ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXV (1977)

Sur la stabilité asymptotique de la solution d'un système d'équations différentielles à paramètre retardé

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous démontrons un théorème sur la stabilité asymptotique de la solution $x = 0$ d'une système d'équations différentielles

(1) $$x'(t) = f(t, x_t(\cdot))$$

où $x = x_1, \ldots, x_n$, $f = f_1, \ldots, f_n$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $-h < \theta < 0$, $h > 0$, $f(t, \varphi(\cdot))$ est continue par rapport à $t, \varphi(\cdot)$ pour $t < 0$, $\varphi(\theta)$ continue dans l'intervalle $-h < \theta < 0$. Le théorème en question est une généralisation d'un théorème démontré dans la note [1].

1. Admettons les hypothèses suivantes:

Hypothèses H_1. *Il existe une fonction $V(x)$ de classe C^1 pour $x \neq 0$, continue pour $x = 0$, telle que*

(1.1) $$V(x) > 0 \qquad \textit{pour } x \neq 0,\ V(0) = 0,$$

(1.2) $$V(x) \geqslant P > 0 \qquad \textit{pour } |x| \geqslant r_0\ (r_0 > 0).$$

Pour chaque $\varphi(\theta)$ continue dans l'intervalle $-h \leqslant \theta \leqslant 0$ tel que $\varphi(0) \neq 0$ on a

(1.3) $$V_x(\varphi(0))f(t, \varphi(\cdot)) = \sum_{i=1}^{n} V_{x_i}(\varphi(0))f_i(t, \varphi(\cdot)) \leqslant g\Big(t, V(\varphi(0)), V(\varphi(-h)), \max_{-h\leqslant s\leqslant 0} V(\varphi(s))\Big)$$

où la fonction $g(t, u, v, z)$ satisfait aux conditions suivantes:

Hypothèses H_2. 1° *$g(t, u, v, z)$ est de classe C^1 pour $0 \leqslant u$, $0 \leqslant v$, $0 \leqslant z$, $0 \leqslant t$,*

(1.4) $$g(t, 0, 0, 0) = 0 \qquad \textit{pour } t \geqslant 0.$$

2° *$g(t, u, v, z)$ est strictement croissante par rapport à v et croissante par rapport à z pour $v \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.*

3° *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$g(t, M, M, M) < 0 \qquad \textit{pour } t \geqslant 0, \tag{1.5}$$

$$g_t(t, u, M, M) < 0 \qquad \textit{pour } 0 \leqslant u \leqslant M,\ t \geqslant 0, \tag{1.6}$$

$$g_u(t, u, M, M) < 0 \qquad \textit{pour } 0 \leqslant u \leqslant M,\ t \geqslant 0, \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\to\infty} g(t, u, M, M) \leqslant \gamma(u) < 0 \qquad \textit{pour } 0 < u \leqslant M,\ t \geqslant 0. \tag{1.8}$$

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* H_1 *et* H_2 *étant admises la solution* $x \equiv 0$ *de l'équation* (1) *est asymptotiquement stable.*

La démonstration du théorème peut être basée sur les lemmes suivants:

2. HYPOTHÈSES L_1.

(2.1) $F(t, w)$ *est une fonction de classe* C^1 *pour* $t \geqslant 0$, $w \geqslant 0$.

Il existe une constante $M > 0$ *telle que*

$$F(t, M) < 0 \qquad \textit{pour } t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

HYPOTHÈSES L_2. *Supposons que* $v(t)$ *soit de classe* C^1

$$v(t) < M \qquad \textit{pour } t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0, \tag{2.3}$$

$$v'(t) < F\big(t, v(t)\big) \qquad \textit{pour } t \geqslant t_0 \textit{ tels que } v(\tau) < M \tag{2.4}$$

$$\textit{pour } t - h \leqslant \tau \leqslant t.$$

LEMME 1. *Les hypothèses* L_1 *et* L_2 *étant admises, on a*

$$v(t) < w(t) < M \qquad \textit{pour } t > t_0$$

où $w(t)$ *est la solution de l'equation*

$$w'(t) = F\big(t, w(t)\big), \tag{2.5}$$

$$w(t_0) = M. \tag{2.6}$$

Démonstration. Supposons que

$$v(t) < w(t) \qquad \text{pour } t_0 \leqslant t < t_1, \tag{2.7}$$

$$v(t_1) = w(t_1). \tag{2.8}$$

Démontrons que $w(t) < M$ pour $t_0 < t$. On a

$$w'(t_0) = F(t_0, M) < 0$$

et par suite

$$w(t) < M \qquad \text{pour } t_0 < t \leqslant t_0 + \delta \ (\delta > 0).$$

En vertu de (2.2) on a $w'(t) < 0$ pour chaque $t > t_0$ tel que $w(t) = M$, par suite il n'existe pas de $\bar{t} > t_0$ tel que $w(\bar{t}) = M$ et $w(t) < M$ pour $\bar{t} - \delta \leqslant t < \bar{t}$. Donc

$$w(t) < M \quad \text{pour } t_0 < t < +\infty. \tag{2.9}$$

En vertu de (2.9), (2.7) et (2.8) on a

$$v(t) < M \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

donc, en vertu de (2.4), on a

$$v'(t_1) < F\big(t_1, v(t_1)\big) = w'(t_1)$$

d'où il vient

$$v(t) > w(t) \quad \text{pour } t_1 - \varepsilon \leqslant t < t_1$$

ce qui est incompatible avec (2.7), donc

$$v(t) < w(t) \quad \text{pour } t_0 \leqslant t < \infty. \tag{2.10}$$

3. HYPOTHÈSES L_3.

$$F(t, 0) > 0 \quad \textit{pour } t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$F_t(t, w) < 0 \quad \textit{pour } t \geqslant 0,\ 0 < w \leqslant M, \tag{3.2}$$

$$F_w(t, w) < 0 \quad \textit{pour } t \geqslant 0,\ 0 < w \leqslant M. \tag{3.3}$$

LEMME 2. *Les hypothèses* L_1 *et* L_3 *étant admises pour la solution* $w(t)$ *de l'équation*

$$w'(t) = F\big(t, w(t)\big) \tag{3.4}$$

avec la condition

$$w(t_0) = M, \quad t_0 \geqslant 0 \tag{3.5}$$

on a

$$w'(t) < 0 \quad \textit{pour } t \geqslant t_0. \tag{3.6}$$

Démonstration. De l'hypothese (3.1) et (2.2) il vient qu'il existe une fonction $w_M(t)$ telle que

$$F\big(t, w_M(t)\big) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0, \tag{3.7}$$

$$0 < w_M(t) < M. \tag{3.8}$$

En vertu de (2.1) et (3.3) la fonction $w_M(t)$ est de classe C^1 et on a

$$w_M'(t) = -\frac{F_t\big(t, w_M(t)\big)}{F_w\big(t, w_M(t)\big)} \tag{3.9}$$

d'où, en vertu de (3.2), (3.3) et (3.7), il vient

$$w'_M(t) < 0 = F\big(t, w_M(t)\big). \tag{3.10}$$

En vertu de (3.5) et (3.8) on a

$$w(t_0) > w_M(t_0)$$

et par suite de l'inégalité (3.10) il vient

$$w(t) > w_M(t) \quad \text{pour } t \geqslant t_0 \tag{3.11}$$

(cf. [2]).

La fonction $F(t, w)$ est décroissante par rapport à w pour $0 < w \leqslant M$, (3.3) et par suite, en vertu de (3.11) et (2.9), on a

$$w'(t) = F\big(t, w(t)\big) < F\big(t, w_M(t)\big) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant t_0.$$

Le lemme 2 est ainsi démontré.

4. LEMME 3. *Admettons les hypothèses* L_1 *et* L_2 *et supposons que pour la constante* a, $0 < a < M$ *on ait*

$$\lim_{t\to\infty} F(t, a) \leqslant \gamma(a) < 0. \tag{4.1}$$

Les hypotheses L_1, L_2 *et* (4.1) *étant admises, il existe un* $T_a > t_0$ *tel que*

$$w(t) < a \quad \textit{pour } t \geqslant T_a. \tag{4.2}$$

Démonstration. De l'hypothèse (4.1) il suit qu'il existe un $t^* > 0$ tel que $F(t, a) \leqslant \frac{1}{2}\gamma(a) < 0$ pour $t \geqslant t^*$. On a donc $w'(\bar{t}) < 0$ pour chaque $\bar{t} \geqslant t^*$ tel que $w(\bar{t}) = a$ et par suite, en vertu de la théorie des inégalités différentielles, de l'hypothèse $w(\hat{t}) < a$ pour $\hat{t} \geqslant t^*$ il résulte que $w(t) < a$ pour chaque $t \geqslant \hat{t}$, donc dans le cas où il n'existe pas de $T_a > t_0$ tel qu'on a (4.2) pour $t \geqslant T_a$ on a $w(t) \geqslant a$ pour $t \geqslant t_0$. Alors il existe un $\bar{t}^* \geqslant t_0$ tel que

$$w'(t) = F\big(t, w(t)\big) \leqslant F(t, a) \leqslant \tfrac{1}{2}\gamma(a) < 0 \quad \text{pour } t \geqslant \bar{t}^*$$

et par suite

$$a \leqslant w(t) \leqslant w(\bar{t}^*) + \tfrac{1}{2}\gamma(a)\,(t - \bar{t}^*) < a \quad \text{pour } \bar{t} \geqslant t.$$

De la contradiction obtenue il résulte que $w(t) < a$ pour t suffisamment grand. La démonstration est ainsi terminée.

5. Démonstration du théorème 1. Posons $v(t) = V\big(x(t)\big)$ et $F(t, w) = g(t, w, M, M)$, $t_0 = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} v'(t) &\leqslant g\big(t, v(t), v(t-h), \max_{-h\leqslant s\leqslant 0} v(t+s)\big) < g\big(t, v(t), M, M\big) \\ &= F\big(t, v(t)\big) \end{aligned}$$

pour $t > 0$ tel que $v(t-h) < M$ et $\max\limits_{-h\leqslant s\leqslant 0} v(t+s) \leqslant M$.

C'est-à-dire que les hypotheses du lemme 1 sont satisfaites (cf. (1.5) et (2.2)) et par suite

$$v(t) < w(t) < M \quad \text{pour } t \geqslant 0.$$

De l'hypothese (1.8) et du lemme 3 il suit que pour chaque $a > 0$ $(a < M)$ il existe un $T_a \geqslant 0$ tel que

$$v(t) < a \quad \text{pour } t \geqslant T_a.$$

De l'hypothèse (1.1) et (1.2) il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $a_\varepsilon > 0$ tel que

$$|x| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } x \text{ tel que } V(x) \leqslant a_\varepsilon.$$

Pour chaque $M > 0$ il existe un $\delta_0 > 0$ tel que

$$V(x) < M \quad \text{pour } |x| \leqslant \delta_0$$

et par suite de l'inegalite

$$|x(t)| \leqslant \delta_0 \quad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0$$

il suit que

$$V\big(x(t)\big) < a_\varepsilon \quad \text{pour } t \geqslant T_{a_\varepsilon}$$

donc

$$|x(t)| < \varepsilon \quad \text{pour } t \geqslant T_{a_\varepsilon}.$$

Nous avons ainsi démontré que dans le cas de l'unicité la solution $x \equiv 0$ du système (1) est asymtotiquement stable.

6. Remarque 1. Les hypothèses H_2 peuvent être remplacées par les suivantes:

HYPOTHÈSES $\bar{H}_2$. *$g(t, u, v, z)$ est de classe C^1 pour $0 \leqslant u$, $0 \leqslant v$, $0 \leqslant z$, $t \geqslant 0$*

(6.1) $$g(t, 0, 0, 0) = 0 \quad \textit{pour } t \geqslant 0,$$

$g(t, u, v, z)$ est strictement croissante par rapport à v et croissante par rapport à z.

Il existe un $M > 0$ tel que

(6.2) $$g(t, u, u, u) < 0 \quad \text{pour } 0 < u \leqslant M,$$

(6.3) $$g_u(t, u, v, v) < 0 \quad \text{pour } 0 < v \leqslant M,\ u \leqslant v,$$

(6.4) $$g_t(t, u, v, v) < 0 \quad \text{pour } 0 < v \leqslant M,\ u \leqslant v.$$

Pour chaque $a > 0$, $a < M$ il existe un $\eta_a > 0$ tel que

$$(\Gamma) \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} g(t, a, a+\eta_a, a+\eta_a) \leqslant \gamma(a) < 0.$$

Théorème 2. *Les hypotheses* H_1 *et* $\overline{\mathrm{H}}_2$ *étant admises, la solution* $x \equiv 0$ *du système* (1) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une solution $x(t)$ du système (1) qui ne converge pas vers zero. Alors

$$v(t) = V\big(x(t)\big) \not\to 0 \qquad \text{pour } t\to\infty.$$

En vertu des lemmes 1 et 2 on a

$$v(t) < w(t) < M \qquad \text{pour } 0 < t,$$

$$w'(t) < 0 \qquad \text{pour } 0 \leqslant t.$$

De l'hypothese que $v(t)\not\to 0$ il suit que $w(t)\not\to 0$. $w(t)$ est décroissante; donc il existe un $a_0 > 0$ tel que

$$(6.5) \qquad \lim_{t\to\infty} w(t) = a_0 > 0,$$

$$(6.6) \qquad w(t) > a_0 \qquad \text{pour } t > 0.$$

Posons

$$\varepsilon_1 = \min(\eta_{a_0}, \tfrac{1}{2}).$$

De (6.5) il suit qu'il existe un $t_1 > 0$ tel que

$$a_0 < w(t) < a_0+\varepsilon_1 \qquad \text{pour } t_1 < t$$

donc

$$v(t) < a_0+\varepsilon_1 \qquad \text{pour } t > t_1.$$

Posons

$$F_1(t, w) = g(t, w, a_0+\varepsilon_1, a_0+\varepsilon_1).$$

La fonction $F_1(t, w)$ satisfait aux hypothèses du lemme 1 et du lemme 2 avec $M = a_0+\varepsilon_1$ et $t_0 = t_1+h$; par conséquent

$$v(t) < w_1(t) < a_0+\varepsilon_1 \qquad \text{pour } t \geqslant t_1+h,$$

$$w'(t) < 0$$

où

$$w_1'(t) = F_1\big(t, w_1(t)\big), \qquad w_1(t_1+h) = a_0+\varepsilon_1.$$

De la relation $v(t)\to 0$ il suit que $w_1(t)\not\to 0$ et, par suite, il existe un $a_1 > 0$ tel que

$$\lim_{t\to\infty} w_1(t) = a_1 < a_0+\varepsilon_1.$$

D'une façon analogue on peut construire la suite $\{w_n(t)\}$, $\{a_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, $\{t_n\}$. On a

$$w_0(t) = w(t),$$

$$a_n = \lim_{t\to\infty} w_n(t), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{6.7}$$

$$w_n'(t) = g\big(t, w_n(t), a_{n-1}+\varepsilon_n, a_{n-1}+\varepsilon_n\big) \tag{6.8}$$
$$= F_n\big(t, w_n(t)\big),$$

$$w_n(t_n+h) = a_{n-1}+\varepsilon_n, \tag{6.9}$$

$$\varepsilon_n = \min(\eta_{a_{n-1}}, \tfrac{1}{2}n), \tag{6.10}$$

t_n est tel que

$$w_{n-1}(t) < a_{n-1}+\varepsilon_n \qquad \text{pour } t \geqslant t_n. \tag{6.11}$$

Une tel t_n existe, car $w_n(t)$ est décroissante et $\lim\limits_{t\to\infty} w_n(t) = a_n$. En vertu des lemmes 1 et 2 on a

$$\begin{aligned} &v(t) < w_n(t) < a_{n-1}+\varepsilon_n \qquad \text{pour } t \geqslant t_n+h, \\ &w_n'(t) < 0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Supposons que

$$a_{n-1} \leqslant a_n \qquad \text{pour un } n \geqslant 1.$$

On a

$$a_{n-1} \leqslant a_n < w_n(t) < a_{n-1}+\varepsilon_n. \tag{6.13}$$

En vertu de (6.8) et (6.10) on a

$$\begin{aligned} w_n'(t) &= F_n\big(t, w_n(t)\big) = g\big(t, w_n(t), a_{n-1}+\varepsilon_n, a_{n-1}+\varepsilon_n\big) \\ &< g\big(t, w_n(t), a_{n-1}+\eta_{a_{n-1}}, a_{n-1}+\eta_{a_{n-1}}\big) \end{aligned}$$

d'où, en vertu de (6.3) et (6.13), on a

$$w_n'(t) < g(t, a_{n-1}, a_{n-1}+\eta_{a_{n-1}}, a_{n-1}+\eta_{a_{n-1}})$$

et en vertu de (Γ)

$$\lim_{t\to\infty} w_n'(t) \leqslant \gamma(a_{n-1}) < 0$$

d'où

$$w_n'(t) \leqslant \tfrac{1}{2}\gamma(a_{n-1}) < 0 \qquad \text{pour } t \geqslant T_n$$

donc

$$w_n(t) \leqslant w_n(T_n) + \tfrac{1}{2}\gamma(a_{n-1})\,(t-T_n)$$

d'où en vertu de (6.13) on a

$$a_n < w_n(T_n) + \tfrac{1}{2}\gamma(a_{n-1})\,(t-T_n) < a_n.$$

et par suite

(6.14) $$0 < a_n < a_{n-1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

Nous allons démontrer que $a_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Supposons que $a_n \not\to 0$. En vertu de (6.14) il existe un $a^* > 0$ tel que

(6.15) $$\lim_{n\to\infty} a_n = a^*.$$

Il existe un $N_1 > 0$ tel que

$$a_{n-1} < a^* + \tfrac{1}{2}\eta_{a^*} \quad \text{pour } n \geqslant N_1.$$

De la définition de ε_n il suit que $\varepsilon_n \to 0$ et, par suite, il existe un $N_2 > 0$ tel que

$$\varepsilon_n \leqslant \tfrac{1}{2}\eta_{a^*} \quad \text{pour } n \geqslant N_2.$$

Nous avons donc

$$a_{n-1} + \varepsilon_n < a^* + \eta_{a^*} \quad \text{pour } n \geqslant N_3$$

où

$$N_3 = \max(N_1, N_2)$$

et par suite

$$a^* < a_{N_3} \leqslant w_{N_3}(t) < a_{N_3-1} + \varepsilon_{N_3} < a^* + \eta_{a^*}$$

d'où

$$\begin{aligned} w'_{N_3}(t) &< g(t, a^*, a_{N_3-1} + \varepsilon_{N_3}, a_{N_3-1} + \varepsilon_{N_3}) \\ &\leqslant g(t, a^*, a^* + \eta_{a^*}, a^* + \eta_{a^*}) \leqslant \gamma(a^*) < 0 \quad \text{pour } t \geqslant t^* \end{aligned}$$

et enfin

$$a^* < a_{N_3} \leqslant w_{N_3}(t) \leqslant w_{N_3}(t^*) + \gamma(a^*)(t - t^*) < a^*$$

pour t suffisamment grand, donc $a^* = 0$. Le théorème est ainsi démontré.

7. Example. Comme example envisageons le cas où

$$f(t, \varphi(\cdot)) = \tilde{f}\Big(t, \varphi(0), \varphi(-h), \int_{-h}^{0} \varphi(s)\,ds\Big)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(0)\cdot\tilde{f}\Big(t, \varphi(0), \varphi(-h), \int_{-h}^{0} \varphi(s)\,ds\Big) & \\ \leqslant p(t)\varphi^2(0) + q(t)\varphi(0)\varphi(-h) + r(t) \int_{-h}^{0} \varphi(0)\varphi(s)\,ds & \end{aligned}$$

où

$$\begin{gathered} p(t) + |q(t)| + |r(t)|h \leqslant -a \quad (a > 0), \\ \big(|q(t)| + |r(t)|h\big)' < 0, \\ p'(t) + \big(|q(t)| + |r(t)|h\big)' < 0. \end{gathered}$$

Dans le cas envisagé on peut poser

$$V(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

$$V_x\big(\varphi(0)\big)f\big(t,\varphi(\cdot)\big) \leqslant p(t)\,V\big(\varphi(0)\big) + |q(t)|\,V\big(\varphi(-h)\big) + |r(t)|\,h \max_{-h\leqslant s\leqslant 0} V\big(\varphi(s)\big)$$
$$= g\Big(t,\ V\big(\varphi(0)\big),\ V\big(\varphi(-h)\big),\ \max_{-h\leqslant s\leqslant 0} V\big(\varphi(s)\big)\Big);$$

$g(t, u, v, z)$ ainsi définie satisfait aux hypothèses $\mathbf{H}_1$ et $\overline{\overline{\mathbf{H}}}_2$

$$\begin{aligned} g(t,u,u,u) &= \big(p(t)+|q(t)|+h|r(t)|\big)u < 0 \qquad \text{pour } u>0,\\ g_u(t,u,v,v) &= p(t) < 0,\\ g_t(t,u,v,v) &= p'\,u + |q(t)|'v + h|r(t)|'v. \end{aligned}$$

Dans le cas où

$$p'>0,\qquad p'u+\big(|q(t)|+h|r(t)|\big)'v \leqslant \Big(p'+\big(|q(t)|+h|r(t)|\big)'\Big)v<0$$
$$\text{pour } 0<u\leqslant v.$$

Dans le cas où $p'<0$

$$p'u+\big(|q(t)|+h|r(t)|\big)'v \leqslant \big(|q(t)|+h|r(t)|\big)'v<0.$$

Pour démontrer (Γ) envisageons

$$\begin{aligned} g(t,a,a+\eta_a) &= p(t)a+|q(t)|(a+\eta_a)+h|r(t)|(a+\eta_a)\\ &= \big(p(t)+|q(t)|+h|r(t)|\big)a+\big(|q(t)|+h|r(t)|\big)\eta_a\\ &\leqslant -\alpha a+\big(|q(t)|+h|r(t)|\big)\eta_a. \end{aligned}$$

On a $\big(|q(t)|+h|r(t)|\big)'<0$ et par suite

$$|q(t)|+h|r(t)| \leqslant |q(0)|+h|r(0)| = \beta$$

d'où

$$g(t,a,a+\eta_a) \leqslant -\alpha a+\beta\eta_a.$$

Posons

$$\eta_a = \frac{\alpha a}{2\beta}.$$

On a donc

$$g(t,a,a+\eta_a) \leqslant -\frac{\alpha}{2}a = \gamma(a) < 0 \qquad \text{pour } a>0$$

et par suite, en vertu du théorème 2, $x\equiv 0$ est une solution asymptotiquement stable pour l'équation

$$x'(t) = \tilde{f}\Big(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \int_{-h}^{0} x(t+s)\,ds\Big).$$

Références

[1] Z. Mikołajska, *Remarque sur la stabilité asymptotique de la solution d'un système d'équations différentielles à paramètre retardé*, Ann. Polon. Math. 19 (1967), p. 163–167.

[2] J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

Reçu par la Rédaction le 13. 3. 1975