NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

НЕКОТОРЫЕ КОЛЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. М. ВАЙНИККО

Тартуский Государственный Университет, фак. мат., Тарту, СССР

§ 1. Гладкость решения

В данной работе рассматривается линейное интегральное уравнение II рода

$$u(x) = \int_G K(x, y)u(y)\,dy + f(x), \qquad x \in G, \tag{1.1}$$

где $G \subset \boldsymbol{R}^n$ — открытое ограниченное множество. Предполагается, что ядро $K(x, y)$ имеет на множестве $(G \times G)\setminus\{x = y\}$ непрерывные производные до порядка m и существует такое ν $(-\infty < \nu < n)$, что

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\beta_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\beta_n} K(x, y)\right| \leqslant c \begin{cases} 1 + |x-y|^{-\nu-|\alpha|}, & \nu + |\alpha| \neq 0, \\ 1 + \big|\log|x-y|\big|, & \nu + |\alpha| = 0, \end{cases} \quad |\alpha| + |\beta| \leqslant m. \tag{1.2}$$

Здесь c — постоянная, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Обратим внимание на то, что правая часть оценки не зависит от $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Условию (1.2) удовлетворяют, например, ядра вида

$$K(x, y) = k(x, y)|x-y|^{-\nu}, \qquad -\infty < \nu < n,$$
$$K(x, y) = k(x, y)\log|x-y|, \qquad (\nu = 0),$$

где m раз непрерывно дифференцируемая в $(G \times G)\setminus\{x = y\}$ функция $k(x, y)$ такова, что

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\beta_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\beta_n} k(x, y)\right| \leqslant c|x-y|^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| + |\beta| \leqslant m.$$

Построение эффективных методов решения подобных уравнений немыслимо без учета особенностей производных решения возле границы ∂G. Наличие особенностей — факт элементарный, но их точное описание и обоснование соответствующих утверждений наталкивается на значительные трудности. Случай одномерных интегральных уравнений ($n = 1$) проанализирован в [11, 12, 5, 14, 8, 3], многомерных — в [9, 10]. Формулируемая ниже Теорема 1 близка результату [10]. Вытекающие из Теоремы 1 оценки роста производных решения в некоторых ситуациях неулучшаемые. Оказывается, однако, что для тангенциальных производных результат допускает усиление — см. Теорему 2 ниже.

Обозначим через $C^{m,\nu}(G)$ пространство функций $u(x)$, $x \in G$, которые имеют в G непрерывные производные до порядка m и для которых конечна норма

$$\|u\|_{m,\nu} =$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \sup\limits_{x \in G} |D^\alpha u(x)|, & m < n-\nu, \\ \sum\limits_{|\alpha| < n-\nu} \sup\limits_{x \in G} |D^\alpha u(x)| + \sum\limits_{|\alpha| = n-\nu} \sup\limits_{x \in G} \dfrac{|D^\alpha u(x)|}{1+|\log \varrho(x)|}, & m = n-\nu, \\ \sum\limits_{|\alpha| < n-\nu} \sup\limits_{x \in G} |D^\alpha u(x)| + \sum\limits_{|\alpha| = n-\nu} \sup\limits_{x \in G} \dfrac{|D^\alpha u(x)|}{1+|\log \varrho(x)|} & \\ \quad + \sum\limits_{n-\nu < |\alpha| \leqslant m} \sup\limits_{x \in G} \varrho(x)^{|\alpha|-(n-\nu)} |D^\alpha u(x)|, & m > n-\nu,\ \nu \text{ целое}, \\ \sum\limits_{|\alpha| < n-\nu} \sup\limits_{x \in G} |D^\alpha u(x)| + \sum\limits_{n-\nu < |\alpha| \leqslant m} \sup\limits_{x \in G} \varrho(x)^{|\alpha|-(n-\nu)} |D^\alpha u(x)|, & \\ & m > n-\nu,\ \nu \text{ дробное}. \end{cases}$$

Здесь $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial G)$ — расстояние от x до границы ∂G множества G.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1.2), *и пусть* $f \in C^{m,\nu}(G)$. *Тогда, если уравнение* (1.1) *разрешимо в* $L_1(G)$, *то любое решение* $u \in L_1(G)$ *принадлежит* $C^{m,\nu}(G)$, *причем* $\|u\|_{m,\nu} \leqslant c_1 \|u\|_{L_1} + c_2 \|f\|_{m,\nu}$, *где постоянные* c_1 *и* c_2 *не зависят от* f *и* u.

В этой теореме G — произвольное открытое ограниченное множество в $\boldsymbol{R}^n$. При изучении поведения тангенциальных производных предполагается, что ∂G кусочно гладка, т.е. состоит из конечного числа гладких гиперповерхностей в $\boldsymbol{R}^n$, которые могут пересекаться по многообразиям более низких размерностей. Пусть $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$, $x \in \bar{G} = G \cup \partial G$ — векторное поле класса $[C^m(\bar{G})]^n$. Это поле строим касательным к ∂G (если это возможно) или к некоторой части ∂G. Обозначим через Γ_a ту часть ∂G, к которой поле a касательно. Более точно, $x_0 \in \Gamma_a$ означает, что $x_0 \in \partial G$, $a(x_0) \neq 0$ и вектор $a(x_0)$ ортогонален нормали каждой гиперповерхности в точке x_0, входящей в состав ∂G

и содержащей точку x_0. Введем операторы тангенциального (возле Γ_a) дифференцирования

$$\mathscr{L}_a^1 = \mathscr{L}_a = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \mathscr{L}_a^k = \mathscr{L}_a \mathscr{L}_a^{k-1}, \qquad k = 2, \ldots, m,$$

а также функцию $\varrho_a(x) = \operatorname{dist}(x, \partial G \backslash \Gamma_a)$. Через $C_a^{m,\nu}(G)$ обозначим пространство тех функций u из $C^{m,\nu}(G)$, для которых конечна норма $\|u\|_{m,\nu,a} = \|u\|_{m,\nu} + |u|_{m,\nu,a}$ с

$$|u|_{m,\nu,a} = \begin{cases} 0, & m < n-\nu, \\ \sup\limits_{x\in G} \dfrac{|\mathscr{L}_a^m u(x)|}{1+|\log \varrho_a(x)|}, & m = n-\nu, \\ \sup\limits_{x\in G} \dfrac{|\mathscr{L}_a^{n-\nu} u(x)|}{1+|\log \varrho_a(x)|} + \sum\limits_{n-\nu<k\leqslant m} \sup\limits_{x\in G} \varrho_a(x)^{k-(n-\nu)} |\mathscr{L}_a^k u(x)|, & \\ & m > n-\nu,\ \nu \text{ целое}, \\ \sum\limits_{n-\nu<k\leqslant m} \sup\limits_{x\in G} \varrho_a(x)^{k-(n-\nu)} |\mathscr{L}_a^k u(x)|, & m > n-\nu,\ \nu \text{ дробное}, \end{cases}$$

и которые обладают следующей дополнительной гладкостью возле границы:

(1.3) $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : x_1, x_2 \in G,$

$$d_G(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |D^\alpha u(x_1) - D^\alpha u(x_2)| < \varepsilon \qquad (0 \leqslant |\alpha| < n-\nu);$$

(1.4) $\quad \forall \varepsilon > 0\ \forall \eta > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta) > 0 : x_1, x_2 \in G,$

$$\varrho_a(x_i) \geqslant \eta \ (i = 1, 2),\ d_G(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |\mathscr{L}_a^k u(x_1) - \mathscr{L}_a^k u(x_2)| < \varepsilon \ (1 \leqslant k \leqslant m).$$

Здесь $d_G(x_1, x_2)$ — инфимум длин ломаных, лежащих в G и соединяющих точки x_1 и x_2; если x_1 и x_2 принадлежат разным компонентам связности множества G, то условимся считать $d_G(x_1, x_2) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть граница ∂G кусочно гладка, $a(x)$ — векторное поле класса $[C^m(\bar{G})]^n$. Пусть выполнено условие* (1.2) *и следующее дополнительное условие*:

(1.5) $\quad \forall \varepsilon > 0\ \forall \eta > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta) > 0 : x_1, x_2, y \in G,$

$$d_G(x_1, x_2) < \delta,\ |y - x_i| \geqslant \eta \ (i = 1, 2)$$
$$\Rightarrow |D_x^\alpha D_y^\beta K(x_1, y) - D_x^\alpha D_y^\beta K(x_2, y)| < \varepsilon \qquad (|\alpha| + |\beta| \leqslant m).$$

Пусть $f \in C_a^{m,\nu}(G)$. Тогда, если уравнение (1.1) *разрешимо в $L_1(G)$, то любое решение $u \in L_1(G)$ принадлежит $C_a^{m,\nu}(G)$, причем $\|u\|_{m,\nu,a} \leqslant c_1 \|u\|_{L_1} + c_2 \|f\|_{m,\nu,a}$, где постоянные c_1 и c_2 не зависят от f и u.*

Оценки роста производных решения возле границы, вытекающие из Теоремы 1, в некоторых случаях для нормальных производных неулучшаемы. Такова ситуация например, в случае ядра Пайэрлса $K(x, y) = \sigma e^{-\sigma|x-y|}|x-y|^{-2}$ (см. [4]) в выпуклой области $G \subset \boldsymbol{R}^3$ с гладкой границей ∂G и с $f \in C^m(\bar{G})$, $f(x) > 0$ $(x \in \bar{G})$. А именно, можно показать, что первая нормальная производная решения $u(x)$ уравнения Пайэрлся $(n = 3, \nu = 2)$ действительно ведет себя как $|\log \varrho(x)|$, а κ-ая $(2 \leqslant k \leqslant m)$ производная — как $\varrho(x)^{-k+1}$. С другой стороны, даже при $f \in C_a^{m,\nu}(G)$ $(\supset C^m(\bar{G}))$ тангенциальные производные $\mathscr{L}_a^k u(x)$, $k = 1, \ldots, m$, ограничены возле каждого участка границы, на котором $\varrho_a(x) \geqslant \eta > 0$. Гладкость решения более общих интегральных уравнений теории переноса излучения обсуждается в [2].

В условиях Теоремы 2 решение $u(x)$ имеет предельные значения в граничных точках, но по разным компонентам связности G эти предельные значения могут быть разными. Однако, если $f \in C(\bar{G})$ и $K(x, y)$ непрерывно на $(\bar{G} \times G) \backslash \{x = y\}$, то решение уравнения (1.1) принадлежит $C(\bar{G})$.

Доказательство Теорем 1 *и* 2 основывается на одной идее из [3]: достаточно установить, что интегральный оператор T, $(Tu)(x) = \int_G K(x, y) \times u(y)\,dy$ действует в пространствах $C^{m,\nu}(G)$ и $C_a^{m,\nu}(G)$, причем некоторая его степень — вполне непрерывный оператор в указанных пространствах.

§ 2. Кусочно-постоянная аппроксимация решения

Будем считать, что (открытое ограниченное) множество G удовлетворяет условию конуса в следующей форме (ср. [6])

$$\exists a > 0 \ \exists r \in (0, a): \forall x \in G \ \exists z \in \boldsymbol{R}^n, |z| = 1: C_{x, x+az, r} \subset G, \tag{2.1}$$

где $C_{x,y,r} = \operatorname{co}\{x, B(y, r)\}$ — выпуклая оболочка точки x и шара $B(y, r) = \{z \in \boldsymbol{R}^n: |z-y| < r\}$. Для достаточно малых $h (0 < h < \bar{h})$ проаппроксимируем G множеством $G_h = \bigcup_{j=1}^{l_h} G_{jh}$, где G_{jh}, $j = 1, \ldots, l_h$ — попарно непересекающиеся, измеримые по Лебегу подмножества $\boldsymbol{R}^n$ положительной меры $\operatorname{mes} G_{jh}$, такие что $G_{jh} \cap G \neq \emptyset$ $(j = 1, \ldots, l_h)$,

$$\operatorname{diam} G_{jh} \leqslant h \quad (j = 1, \ldots, l_h), \tag{2.2}$$

$$\sup_{x \in \partial G_h} \inf_{y \in \partial G} |x-y| \leqslant ch^2, \quad \sup_{x \in \partial G} \inf_{y \in \partial G_h} |x-y| \leqslant ch^2. \tag{2.3}$$

Определим точки коллокации $\xi_{jh} \in G_{jh} \cap G$, $j = 1, \ldots, l_h$. В случае $\operatorname{co} G_{jh} \subset G$ коллокацию будем проводить в „центре тяжести"

$$\xi_{jh} = \frac{1}{\operatorname{mes} G_{jh}} \int_{G_{jh}} y\,dy, \tag{2.4}$$

предполагая, что он принадлежит G_{jh}. В остальных (в приграничных) множествах G_{jh} выбор точки $\xi_{jh}\in G_{jh}\cap G$ произволен. Предполагается, что для всех множеств G_{jh} выполнено следующее условие:

$$\begin{gathered}\forall y\in G_{jh}\cap G \quad (1\leqslant j\leqslant l_h)\ \exists z\in G: |z-\xi_{jh}|\leqslant ch,\\ \operatorname{co}\{y,\ B(z,\ bh)\}\subset G,\qquad \operatorname{co}\{\xi_{jh},\ B(z,\ bh)\}\subset G.\end{gathered}\tag{2.5}$$

Здесь b и c — положительные постоянные, не зависящие от h; постоянная c в разных условиях может иметь разные численные значения.

В случае гладкой границы ∂G перечисленным условиям удовлетворяет, например, прямоугольное разбиение G шага h_k по переменной $x_k (h_1^2+\ldots+h_n^2\leqslant h^2)$, аппроксимируя ∂G в пределах ячеек, пересекающихся с ∂G, касательными плоскостями; в двумерном случае равным образом можно использовать секущие ∂G.

Приближенные значения $u_i=u_{ih}\approx u(\xi_{ih})$ решения уравнения (1.1) определим из системы уравнений

$$u_i=\sum_{j=1}^{l_h}\int_{G_{jh}}K(\xi_{ih},\ y)dy\,u_j+f(\xi_{ih}),\qquad i=1,\ldots,\ l_h.\tag{2.6}$$

При этом считаем, что $K(x,\ y)$ продолжено по y на G_h с сохранением свойства (см. (1.2))

$$|K(x,\ y)|\leqslant c\begin{cases}1+|x-y|^{-\nu}, & \nu\neq 0,\\ 1+\big|\log|x-y|\big|, & \nu=0,\end{cases}\quad x\in G,\ \ y\in G_h.\tag{2.7}$$

Этому условию удовлетворяет, в частности продолжение нулем, но с вычислительной точки зрения такое продолжение неразумно — теряются алгоритмические преимущества за счет аппроксимации границы.

На систему (2.6) можно смотреть как на систему метода коллокации для аппроксимирующего (1.1) уравнения

$$u(x)=\int_{G_h}K(x,\ y)u(y)dy+f(x),$$

представив приближенное решение в виде кусочно-постоянной функции

$$u^h(x)=\sum_{j=1}^{l_h}u_j\varphi_{jh}(x),\qquad \varphi_{jh}(x)=\begin{cases}1, & x\in G_{jh},\\ 0, & x\notin G_{jh},\end{cases}$$

и проведя коллокацию в точках ξ_{ih}, $i=1,\ldots,\ l_h$ (ср. [7]).

Теорема 3. *Пусть $f\in C^{2,\nu}(G)$, ядро $K(x,\ y)$ удовлетворяет условию* (1.2) *с $m=2$ и условию* (1.5) *с $m=0$, и пусть однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению* (1.1), *имеет лишь нулевое решение. Пусть граница ∂G кусочно гладка и выполнены условия* (2.1)–(2.5).

Тогда найдется такое $h_0 > 0$, *что при* $h \leqslant h_0$ *система уравнений* (2.6) *имеет единственное решение* $\overset{*}{u}_1, \ldots, \overset{*}{u}_{l_h}$, *и*

$$(2.8)\quad \max_{1 \leqslant i \leqslant l_h} |\overset{*}{u}_i - u^*(\xi_{ih})| \leqslant c\varepsilon_{vh}^2, \qquad \varepsilon_{vh} = \begin{cases} h, & v < n-1 \\ h(1+|\log h|), & v = n-1, \\ h^{n-v}, & n-1 < v < n, \end{cases}$$

где $u^*(x)$ — *решение уравнения* (1.1).

Доказательство основывается на теории компактной сходимости операторов (см. [1, 13]). Введем пространство $E = C(G)$ непрерывных ограниченных на G функций с нормой $\|u\|_E = \|u\|_0 = \sup_{x\in G}|u(x)|$ и пространство $E_h = C(\Xi_h)$ сеточных функций с нормой $\|u_h\|_{E_h} = \|u_h\|_h = \sup_{\xi\in\Xi}|u_h(\xi)|$, где $\Xi_h = \{\xi_{ih}\}_{i=1}^{l_h}$, а также линейные связывающие отображения p_h: $E \to E_h$, $(p_h u)(\xi_{ih}) = u(\xi_{ih})$, $i = 1, \ldots, l_h$, $u \in E$. Очевидно, $\|p_h u\|_h \to \|u\|_0$ при $h \to 0$ для каждого $u \in E$. Обозначим $\mathscr{P} = (p_h)_{0<h<\bar{h}}$. По определению, $\mathscr{P}$-сходимость $u_h \to u$ $(u_h \in E_h,\ u \in E)$, $h \to 0$, означает, что $\|u_h - p_h u\|_h \to 0$ при $h \to 0$; система элементов (v_h) $(v_h \in E_h,\ 0 < h < \bar{h})$ $\mathscr{P}$-компактна, если любая последовательность (v_{h_n}), $h_n \to 0$, содержит $\mathscr{P}$-сходящуюся подпоследовательность. Введем, далее, линейные операторы T: $E \to E$ и T_h: $E_h \to E_h$,

$$(Tu)(x) = \int_G K(x, y)u(y)dy, \qquad x \in G,\ u \in E,$$

$$(T_h u_h)(\xi_{ih}) = \sum_{j=1}^{l_h} \int_{G_{jh}} K(\xi_{ih}, y)dy\, u_h(\xi_{jh}), \qquad i = 1, \ldots, l_h,\ u_h \in E_h,$$

Из (2.7) следует, что операторы T_h ограничены равномерно по h:

$$(2.9)\qquad \|T_h\| \leqslant \text{const} \qquad (0 < h < \bar{h}).$$

Уравнение (1.1) и система уравнений (2.6) в этих обозначениях имеют, соответственно, вид $u = Tu + f$ и $u_h = T_h u_h + p_h f$.

Отметим одно свойство ядра уравнения (1.1):

$$(2.10)\qquad \sup_{x\in G} \int_{\{y\in G:\, \varrho(y)<h\}} |K(x, y)|dy \leqslant c\varepsilon_{vh}, \qquad 0 < h < \bar{h},$$

где ε_{vh} — определенная в (2.8) величина. Доказательство основывается на оценке (1.2) с $m = 0$ и на кусочной гладкости ∂G, позволяющей локально провести спрямляющую ∂G замену переменных интегрирования, так что технически дело сводится к несложной проверке неравенства

$$\int_{|y_1|<1, \ldots, |y_{n-1}|<1, |y_n|<h} |x-y|^{-v} dy \leqslant c\varepsilon_{vh}, \qquad h > 0.$$

Убедимся, что оператор T: $E \to E$ (и даже T: $L_\infty(G) \to E$) вполне непрерывен. Пусть $(u_k) \subset E$ — произвольная ограниченная последовательность, $\|u_k\|_0 \leqslant 1$; обозначим $v_k = Tu_k$. Очевидно, $\|v_k\|_0 \leqslant \text{const}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Учитывая, что

$$|v_k(x_1) - v_k(x_2)| \leqslant \int_G |K(x_1, y) - K(x_2, y)|\, dy$$
$$\leqslant \int_{\{y \in G: |y - x_i| \geqslant \eta, i = 1,2\}} |K(x_1, y) - K(x_2, y)|\, dy$$
$$+ \int_{B(x_1,\eta) \cup B(x_2,\eta)} c(|x_1 - y|^{-\nu} + |x_2 - y|^{-\nu})\, dy,$$

с помощью условия (1.5) $(m = 0)$ убеждаемся в следующей равностепенной непрерывности функций v_k:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: x_1, x_2 \in G,$$
$$d_G(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |v_k(x_1) - v_k(x_2)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Это свойство сохраняется при продолжении v_k по непрерывности на компакт G^*, получаемый замыканием G по метрике $d_G(x_1, x_2)$. По теореме Арцела последовательность (v_k) содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность, и полная непрерывность операторы $T: E \to E$ установлена.

Покажем теперь, что операторы $T_h: E_h \to E_h$ обладают следующим свойством „коллективной" компактности:

(2.11) $$u_h \in E_h,\ \|u_h\|_h \leqslant 1\ (0 < h < \bar{h}) \Rightarrow (T_h u_h)\ \mathscr{P}\text{-компактна.}$$

Обозначим $u^h(x) = \sum_{j=1}^{l_h} u_h(\xi_{jh})\varphi_{jh}(x)$ — это кусочно-постоянное восполнение на G_h сеточной функции u_h; продолжим $u^h(x)$ нулем на $G \backslash G_h$ и обозначим

$$v^h(x) = \int_G K(x, y) u^h(y)\, dy, \qquad 0 < h < \bar{h}.$$

Система $(v^h) \subset E$ относительно компактна при $h \to 0$, так как оператор $T: L_\infty \to E$ вполне непрерывен. Из (2.3) и (2.10) следует, что

$$\|p_h v^h - T_h u_h\|_h = \max_{1 \leqslant i \leqslant l_h} \left|\int_G K(\xi_{ih}, y) u^h(y)\, dy - \int_{G_h} K(\xi_{ih}, y) u^h(y)\, dy\right| \to 0, \qquad h \to 0,$$

и $\mathscr{P}$-компактность $(T_h u_h)$ следует из относительной компактности $(v^h) \subset E$.

Несложно непосредственно доказать, что

(2.12) $$\|T_h p_h u - p_h T u\|_h \to 0 \quad \text{при } h \to 0 \quad \forall u \in E;$$

мы здесь проще получаем это соотношение косвенно, учитывая (2.9), плотность $C^{2,\nu}(G)$ в E и неравенство

(2.13) $$\|T_h p_h u - p_h T u\|_h \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2, \qquad u \in C^{2,\nu}(G),$$

доказываемое несколько позже. По терминологии [1, 13], соотношения (2.9), (2.11), (2.12) означают, что система операторов $T_h: E_h \to E_h$ при $h \to 0$

компактно сходится к $T: E \to E$. При сделанных предположениях уравнение $u = Tu + f$ имеет в E единственное решение u^* (которое по Теореме 1 принадлежит $C^{2,\nu}(G)$). Из компактной сходимости $T_h \to T$ следует (см. [1, 13]), что при достаточно малых h уравнение $u_h = T_h u_h + p_h f$ имеет единственное решение $u_h^* \in E_h$, причем $\|u_h^* - p_h u^*\|_h \to 0$ при $h \to 0$ с оценкой

$$\|u_h^* - p_h u^*\|_h \leqslant c \|T_h p_h u^* - p_h Tu^*\|_h.$$

С учетом (2.13) это и есть оценка (2.8).

Итак, для завершения доказательства теоремы остается установить (2.13). Имеем

$$\|T_h p_h u - p_h Tu\|_h = \max_{1 \leqslant i \leqslant l_h} \Big| \sum_{j=1}^{l_h} \int_{G_{jh}} K(\xi_{ih}, y) u(\xi_{jh}) dy - \int_G K(\xi_{ih}, y) u(y) dy \Big| \leqslant \varkappa_h,$$

где

$$\varkappa_h = \sup_{x \in G} \Big| \sum_{j=1}^{l_h} \int_{G_{jh}} K(x, y) u(\xi_{jh}) dy - \int_G K(x, y) u(y) dy \Big|. \tag{2.14}$$

В силу (2.3) и (2.10)

$$\begin{aligned} \varkappa_h &\leqslant \sup_{x \in G} \Big| \sum_{j=1}^{l_h} \int_{G_{jh} \cap G} K(x, y) [u(y) - u(\xi_{jh})] dy \Big| + c\varepsilon_{\nu h}^2 \\ &\leqslant \varkappa_h^{(1)} + \varkappa_h^{(2)} + \varkappa_h^{(3)} + \varkappa_h^{(4)} + c\varepsilon_{\nu h}^2, \end{aligned}$$

где

$$\varkappa_h^{(1)} = \sup_{x \in G} \sum_{j \in J_h(x)} \int_{G_{jh} \cap G} |K(x, y)| \, |u(y) - u(\xi_{jh})| dy,$$

$$\varkappa_h^{(2)} = \sup_{x \in G} \sum_{j \in J_h(\partial G)} \int_{G_{jh} \cap G} |K(x, y)| \, |u(y) - u(\xi_{jh})| dy,$$

$$\varkappa_h^{(3)} = \sup_{x \in G} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J_h(x), j \notin J_h(\partial G)}}^{l_h} \int_{G_{jh}} |K(x, y)| \, |u(y) - u(\xi_{jh}) - u'(\xi_{jh})(y - \xi_{jh})| dy,$$

$$\varkappa_h^{(4)} = \sup_{x \in G} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J_h(x), j \notin J_h(\partial G)}}^{l_h} \Big| \int_{G_{jh}} K(x, y) u'(\xi_{jh})(y - \xi_{jh}) dy \Big|,$$

$$J_h(x) = \{ j : 1 \leqslant j \leqslant l_h, \ \operatorname{dist}(x, \operatorname{co} G_{jh}) < h \},$$

$$J_h(\partial G) = \{ j : 1 \leqslant j \leqslant l_h, \ \inf_{y \in \operatorname{co} G_{jh}, y^0 \in \partial G} |y - y^0| < h \},$$

$u'(x): R^n \to R$ — производная Фреше функции u в точке $x \in G$, т.е. $u'(x) y = \sum_{k=1}^n \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_k} y_k$, $y \in R^n$.

Убедимся, что

$$\sup_{y \in G_{jh} \cap G} |u(y) - u(\xi_{jh})| \leqslant c\varepsilon_{\nu h} \quad (j = 1, \ldots, l_h). \tag{2.15}$$

Действительно, $u(y) - u(\xi_{jh}) = [u(y) - u(z)] + [u(z) - u(\xi_{jh})]$, где $z \in G$ – точка указанная в условии (2.5). Оценим первое слагаемое:

$$|u(y) - u(z)| = \left|\int_0^1 u'(ty + (1-t)z)(y - z)dt\right| \leqslant \int_0^1 |u'(ty + (1-t)z)| dt (c+1)h$$

(см. (2.5)). Согласно определению нормы $\|u\|_{2,\nu}$ для $u \in C^{2,\nu}(G)$ имеем

$$|u'(x)| \leqslant c\omega_\nu(x), \qquad x \in G, \qquad \omega_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu < n-1, \\ 1 + |\log \varrho(x)|, & \nu = n-1, \\ \varrho(x)^{n-1-\nu}, & n-1 < \nu < n. \end{cases} \tag{2.16}$$

В силу (2.5) расстояние точки $ty + (1-t)z$ до ∂G не меньше её расстояния до границы конуса со $\{y, B(z, bh)\}$, т.е. $\varrho(ty + (1-t)z) \geqslant (1-t)bh$, и мы придем к оценке $|u(y) - u(z)| \leqslant c\varepsilon_{\nu h}$. Второе слагаемое оценивается точно таким же образом: $|u(z) - u(\xi_{jh})| \leqslant c\varepsilon_{\nu h}$. Итак, (2.15) установлено.

В случае $\nu > 0$ имеем

$$\sum_{j \in J_h(x)} \int_{G_{jh} \cap G} |K(x, y)| dy \leqslant c' \int_{|y-x| \leqslant (c+1)h} |x - y|^{-\nu} dy$$

$$= c' \int_{|y| \leqslant (c+1)h} |y|^{-\nu} dy = c' \int_0^{(c+1)h} r^{-\nu} \sigma_n r^{n-1} dr = c'' h^{n-\nu} \leqslant c'' \varepsilon_{\nu h}$$

(σ_n – площадь единичной сферы в R^n); при $\nu \leqslant 0$ оценка еще лучше. Совместно с (2.15) это дает оценку $\varkappa_h^{(1)} \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2$. Из (2.15) и (2.10) получаем также $\varkappa_h^{(2)} \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2$.

Для $y \in G_{jh}$, $j \bar{\in} J_h(\partial G)$ имеем

$$|u(y) - u(\xi_{jh}) - u'(\xi_{jh})(y - \xi_{jh})| \leqslant \tfrac{1}{2} \sup_{0 < t < 1} |u''(ty + (1-t)\xi_{jh})| \, |y - \xi_{jh}|^2,$$

где $u''(x)\colon R^n \cdot R^n \to R$ – вторая производная Фреше функции u в точке $x \in G$, т.е. $u''(x)yz = \sum_{i,k=1}^n \dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} y_i z_k$, $y, z \in R^n$. По определению нормы $\|u\|_{2,\nu}$ для $u \in C^{2,\nu}(G)$ имеем

$$|u''(x)| \leqslant c\omega_{\nu-1}(x), \qquad x \in G, \quad \omega_{\nu-1}(x) = \begin{cases} 1, & \nu < n-2, \\ 1 + |\log \varrho(x)|, & \nu = n-2, \\ \varrho(x)^{n-2-\nu}, & n-2 < \nu < n. \end{cases}$$

Заметим, что для $y \in G_{jh}$, $j \notin J_h(\partial G)$ имеем

$$0 < c_1 \leqslant \varrho(ty + (1-t)\xi_{jh})/\varrho(y) \leqslant c_2,$$

поэтому окончательно получаем

$$|u(y)-u(\xi_{jh})-u'(\xi_{jh})(y-\xi_{jh})| \leqslant c\omega_{\nu-1}(y)h^2, \qquad y\in G_{jh},\ j\in J_h(\partial G).$$

Теперь немедленно получаем $\varkappa_h^{(3)} \leqslant ch^2 = c\varepsilon_{\nu h}^2$ при $\nu < n-2$ и $\varkappa_h^{(3)} \leqslant ch^2 \times(1+|\log h|) \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2$ при $\nu = n-2$ (заметим, что $\varrho(y) \geqslant h$ для $y\in G_{jh}$, $j\notin J_h(\partial G)$). При $n-2<\nu<n$ имеем

$$\varkappa_h^{(3)} \leqslant c \sup_{x\in G} \int\limits_{\{y\in G:\,\varrho(y)\geqslant h\}} |x-y|^{-\nu}\varrho(y)^{n-2-\nu}\,dy\,h^2.$$

Оценим встречающийся здесь интеграл (см. (2.10)):

$$\int\limits_{\{y\in G:\,\varrho(y)\geqslant h\}} |x-y|^{-\nu}\varrho(y)^{n-2-\nu}\,dy$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{kh\leqslant\varrho(y)\leqslant(k+1)h} |x-y|^{-\nu}dy(kh)^{n-2-\nu}$$

$$\leqslant c\varepsilon_{\nu h}\sum_{k=1}^{N}(kh)^{n-2-\nu} \leqslant c'\varepsilon_{\nu h}\int\limits_1^{N+1} t^{n-2-\nu}\,dt\,h^{n-2-\nu},$$

где $N=[d/h]$, d — диаметр множества G. Заметив, что

$$\int\limits_1^{N+1} t^{n-2-\nu}dt \leqslant c\begin{cases} N^{n-1-\nu}\sim h^{\nu-n+1}, & n-2<\nu<n-1,\\ \log N\sim|\log h|, & \nu=n-1,\\ 1, & n-1<\nu<n,\end{cases}$$

в каждом из этих случаев убеждаемся, что $\varkappa_h^{(3)} \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2$. Итак, $\varkappa_h^{(3)} \in c\varepsilon_{\nu h}^2$ при любом $\nu<n$.

Перейдем к оценке $\varkappa_h^{(4)}$. Для $j\notin J_h(\partial G)$ по определению ξ_{jh} (см. (2.4)) имеем

$$\int\limits_{G_{jh}} (y-\xi_{jh})dy = \operatorname{mes} G_{jh}(\xi_{jh}-\xi_{jh}) = 0,$$

поэтому и

$$\int\limits_{G_{jh}} K(x,\,\xi_{jh})u'(\xi_{jh})(y-\xi_{jh})dy = 0.$$

Это позволяет переписать $\varkappa_h^{(4)}$ в виде

$$\varkappa_h^{(4)} = \sup_{x\in G}\sum_{\substack{j=1\\ j\notin J_h(x),\,j\notin J_h(\partial G)}}^{l_h}\Big|\int\limits_{G_{jh}}[K(x,\,y)-K(x,\,\xi_{jh})]\,u'(\xi_{jh})(y-\xi_{jh})dy\Big|.$$

В силу (1.2), (2.2) и (2.16) для $y\in G_{jh}$, $j\notin J_h(x)$, $j\notin J_h(\partial G)$ имеем

$$|K(x,\,y)-K(x,\,\xi_{jh})| \leqslant ch\sup_{0<t<1}|x-(ty+(1-t)\xi_{jh})|^{-\nu-1} \leqslant c'h|x-y|^{-\nu-1},$$

$$\varrho(\xi_{jh})\geqslant h, \qquad |u'(\xi_{jh})(y-\xi_{jh})| \leqslant c\omega_\nu(\xi_{jh})h \leqslant c\varepsilon_{\nu h},$$

и в случае $\nu>-1$

$$\varkappa_h^{(4)} \leqslant ch\varepsilon_{\nu h} \sup_{x\in G} \int_{\{y\in G: |y-x|\geqslant h\}} |x-y|^{-\nu-1} dy \leqslant c'\varepsilon_{\nu h}^2$$

(в случае $\nu \leqslant -1$ оценка лучше).

Итак,

$$\varkappa_h \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2, \tag{2.17}$$

что завершает доказательство (2.13) и Теоремы 3.

Замечание 1. Определим по решению системы уравнений (2.6) функцию

$$u_h^*(x) = \sum_{j=1}^{l_h} \int_{G_{jh}} K(x, y) dy\, u_j^* + f(x), \qquad x\in G.$$

В условиях Теоремы 3 справедлива оценка

$$\sup_{x\in G} |u_h^*(x) - u^*(x)| \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2. \tag{2.18}$$

Действительно,

$$u_h^*(x) - u^*(x) = \sum_{j=1}^{l_h} \int_{G_{jh}} K(x, y) dy\, [u_j^* - u^*(\xi_{jh})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{l_h} \int_{G_{jh}} K(x, y) u^*(\xi_{jh}) dy - \int_G K(x, y) u^*(y) dy,$$

и (2.18) следует из (2.8), (2.14) и (2.17).

Замечание 2. Рассмотрим наряду с „точной" системой (2.6) приближенную

$$u_i = \sum_{j=1}^{l_h} a_{ijh} u_j + b_{ih}, \qquad i = 1, \ldots, l_h. \tag{2.19}$$

В условиях Теоремы 3 оценка (2.8) остается справедливой и для решения системы (2.19), если

$$\max_i |b_{ih} - f(\xi_{ih})| \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2, \tag{2.20}$$

$$\delta_h \equiv \max_i \sum_{j=1}^{l_h} |a_{ijh} - \int_{G_{jh}} K(\xi_{ih}, y) dy| \to 0, \qquad h \to 0, \tag{2.21}$$

$$\max_i \left| \sum_{j=1}^{l_h} [a_{ijh} - \int_{G_{jh}} K(\xi_{ih}, y) dy] u^*(\xi_{jh}) \right| \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2. \tag{2.22}$$

Условия (2.21) и (2.22) можно, конечно, заменить более грубым условем $\delta_h \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2$. В частности, в приграничной зоне толщины ch^2 можно изменять значения $K(x, y)$ по y (см. (2.10)). Такое переопределение $K(x, y)$ удобно в ситуации, когда G лежит в две стороны от некоторого участка ∂G, причем предельные значения $K(x, y)$ по y с разных сторон разные.

§ 3. Кусочно-полилинейная аппроксимация решения

Пусть теперь G — параллелепипед:

$$G = \{x \in R^n : 0 < x_k < b_k,\ k = 1, \ldots, n\}. \tag{3.1}$$

На $[0, b_k]$, $k = 1, \ldots, n$, определим точки

$$x_k^j = \frac{1}{2} b_k \left(\frac{j}{N_k}\right)^r, \quad j = 0, 1, \ldots, N_k, \quad x_k^{N_k + j} = b_k - x_k^{N_k - j}, \quad j = 1, \ldots, N_k. \tag{3.2}$$

Параметр $r \geqslant 1$ характеризует неравномерность сетки. Через $\varphi_k^j(x_k)$, $0 \leqslant j \leqslant 2N_k$ обозначим одномерный линейный базисный сплайн — это „функция-крыша", непрерывная на $[0, b_k]$, линейная на каждом отрезке $[x_k^i, x_k^{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, 2N_k - 1$, равная единице в узле x_k^j и нулю в остальных узлах сетки (3.2). Приближенное решение уравнения (1.1) будем разыскивать в виде полилинейного сплайна

$$u_N(x) = \sum_{j_1 = 0}^{2N_1} \ldots \sum_{j_n = 0}^{2N_n} c_{j_1 \ldots j_n} \varphi_1^{j_1}(x_1) \ldots \varphi_n^{j_n}(x_n). \tag{3.3}$$

Коэффициенты (узловые значения) $c_{j_1 \ldots j_n}$ определим, подставив (3.3) в уравнение (1.1) и проведя коллокацию в узлах $(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n})$:

$$c_{i_1 \ldots i_n} = \sum_{j_1 = 0}^{2N_1} \ldots \sum_{j_n = 0}^{2N_n} \int_G K(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}, y) \varphi_1^{j_1}(y_1) \ldots \varphi_n^{j_n}(y_n) dy\, c_{j_1 \ldots j_n} + f(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}), \quad i_k = 0, 1, \ldots, 2N_k \ (k = 1, \ldots, n). \tag{3.4}$$

В формулируемой ниже теореме предполагается, что $f \in \bigcap_{k=1}^n C_{a^k}^{2,\nu}(G)$, где $a^k(x) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$ — постоянное векторное поле в G. Полное описание класса $\bigcap_{k=1}^n C_{a^k}^{2,\nu}(G)$ можно получить на основе § 1. В качестве примера приведем расшифровку условия $f \in \bigcap_{k=1}^n C_{a^k}^{2,\nu}(G)$ в случае $\nu = n - 1$: оно означает, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в G, продолжима в непрерывную функцию на $\bar{G}$; при каждом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, производные $\partial f(x)/\partial x_k$ и $\partial^2 f(x)/\partial x_k^2$ продолжимы в непрерывные функции на параллелепипеде $0 < x_k < b_k$, $0 \leqslant x_j \leqslant b_j$ $(j = 1, \ldots, n,\ j \neq k)$, причем

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right| \leqslant c(1 + |\log \varrho_k(x)|), \qquad \left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2}\right| \leqslant \frac{c}{\varrho_k(x)},$$

$$\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right| \leqslant \frac{c}{\varrho(x)}, \qquad k, j = 1, \ldots, n, \ x \in G,$$

где $\varrho_k(x)$ — расстояние от $x \in G$ до ближайщей из двух противоположных граней G, ортогональных оси x_k, $\varrho(x) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \varrho_k(x)$.

Теорема 4. *Пусть G — параллелепипед* (3.1), *и пусть на нем выполнены условия* (1.2) *и* (1.5) *с $m = 2$. Пусть $f \in \bigcap_{k=1}^n C_{a^k}^{2,\nu}(G)$. Однородное* *интегральное уравнение, соответствующее уравнению* (1.1), *пусть имеет только нулевое решение. Тогда найдутся такие натуральные числа* N_k^0, *что при* $N_k \geqslant N_k^0$ ($k = 1, \ldots, n$) *система уравнений* (3.4) *имеет единственное решение, и соответствующие приближения* (см. (3.3)) *равномерно на* G *сходятся к решению* u^* *уравнения* (1.1). *При* $r = \max\{1, 2/(n-\nu)\}$ (см. (3.2)) *быстрота сходимости характеризуется неравенством*

$$\max_{x\in\bar{G}} |u_N^*(x) - u^*(x)| \leqslant c\varepsilon_{\nu N}, \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{\nu N} = \begin{cases} N_1^{-2} + \ldots + N_n^{-2}, & \nu \neq n-2, \\ N_1^{-2}\log N_1 + \ldots + N_n^{-2}\log N_n, & \nu = n-2. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через P_N интерполяционный проектор, сопоставляющий любой функции $u \in C(\bar{G})$ ее полилинейную интерполянту $P_N u$,

$$(P_N u)(x) = \sum_{j_1=0}^{2N_1} \ldots \sum_{j_n=0}^{2N_n} u(x_1^{j_1}, \ldots, x_n^{j_n}) \varphi_1^{j_1}(x_1) \ldots \varphi_n^{j_n}(x).$$

Уравнение (1.1) рассмотрим как уравнение $u = Tu + f$ в банаховом пространстве $E = C(\bar{G})$; метод коллокации (3.3), (3.4) равносилен галеркинскому уравнению $u_N = P_N T u_N + P_N f$. Поскольку $T\colon E \to E$ линеен и вполне непрерывен, $I - T$ обратим, $\|P_N u - u\| \to 0$ при $N \to \infty$ для каждого $u \in E$, то стандартная теорема о сходимости метода Галеркина немедленно дает утверждения теоремы о разрешимости системы (3.3) и сходимости $\|u_N^* - u^*\|_E \to 0$, а также оценку $\|u_N^* - u^*\|_E \leqslant c\|u^* - P_N u^*\|_E$. По Теореме 2 $u^* \in \bigcap_{k=1}^n C_{a^k}^{2,\nu}(G)$, и доказательство оценки (3.5) сводится к установлению неравенства

$$\|u - P_N u\|_E \leqslant c\varepsilon_{\nu N}, \qquad u \in \bigcap_{k=1}^{n} C_{a^k}^{2,\nu}(G). \tag{3.6}$$

В одномерном случае ($n = 1$) такой результат имеется в [15, 3]. Многомерный случай сводится к одномерному: погрешность полилинейной интерполяции на (внутренней) ячейке $x_k^{j_k} \leqslant x_k \leqslant x_k^{j_k+1}$ ($k = 1, \ldots, n$) оценивается через

$$c \sum_{k=1}^{n} |x_k^{j_k+1} - x_k^{j_k}|^2 \sup_{\substack{x_k^{j_k} < x_k < x_k^{j_k+1} \\ k=1,\ldots,n}} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} \right|,$$

т.е. складывается из оценок погрешностей линейной интерполяции в направлениях x_k ($k = 1, \ldots, n$) в отдельности; при этом, как и в одномерном случае

$$\left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} \right| \leqslant c \begin{cases} 1, & \nu < n-2, \\ 1 + |\log \varrho_k(x)|, & \nu = n-2, \\ \varrho_k(x)^{n-2-\nu}, & n-2 < \nu < n. \end{cases}$$

Аналогично обстоит дело в приграничных ячейках.

Замечание 3. Если $1 \leqslant r \leqslant 2/(n-\nu)$ (случай $\nu > n-2$), то сходимость будет более медленной – вместо (3.5) будет справедливой оценка

$$\max_{x \in \bar{G}} |u_N^*(x) - u^*(x)| \leqslant c(N_n^{-r(n-\nu)} + \ldots + N_n^{-r(n-\nu)}).$$

Однако в узлах коллокации сходимость лучше. В частности, в случае равномерной сетки (в (3.2) $r = 1$), обозначив $h = 1/\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} N_k$, имеем (ср. (2.8))

$$\max_{0 \leqslant i_k \leqslant 2N_k (k=1,\ldots,n)} |u_N^*(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}) - u^*(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n})| \leqslant c\varepsilon_{\nu h}^2.$$

Замечание 4. При помощи кусочной полиномиальной аппроксимации порядка $m-1$ по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$, опираясь на Теорему 2, легко строить коллокационные методы порядка $O(N_1^{-m} + \ldots + N_n^{-m})$. При этом привлекаются сетки (3.2) с $r = \max\{1, m/(n-\nu)\}$ и точки коллокации, указанные в одномерном случае в [15, 3].

Литература

[1] Г. Вайникко, *Анализ дискретизационных методов*, Тартуск. ун-т, Тарту, 1976.

[2] Г. Вайникко, *О гладкости решения многомерных интегральных уравнений переноса*. В кн.: Численные методы решения уравнения переноса. АН ЭССР, Тарту, 1986, 40–43.

[3] Г. Вайникко, А. Педас, П. Уба, *Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений*, Тартуск. ун-т, Тарту, 1984.

[4] Г. И. Марчук, В. И. Лебедев, *Численные методы в теории переноса нейтронов*, Атомиздат, Москва, 1981.

[5] А. Педас, *О гладкости решения интегрального уравнения со слабо сингулярным ядром*, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, вып. 492, 56–68.

[6] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, Москва, 1980.

[7] I. G. Graham, *Collocation methods for two dimensional weakly singular integral equations*, J. Austral. Math. Soc., Ser. B., 22, (1981), 456–473.

[8] I. G. Graham, *Singularity expansions for the solutions of second kind Fredholm integral equations with weakly singular convolution kernels*, J. Integral Equations, 4 (1), (1982), 1–30.

[9] J. Pitkäranta, *On the differential properties of solutions to Fredholm equations with weakly singular kernels*, J. Inst. Math. Appl., 24, (1979), 109–119.

[10] J. Pitkäranta, *Estimates for derivatives of solutions to weakly singular Fredholm integral equations*, SIAM J. Math. Anal., 11 (6), (1980), 952–968.

[11] G. R. Richter, *On weakly singular Fredholm integral equations with displacement kernels*, J. Math. Anal. Appl., 55, (1976), 32–42.

[12] C. Schneider, *Regularity of the solutions to a class of weakly singular Fredholm integral equations of the second kind*, Integral Equations Operator Theory, 2, (1979), 62–68.

[13] G. Vainikko, *Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden*, Leipzig; Teubner, 1976.

[14] G. Vainikko and A. Pedas, *The properties of solutions of weakly singular integral equations*, J. Austral. Math. Soc., Ser. B, 22, (1981), 419-430.

[15] G. Vainikko and P. Uba, *A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel*, J. Austral. Math. Soc., Ser B, 22, (1981), 431-438.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25—May 29, 1987