ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVII (1987)

Une remarque sur l'existence d'une solution borné dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ de l'équation différentielle à retard

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous démontrons un théorème sur l'existence d'une solution de l'équation différentielle à retard, définie et bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Dans la présente note nous allons démontrer un simple théorème sur l'existence d'une solution bornée de l'équation

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x_t\big), \tag{1}$$

où $x_t(s) = x(t+s)$ pour $-1 \leqslant s \leqslant 0$. Nous admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H_1. 1° $f(t, x, \varphi)$ est une fonction continue dans $D = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times C([-1, 0], \boldsymbol{R})$.

2° $f(t, x, \varphi)$ est croissante par rapport à φ.

3° On admet l'unicité des solutions de l'équation (1) avec la condition initiale

$$x(t, t_0, \varphi) = \varphi(t-t_0) \quad \text{pour } t_0 - 1 \leqslant t \leqslant t_0 \tag{2}$$

pour chaque t_0 et chaque $\varphi \in C([-1, 0], \boldsymbol{R})$ (φ: $[-1, 0] \to \boldsymbol{R}$, continue dans $[-1, 0]$).

4° Il existe $M > 0$ tel que

$$f(t, M, M) < 0 \quad \text{pour } -\infty < t < +\infty, \tag{3}$$

$$f(t, -M, -M) > 0 \quad \text{pour } -\infty < t < +\infty. \tag{4}$$

LEMME L_1. *Sous les hypothèses* H_1 *chaque solution de l'équation* (1), $x(t, t_0, \varphi)$, *avec la condition initiale* (2) *telle que*

$$\|\varphi\| \leqslant M \tag{5}$$

existe dans l'intervalle $[t_0-1, +\infty)$ *et satisfaite à l'inégalité*

$$|x(t, t_0, \varphi)| \leqslant M. \tag{6}$$

Démonstration. $f(t, x, \varphi)$ étant continue (cf. 1°) dans D, il existe pour chaque fonction φ continue dans $[-1, 0]$ une solution $x(t, t_0, \varphi)$ dans l'intervalle $[t_0-1, \tau)$ où $\tau > t_0$. En vertu de 3° elle est unique. $f(t, x, \varphi)$ étant croissante par rapport à φ, chaque solution de (1) telle que $|x(t, t_0, \varphi)| \leqslant M$ dans $[t_0-1, \tau)$ peut être prolongée sur un intervalle $[t_0-1, \tau+\varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$. Des inégalités (3) et (4) il résulte que pour chaque fonction continue dans $[-1, 0]$ et satisfaisant à (5) la solution $x(t, t_0, \varphi)$ peut être prolongée sur l'intervalle $[t_0-1, +\infty)$ et satisfait dans cet intervalle à (6).

HYPOTHÈSES H_2. 1° pour chaque $\alpha > 0$ il existe $k_\alpha > 0$ tel que

$$|f(t, x, \varphi)| \leqslant k_\alpha \quad \text{pour } |x| \leqslant M,\ \|\varphi\| \leqslant M,\ |t| \leqslant \alpha. \tag{9}$$

2° Il existe deux fonctions continues $h(t)$ et $g(x)$ telles que

$$g(0) = 0, \tag{10}$$

$$g(x) < 0 \quad \text{pour } 0 < x \leqslant M, \tag{11}$$

$$\int_0^M \frac{dx}{g(x)} = -\infty, \tag{12}$$

$$h(t) > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\,ds = c < \infty, \tag{13}$$

$$f(t, x, \varphi) > h(t)g(x) \quad \text{pour } M \geqslant x > 0,\ 0 < \varphi \leqslant M. \tag{14}$$

THÉORÈME T. *Sous les hypothèses* H_1 *et* H_2 *il existe une solution* $x(t)$ *de l'équation* (1) *définie dans l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$ *et telles que*

$$0 < x(t) \leqslant M \quad \textit{pour } -\infty < t < +\infty. \tag{15}$$

Démonstration. Envisageons une suit quelconque $\{t_n\}$ telle que

$$t_n \leqslant t_{n-1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

$$t_n \to -\infty, \tag{17}$$

et une suite de solutions de l'équation (1) telle que

$$x_n(t) = x(t, t_n, M). \tag{18}$$

En vertu du lemme L_1 on a

$$|x_n(t)| \leqslant M \quad \text{pour } t_n - 1 \leqslant t < \infty, \tag{19}$$

$$0 < x_n(t) \leqslant M \quad \text{pour } t_n - 1 \leqslant t < \gamma,\ t_n < \gamma. \tag{20}$$

Dans l'intervalle $t_n \leqslant t < \gamma$ on a l'inégalité

$$x_n'(t) > h(t)g(x_n(t)) \tag{21}$$

et par suite

(22) $$x_n(t) \geqslant z_n(t) \quad \text{pour } t_n \leqslant t < \gamma,$$

où $z_n(t)$ est la solution de l'équation

$$z'(t) = h(t)g(z(t))$$

telle que $z_n(t_n) = M$.

On a

(23) $$\int_M^{z_n(t)} \frac{dz}{g(z)} = \int_{t_n}^{t} f(s)\,ds \quad \text{pour } t \geqslant t_n.$$

L'intégrale $\int_{t_n}^{\infty} f(s)\,ds$ étant finie, en vertu de (12), on obtient $z_n(t) \neq 0$ pour $t \geqslant t_n$ et par suite l'inégalité (21) est valable dans tout l'intervalle $[t_n, +\infty)$. En vertu de (13) et (11) on a

(24) $$0 < \int_{t_n}^{t} f(s)\,ds \leqslant c < \infty \quad \text{pour } t \geqslant t_n$$

et, en vertu de (12),

$$\left| \int_M^u \frac{dz}{g(z)} \right| > c \quad \text{pour } 0 < u \leqslant u_0 < M,$$

d'où, en vertu de (22) et (24), on obtient

(25) $$M \geqslant z_n(t) > u_0 \quad \text{pour } t_n \leqslant t < \infty,\ n = 1, 2, \ldots$$

et, en vertu de (22), on a

(26) $$\begin{aligned} M \geqslant x_n(t) \geqslant z_n(t) > u_0 \quad &\text{pour } \quad t_n \leqslant t < \infty, \\ M \geqslant x_n(t) = M > u_0 \quad &\text{pour } t_n - 1 \leqslant t \leqslant t_n. \end{aligned}$$

Envisageons $\alpha > 0$ quelconque. Pour $n \geqslant N_\alpha$ on a $t_n - 1 \leqslant t_n \leqslant -\alpha$ et par suite

(27) $$M \geqslant x_n(t) > u_0 \quad \text{pour } -\alpha \leqslant t \leqslant \alpha,\ n \geqslant N_\alpha.$$

En vertu de (9) on a donc

(28) $$|x_n'(t)| \leqslant k_\alpha \quad \text{pour } |t| \leqslant \alpha,\ n \geqslant N_\alpha,$$

d'où il résulte que l'on peut extraire de la suite $\{x_n(t)\}$ une suite uniformément convergente dans l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$ vers une solution $x(t)$ d'équation (1) et

$$0 < u_0 \leqslant x(t) \leqslant M \quad \text{pour } -\alpha \leqslant t \leqslant \alpha.$$

Du lemme L_1 il vient

$$x_n(t) \leqslant M = x_{n-1}(t) \quad \text{pour } t_{n-1}-1 \leqslant t \leqslant t_{n-1}$$

et par suite en vertu de H_1 1°–3° on a

$$x_n(t) \leqslant x_k(t) \quad \text{pour } n \geqslant k,\ t_k-1 \leqslant t < \infty,$$

$$u_0 < x_n(t) \leqslant x_k(t) \quad \text{pour } n \geqslant k,\ -\alpha \leqslant t \leqslant \alpha,\ k \geqslant N_\alpha,$$

c'est-à-dire que $x_n(t)$ est décroissante et bornée et par suite $\{x_n(t)\}$ est convergente dans tout l'intervalle $-\infty < t < +\infty$ et uniformément convergente dans chaque intervalle borné vers la solution $x(t)$ de l'équation (1) satisfaisant à l'inégalité

$$0 < u_0 \leqslant x(t) \leqslant M \quad \text{pour } -\infty < t < +\infty.$$

Il existe donc une solution bornée de l'équation (1) définie dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Le théorème T se trouve ainsi démontré.

Remarque R_1. It est évident que dans l'hypothèse H_2 il suffit d'admettre l'inégalité (14) pour

$$u_0 \leqslant x \leqslant M, \quad u_0 \leqslant \varphi \leqslant M,$$

car dans la démonstration du théorème T l'inégalité (21) suffit dans l'ensemble $x_n(t) \geqslant x \geqslant z_n(t)$ et $z_n(t) \geqslant u_0$ pour $t_n \leqslant t < \infty$.

Remarque R_2. Dans le cas où l'on admet au lieu de (13) l'hypothèse

$$\int_{-\infty}^{0} h(s)\,ds = c < \infty \tag{13*}$$

on obtient l'existence d'une solution $x(t)$ de l'équation (1) telle que

$$M \geqslant x(t) > 0 \quad \text{pour } -\infty < t < +\infty$$

au lieu de $M \geqslant x(t) \geqslant u_0 > 0$ pour $-\infty < t < +\infty$.

Dans le cas de l'inégalité (13*) pour chaque $T > 0$ on a

$$\int_{t_n}^{t} f(s)\,ds \leqslant c_T = c + \int_{0}^{T} f(s)\,ds \quad \text{pour } t_n \leqslant t \leqslant T$$

et

$$\left|\int_{M}^{u} \frac{dz}{g(z)}\right| > c_T \quad \text{pour } 0 < u \leqslant u_T$$

et par suite

$$z_n(t) \geqslant u_T > 0 \quad \text{pour } t_n \leqslant t \leqslant T$$

d'où il s'ensuit que dans l'intervalle $(-\infty, T]$ la suite $\{x_n(t)\}$ est convergente vers la solution $x(t)$ de l'équation (1) telle que

$$\dot{M} \geqslant x(t) \geqslant u_T > 0 \quad \text{pour } -\infty < t \leqslant T.$$

T étant quelconque, on a

$$M \geqslant x(t) > 0 \quad \text{pour } -\infty < t < +\infty.$$

EXEMPLE. Considérons l'équation suivante

$$(E_0) \qquad x'(t) = e^{t-1}\, x(t-1) - e^t\, x(t).$$

Dans ce cas on a pour chaque $M > 0$

$$f(t, M, M) = e^t M(e^{-1} - 1) < 0,$$

$$f(t, -M, -M) = -Me^t(e^{-1} - 1) > 0,$$

$$|f(t, x, \varphi)| \leqslant e^{\alpha} M \qquad \text{pour } \|\varphi\| \leqslant M,\ |x| \leqslant M,\ |t| \leqslant \alpha,$$

$$|f(t, x, . \varphi)| \geqslant -e^t x \qquad \text{pour } \varphi \geqslant 0,$$

c'est-à-dire qu'on peut poser

$$h(t) = e^t, \quad g(x) = -x,$$

$$-\int_{\varepsilon}^{M} \frac{dx}{x} \ln\frac{\varepsilon}{M} \to -\infty \qquad \text{pour } \varepsilon \to 0,\ 0 < \varepsilon < M,$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^t\, dt = 1 < \infty.$$

L'équation (E_0) satisfait donc à nos hypothèses avec (13*) au lieu de (13). Il existe donc une solution $x(t)$ de l'équation (E_0) telle que

$$0 < x(t) \leqslant M \quad \text{pour } -\infty < t < +\infty.$$

Reçu par la Rédaction le 1981.05.05