x)$

(3.5)
$$a_{n,i}(x) = \frac{f\big(x, y_{n+i}(x)\big) - W_n\big(x, y_{n+i}(x)\big)}{P_i\big(x, y_{n+i}(x)\big)\big[y'_{n+i}(x) - f\big(x, y_{n+i}(x)\big)\big]} \qquad (i = k+1, k+2, \ldots, s).$$

4. Metoda stycznych rzędu s przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Rozpatrzmy następujące zagadnienie początkowe:

(4.1) $$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Przez *metodę stycznych rzędu s* będziemy rozumieli taki algorytm Z (patrz [1]), w którym ciąg funkcji określających ma z powierzchnią $f(x, y)$ styczność rzędu s odpowiednio wzdłuż kolejnych przybliżeń rozwiązania zadania (4.1), otrzymywanych sukcesywnie zapowiedzianą metodą.

Zajmiemy się szczegółowym omówieniem zapowiedzianej metody. Niech funkcja $y_n(x)$ będzie kolejnym, znanym już przybliżeniem rozwiązania zagadnienia początkowego (4.1), uzyskanym zapowiedzianą metodą. Konstruujemy wpierw funkcję $F_n(x, y)$ postaci (1.1), która ma z powierzchnią $f(x, y)$ styczność rzędu s wzdłuż krzywej $y_n(x)$. Następnie rozwiązujemy zagadnienie początkowe (4.2)

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \qquad y_{n+1}(x_0) = y_0. \tag{4.2}$$

Zagadnienie (4.2) po dokonaniu podstawienia

$$u_n = g_n(x, y_{n+1}), \tag{4.3}$$

gdzie $g_n(x, y)$ jest określone wzorem (2.3), sprowadza się do rozwiązania zagadnienia początkowego

$$u'_n = W_n(x, u_n), \qquad u_n(x_0) = y_0, \tag{4.4}$$

skąd wyznaczamy funkcję $u_n(x)$, a następnie do rozwiązania równania algebraicznego (4.3), skąd znajdujemy funkcję $y_{n+1}(x)$, tzn. następne przybliżenie zadania początkowego (4.1).

O funkcji $W_n(x, y)$ zakładamy, że ma z powierzchnią $f(x, y)$ styczność rzędu $k(-1 \leqslant k \leqslant s)$ wzdłuż krzywej $y_n(x)$ oraz że równanie różniczkowe (4.4) daje się rozwiązać przez kwadratury. Początkowe przybliżenie $y_0(x)$ w ciągu kolejnych przybliżeń wybieramy dowolnie, żądając jedynie, aby $y_0(x_0) = y_0$.

Metoda stycznych sprowadza się więc do rozwiązywania w każdym kroku iteracyjnym równania różniczkowego (4.4), a następnie równania algebraicznego (4.3).

Zauważmy, że omówiona tu metoda jest oczywiście uogólnieniem metody Czapłygina stycznych, w związku z czym nazywamy ją **metodą stycznych rzędu** s.

UWAGA. Zauważmy, że rozwiązanie równania algebraicznego (4.3) nie jest jednoznaczne. W opisie metody nie jest podane, które z rozwiązań równania (4.1) należy przyjąć jako kolejne przybliżenie $y_{n+1}(x)$, a to ze względu na to, że nie udało się ustalić kryteriów jednoznacznego wyboru rozwiązania.

Rozpatrzmy teraz kilka przykładów metody stycznych rzędu s, w których będziemy przyjmować różne wartości s oraz k, a także różne postacie funkcji $W_n(x, y)$.

Przykład 4.1. Ustalmy $s = 0$, $k = -1$. Jeżeli przyjmiemy $W_n(x, y) = 0$, to wówczas z (2.3) otrzymamy

$$g_n(x, y) = (y - y_n)a_{n,1} + y,$$

natomiast ze wzoru (2.10)

$$a_{n,1} = \frac{f(x, y_n)}{y'_n - f(x, y_n)}.$$

Wzory (4.4) oraz (4.3) przyjmą postać

$$u'_n = 0, \quad u_n(x_0) = y_0,$$

$$u_n = (y_{n+1} - y_n)\frac{f(x, y_n)}{y'_n - f(x, y_n)} + y_{n+1}.$$

Można je zapisać w postaci jednego wzoru rekurencyjnego

$$y_{n+1} = y_0 + (y_n - y_0)\frac{f(x, y_n)}{y'_n}. \tag{4.5}$$

Przykład 4.2. Ustalmy $s = 0$, $k = 0$. Jeśli przyjmiemy

$$W_n(x, y) = f(x, y_n),$$

to, jak widać, $W_n(x, y)$ ma z powierzchnią $f(x, y)$ styczność rzędu zero. Ze wzoru (2.3) w tym przypadku otrzymamy

$$g_n(x, y) = y.$$

Wzory rekurencyjne (4.3) i (4.4) można w tym przypadku również zapisać jednym wzorem, określającym, podobnie jak wzór (4.5), metodę stycznych rzędu zero

$$y'_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n)\,dt, \tag{4.6}$$

znanym jako wzór kolejnych przybliżeń Picarda.

Przykład 4.3. Wprowadźmy oznaczenie

$$I_n(x) = y'_n(x) - f\big(x, y_n(x)\big). \tag{i}$$

Ustalmy w tym przykładzie $s = 1, k = -1$. Przyjmując $W_n(x, y) = 0$, otrzymamy ze wzoru (2.3)

$$g_n(x, y) = (y - y_n)^2 a_{n,2} + (y - y_n)a_{n,1} + y,$$

gdzie

$$a_{n,1} = \frac{f(x, y_n)}{I_n}, \quad a_{n,2} = \frac{Df(x, y_n)I_n y'_n + I_n y''_n - I'_n y'_n}{2I_n^3}.$$

Wzory (4.3) i (4.4) można w tym przypadku napisać w następującej postaci:

$$(y_{n+1} - y_n)^2[Df(x, y_n)I_n y'_n + I_n y''_n - I'_n y'_n] + \\ + 2I_n^2 y'_n(y_{n+1} - y_n) - 2I_n^3(y_0 - y_n) = 0. \tag{4.7}$$

Kolejną funkcję $y_{n+1}(x)$ otrzymuje się tu przez rozwiązywanie w każdym kroku iteracyjnym równania kwadratowego.

Przykład 4.4. Jeśli ustalimy $s = 1$, $k = 0$ oraz przyjmiemy

$$W_n(x, y) = f(x, y_n),$$

to wówczas funkcja $g_n(x, y)$ przyjmie postać

$$g_n(x, y) = (y - y_n)^2 \frac{Df(x, y_n)}{2I_n} + y.$$

Wzory rekurencyjne (4.4) i (4.3) możemy w tym przypadku napisać w postaci

$$\begin{aligned} &u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n)\,dt, \\ &(y_{n+1} - y_n)^2 Df(x, y_n) + 2I_n(y_{n+1} - y_n) - 2I_n(u_n - y_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Przykład 4.5. Otrzymamy jeszcze jeden przykład wzoru, określającego metodę stycznych pierwszego rzędu, jeżeli ustalimy $s = 1$, $k = 1$ oraz przyjmiemy

$$W_n(x, y) = Df(x, y_n)(y - y_n) + f(x, y_n).$$

Funkcja $W_n(x, y)$ ma w tym przypadku styczność pierwszego rzędu z funkcją $f(x, y)$ wzdłuż krzywej $y_n(x)$. Ze wzoru (2.3) otrzymamy $g_n(x, y) = y$. Natomiast wzory (4.3) i (4.4) można w tym przypadku zapisać w postaci następującego wzoru rekurencyjnego:

$$y'_{n+1} = Df(x, y_n)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n), \qquad y_{n+1}(x_0) = y_0, \tag{4.9}$$

znanego jako metoda Czapłygina stycznych.

Przykład 4.6. Rozpatrzmy jeszcze jeden z wielu możliwych przypadków metody stycznych drugiego rzędu. Przyjmijmy $s = 2$, $k = 1$ oraz

$$W_n(x, y) = Df(x, y_n)(y - y_n) + f(x, y_n).$$

Otrzymamy wówczas wzory rekurencyjne, określające metodę stycznych drugiego rzędu, które umożliwiają uzyskać kolejne przybliżenie $y_{n+1}(x)$ poprzez rozwiązanie w każdym kroku iteracyjnym równania różniczkowego liniowego oraz równania algebraicznego trzeciego stopnia

$$\begin{aligned} &u'_n = Df(x, y_n)(u_n - y_n) + f(x, y_n), \qquad u_n(x_0) = y_0, \\ &(y_{n+1} - y_n)^3 D^2 f(x, y_n) + 6I_n(y_{n+1} - y_n) - 6I_n(u_n - y_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

5. Metoda interpolacyjna przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. *Metodą interpolacyjną* będziemy nazywać taki algorytm Z, w którym wyrazami ciągu $\{F_n(x, y)\}$ funkcji określających są powierzchnie interpolacyjne funkcji $f(x, y)$ z krzywymi węzłowymi

$$y_n(x), y_{n+1}(x), \ldots, y_{n+s}(x),$$

gdzie $\{y_n(x)\}$ jest ciągiem kolejnych przybliżeń rozwiązania zagadnienia początkowego (4.1), którego wyrazy otrzymuje się sukcesywnie zapowiedzianą metodą.

Zajmiemy się dokładnym omówieniem tej metody. Niech funkcje

$$y_n(x), y_{n+1}(x), \ldots, y_{n+s}(x) \tag{5.1}$$

będą kolejnymi, znanymi już przybliżeniami zagadnienia początkowego (4.1), uzyskanymi metodą interpolacyjną. Konstruujemy wpierw powierzchnię interpolacyjną $F_n(x, y)$ postaci (1.1) funkcji $f(x, y)$ z krzywymi węzłowymi (5.1). Następnie rozwiązujemy zagadnienie początkowe

$$y'_{n+s+1} = F_n(x, y_{n+s+1}), \qquad y_{n+s+1}(x_0) = y_0. \tag{5.2}$$

Zagadnienie to po dokonaniu podstawienia

$$u_n = g_n(x, y_{n+s+1}), \tag{5.3}$$

gdzie funkcja $g_n(x, y)$ jest wyrażona wzorem (3.3), sprowadza się do rozwiązania zagadnienia początkowego

$$u'_n = W_n(x, u_n), \qquad u_n(x_0) = y_0, \tag{5.4}$$

skąd wyznaczamy funkcję $u_n(x)$, a następnie do rozwiązania równania algebraicznego (5.3), skąd znajdujemy następne przybliżenie $y_{n+s+1}(x)$ rozwiązania zagadnienia początkowego (4.1).

O funkcji $W_n(x, y)$ zakładamy, że jest powierzchnią interpolacyjną funkcji $f(x, y)$ z krzywymi węzłowymi

$$y_n(x), y_{n+1}(x), \ldots, y_{n+k}(x),$$

jeśli $k = 0, 1, 2, \ldots, s$, lub jest zupełnie dowolną funkcją, jeśli $k = -1$, jednak taką, żeby równanie różniczkowe (5.4) można było rozwiązać przez kwadratury.

Początkowe przybliżenia $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_s(x)$ wybieramy dowolnie, żądając jedynie spełnienia warunków $y_i(x_0) = y_0$.

Metoda interpolacyjna polega na:

1° ustaleniu $s+1$ przybliżeń początkowych zagadnienia (4.1),

2° rozwiązaniu w każdym kroku iteracyjnym kolejno zagadnienia początkowego (5.4), a następnie równania algebraicznego (5.3).

Rozpatrzmy trzy przykłady metody interpolacyjnej, zbudowanej na dwóch krzywych węzłowych.

Przykład 5.1. Ustalmy $s = 1$, $k = -1$ oraz przyjmijmy $W_n(x, y) = 0$ Ze wzorów (5.4), a następnie (3.3) oraz (5.3) znajdujemy

$$u_n' = 0, \qquad u_n(x_0) = y_0,$$

$$u_n = (y_{n+2}-y_n)(y_{n+2}-y_{n+1})^2 \frac{f(x, y_n)}{(y_{n+1}-y_n)^2 I_n} +$$

$$+(y_{n+2}-y_n)^2(y_{n+2}-y_{n+1}) \frac{f(x, y_{n+1})}{(y_{n+1}-y_n)^2 I_{n+1}} = 0.$$

Zatem wzory rekurencyjne (5.3) i (5.4) można zapisać w postaci jednego wzoru

$$(5.5) \quad (y_{n+2}-y_n)(y_{n+2}-y_{n+1})^2 f(x, y_n) I_{n+1} +$$

$$+(y_{n+2}-y_n)^2(y_{n+2}-y_{n+1}) f(x, y_{n+1}) I_n - y_0 I_n I_{n+1}(y_{n+1}-y_n)^2 = 0.$$

Przykład 5.2. Jeśli przyjmiemy $s = 1$, $k = 0$ oraz $W_n(x, y) = f(x, y_n)$, to wówczas wzory rekurencyjne (5.4) i (5.3) przyjmą postać

$$(5.6) \quad \begin{aligned} & u_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n)\,dt, \\ & (y_{n+2}-y_n)^2(y_{n+2}-y_{n+1})[f(x, y_{n+1})-f(x, y_n)]-u_n(y_{n+1}-y_n)^2 I_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Przykład 5.3. Jeśli natomiast ustalimy $s = 1$, $k = 1$ oraz przyjmiemy

$$W_n(x, y) = \frac{f(x, y_n)-f(x, y_{n+1})}{y_n-y_{n+1}}(y_{n+2}-y_n)+f(x, y_n),$$

to wówczas wzory rekurencyjne (5.3) i (5.4) można zapisać w postaci jednego wzoru

$$(5.7) \quad y_{n+2}' = \frac{f(x, y_n)-f(x, y_{n+1})}{y_n-y_{n+1}}(y_{n+2}-y_n)+f(x, y_n), \qquad y_{n+2}(x_0) = y_0,$$

znanego jako wzór siecznych Czapłygina.

6. Przykład numeryczny. Rozpatrzmy następujące zagadnienie początkowe

$$\text{(i)} \qquad y' = -y^2+2xy-x^2+1, \qquad y(0) = 1.$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem tego zagadnienia jest funkcja

$$\text{(ii)} \qquad y(x) = \frac{1}{1+x}+x.$$

Zajmiemy się teraz przybliżonym rozwiązywaniem równania (i), stosując niektóre wzory iteracyjne podane w poprzednim paragrafie. Dla każdego z wybranych wzorów wykonamy jeden krok iteracyjny. Przyjmijmy funkcję

$$y_0(x) = 1+x^2 \tag{iii}$$

jako początkowe przybliżenie rozwiązania zagadnienia początkowego (i).

Ze wzoru (4.5) znajdujemy łatwo

$$y_1^{(1)}(x) = 1+x^2-1{,}5x^3+x^4-0{,}5x^5. \tag{iv}$$

Obliczmy również pierwsze przybliżenie rozwiązania, stosując wzór Picarda. Ze wzoru (4.6) znajdujemy

$$y_1^{(2)}(x) = 1+x^2-x^3+0{,}5x^4-0{,}2x^5. \tag{v}$$

Na koniec, stosując wzór (4.8), znajdujemy jeszcze jedno wyrażenie dla pierwszego przybliżenia rozwiązania zagadnienia początkowego (i)

$$y_1^{(3)}(x) = 1+x^2+x^2\,\frac{p(x)-\sqrt{p^2(x)+4p(x)q(x)r(x)}}{2q(x)}, \tag{vi}$$

gdzie

$$p(x) = 3-2x+x^2, \qquad q(x) = 1-x+x^2, \qquad r(x) = x-0{,}5x^2+0{,}2x^3.$$

W celu porównania poszczególnych przybliżeń, otrzymanych za pomocą różnych wzorów iteracyjnych, podajemy tabelkę, gdzie wyliczone są wartości poszczególnych przybliżeń dla kilku wartości x wziętych z przedziału [0,1].

x	$y(x)$	$y_0(x)$	$y_1^{(1)}(x)$	$y_1^{(2)}(x)$	$y_1^{(3)}(x)$
0,1	1,0091	1,0100	1,0086	1,0090	1,0091
0,2	1,0333	1,0400	1,0294	1,0327	1,0332
0,3	1,0692	1,0900	1,0564	1,0666	1,0682
0,4	1,1143	1,1600	1,0845	1,1068	1,1114
0,5	1,1667	1,2500	1,1094	1,1500	1,1608
0,6	1,2250	1,3600	1,1267	1,1932	1,2139
0,7	1,2882	1,4900	1,1316	1,2334	1,2704
0,8	1,3556	1,6400	1,1178	1,2673	1,3296
0,9	1,4263	1,8100	1,0774	1,2910	1,3896
1,0	1,5000	2,0000	1,0000	1,3000	1,4508

Dla wyjaśnienia podajemy, że w kolumnie drugiej podane są dokładne wartości rozwiązania, a w kolumnie trzeciej — wartości zerowego przybliżenia, określonego wzorem (iii). Natomiast w pozostałych trzech kolumnach podane są wartości pierwszych przybliżeń, określonych odpowiednio wzorami (iv), (v) oraz (vi).

Prace cytowane

[1] R. Zuber, *O pewnym algorytmie rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu (I)*, Zastosow. Mat. 8 (1966), str. 351-363.

[2] R. Zuber, *O szybko zbieżnych ciągach kolejnych przybliżeń*, Zastosow. Mat. 9 (1966), str. 75-83.

Praca wpłynęła 27. 1. 1966

Р. ЗУБЭР (Вроцлав)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИФМЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА (II)

РЕЗЮМЕ

В этой статьи россматривается два метода: *интерполационный* и *метод касательных*, которые дают возможнотсь получить последовательные приближения

(i) $$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$$

стремлящиеся довольно быстро к решению начальной задачи

(ii) $$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

В этих методах начальную задачу (ii) заменяется некоторой последовательностью начальных задач

(iii) $$y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $F_n(x, y)$ является функцией, имеющей с поверхностью $f(x, y)$ *порядок касания* s в первом методе, или является *интерполяционной функцией* для поверхности $f(x, y)$, построеной на s узловых кривых во втором методе.

В статьи оговорена конструкция функций $F_n(x, y)$ касательных к заданой поверхности $f(x, y)$, а тоже конструкция интерполационных поверхностей для функции $f(x, y)$.

Дается также несколько примеров метода касательных и интерполационного метода для $s = 0, 1, 2$.

R. ZUBER (Wrocław)

SOME ALGORITHM FOR SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER (II)

SUMMARY

The autor gives in this paper two methods: *a method of tangents* and *an interpolation method* for obtaining a sequence of successive approximations

(i) $$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$$

which converge to the solution of the initial-value problem

(ii) $$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

In both methods the initial-value problem (ii) is replaced by the sequence of initial-value problems

(iii) $$y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

where $F_n(x, y)$ is a tangent function of *the order* s to the function $f(x, y)$, in the first method, or is *an interpolation function* for $f(x, y)$, with s pivotal curves, in the second method.

In the paper constructive methods for obtaining the function $F_n(x, y)$ tangent to $f(x, y)$ and for obtaining the interpolation function are given.

Given are also a few examples of the method of tangents and of the interpolation method for $s = 0, 1, 2$.