ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVIII (1988)

Интегральные и дифференциальные неравенства для одного класса кусочно-непрерывных функций

П. С. С. Симеонов и Д. Д. Байнов (Пловдив)

Резюме. В работе рассматриваются интегральные и дифференциальные неравенства для одного класса кусочно непрерывных функций. Полученные результаты можно применять с успехом во фундаментальной, качественной и асимптотической теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

1. Введение. В связи с приложением в теории управления, радиоэлектроники, биологии и других областях знания, в последних годах, все интенсивнее разрабатывается теория дифференциальных систем с импульсным воздействием вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad t \neq \tau_i(x); \qquad \Delta x|_{t=\tau_i(x)} = B_i(x), \tag{1}$$

где $f\colon I\times\Omega\to \boldsymbol{R}^n$; $\tau_i\colon \Omega\to \boldsymbol{R}$; $B_i\colon \Omega\to \boldsymbol{R}^n$; $I=[0, \infty)$; Ω — область в n-мерном Евклидовом пространстве с нормой $|\cdot|$. Среди первоначально опубликованных по этой тематике работ упомянем работы [1]–[5].

Системами (1) описываются процессы и явления, которые подвергаются кратковременным воздействиям и скачкообразно меняют свое состояние. Считается, что импульсное воздействие происходит в моментах t_i когда изображающая точка (t, x) расширенного фазового пространства попадает на некоторую из гиперповерхностей σ_i с уравнением $t=\tau_i(x)$. Предполагается, что каждое решение $x(t)$ системы (1) непрерывно слева и в моментах t_i встречи с гиперповерхностью σ_i изображающая точка „мгновенно" перебрасывается с положения $(t_i, x(t_i))$ в положение $\big(t_i, x(t_i)+B_i(x(t_i))\big)$, т.е.

$$x(t_i-0)=x(t_i), \qquad x(t_i+0)=x(t_i)+\Delta x(t_i)=x(t_i)+B_i\big(x(t_i)\big).$$

В моментах $t\neq\tau_i(x)$ решение $x(t)$ определяется системой $dx/dt = f(t, x)$.

При качественном исследовании систем с импульсным воздействием часто используется техника интегральных и дифференциальных неравенств. Функции, которые оцениваются этими неравенствами, имеют разрывы первого рода в моментах $\{t_i\}$ импульсного воздействия, при том, величина разрыва зависит от значения функции в точке t_i. Эта характерная особенность выделяет класс интегральных и дифференциальных неравенств, которые будем называть *неравенствами для функций со скачками.*

В настоящей работе, для функций со скачками, рассмотрено интегральное неравенство типа Бихари и обоснован метод сравнения для дифференциальных неравенств.

Отметим, что в [4] впервые использован аналог неравенства Гронуолла – Беллмана для функций со скачками.

2. Интегральное неравенство типа Бихари для функций со скачками. Далее, если $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ – числовые последовательности и $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$, то символами $\sum\limits_{s<t_i<t} p_i$ и $\prod\limits_{s<t_i<t} p_i$ будем обозначать соответственно сумму и произведение чисел p_i, причем сложение (умножение) ведется по тем i, для которых $s<t_i<t$. При $s=t$, по определению, $\sum\limits_{t<t_i<t} p_i = 0$ и $\prod\limits_{t<t_i<t} p_i = 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функция v: $[t_0, \infty) \to [0, \infty)$ – кусочно-непрерывна на $[t_0, \infty)$ и имеет точки разрыва первого рода, у которых нет конечной точки сгущения.*

2. *Последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ – возрастающая:*

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty} t_i = \infty.$$

3. *Функция $p(s)$ – непрерывна и неотрицательна при $s \geqslant t_0$.*

4. *Функция $\Phi(v)$ – непрерывна и неубывающая при $v \geqslant 0$, положительна при $v>0$ и $\Phi(\lambda u) \geqslant \mu(\lambda)\Phi(u)$, при $\lambda>0$ и $v>0$, где $\mu(\lambda)>0$ при $\lambda>0$.*

5. *Последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $p_i>0$ и $\beta_i \geqslant 0$.*

6. *При $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство*

$$v(t) \leqslant c_0 \prod_{t_0<t_i<t} p_i + \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqslant t_i<t} p_i\, p(s)\Phi(v(s))\,ds + \sum_{t_0<t_i<t} \prod_{t_i\leqslant t_j<t} p_j \beta_i v(t_i-0) \qquad (c_0 \geqslant 0). \tag{2}$$

Тогда

$$v(t) \leqslant \Psi^{-1}\left(\Psi\Big(c_0 \prod_{t_0<t_i<t} p_i(1+\beta_i)\Big) + \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqslant t_i<t} \frac{p_i(1+\beta_i)}{\mu\big(p_i(1+\beta_i)\big)} p(s)\,ds\right) \tag{3}$$

при всех $t \geqslant t_0$, для которых

$$\Psi\Big(c_0 \prod_{t_0<t_i<t} p_i(1+\beta_i)\Big) + \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqslant t_i<t} \frac{p_i(1+\beta_i)}{\mu\big(p_i(1+\beta_i)\big)} p(s)\,ds \in \operatorname{Dom} \Psi^{-1}.$$

Здесь

$$\Psi(v)=\int_a^v \frac{dz}{\Phi(z)}, \qquad где\ v \geqslant a>0.$$

Доказательство. 1° Пусть $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда неравенства (2) и (3) имеют вид

$$(4) \qquad v(t) \leqslant c_0+\int_{t_0}^t p(s)\Phi(v(s))\,ds, \qquad v(t) \leqslant \Psi^{-1}\Big(\Psi(c_0)+\int_{t_0}^t p(s)\,ds\Big).$$

Положим $u(t)=c_0+\int_{t_0}^t p(s)\Phi(v(s))\,ds$. При $t \geqslant t_0$ функция $u(t)$ непрерывна, неотрицательна и удовлетворяет неравенствам

$$(5) \qquad v(t) \leqslant u(t),$$

$$(6) \qquad u(t) \leqslant c_0+\int_{t_0}^t p(s)\Phi(u(s))\,ds \equiv w(t).$$

Тогда, учитывая (5) и (6), получаем

$$\int_{t_0}^t p(s)\,ds \geqslant \int_{t_0}^t \frac{p(s)\Phi(u(s))}{\Phi(w(s))}\,ds=\int_{t_0}^t \frac{d\Phi(w(s))}{\Phi(w(s))}=\int_{t_0}^{w(t)} \frac{dz}{\Phi(z)}=$$
$$=\Psi(w(t))-\Psi(c_0) \geqslant \Psi(u(t))-\Psi(c_0) \geqslant \Psi(v(t))-\Psi(c_0).$$

Следовательно, $\Psi(v(t)) \leqslant \Psi(c_0)+\int_{t_0}^{t_1} p(s)\,ds$ откуда следует (4). Кроме того, для постоянной

$$c_1=\Psi^{-1}\Big(\Psi(c_0)+\int_{t_0}^{t_1} p(s)\,ds\Big)$$

и функции

$$v_1(t)=\Psi^{-1}\Big(\Psi(c_0)+\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\Big), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

получаем следующие соотношения:

$$v(t)=v_1(t), \qquad \text{при } t \in [t_0, t_1],$$

$$\int_{t_0}^{t_1} p(s)\Phi(v_1(s))\,ds=\int_{t_0}^{t_1} dv_1(s)=v(t_1)-v(t_0)=c_1-c_0,$$

$$\Psi(c_1)-\Psi(c_0)=\int_{t_0}^{t_1} p(s)\,ds.$$

2° Справедливость теоремы 1 для последующих интервалов $(t_i, t_{i+1}]$ доказываем индукцией по i.

Положим $p_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ и введем следующие постоянные и функции:

$$c_{k+1} = \Psi^{-1}\big(\Psi(p_k(1+\beta_k)c_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)\,ds\big),$$

$$v_{k+1}(t) = \Psi^{-1}\big(\Psi(p_k(1+\beta_k)c_k) + \int_{t_k}^{t} p(s)\,ds\big), \quad \text{при } t\in(t_k, t_{k+1}],\ k = 1, 2, \ldots$$

Предположим, что при $k = 0, 1, \ldots, i$ и $t\in(t_k, t_{k+1}]$ выполнены следующие соотношения:

$$v(t) \leqslant v_{k+1}(t), \tag{7}$$

$$\Psi(v(t)) - \Psi\big(c_0 \prod_{t_0<t_j<t} p_j(1+\beta_j)\big) \leqslant \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqslant t_j<t} \frac{p_j(1+\beta_j)}{\mu(p_j(1+\beta_j))} p(s)\,ds, \tag{8}$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)\,\Phi(v_{k+1}(s))\,ds = c_{k+1} - p_k(1+\beta_k)c_k, \tag{9}$$

$$\Psi(c_{k+1}) - \Psi\big(c_0 \prod_{j=0}^{k} p_j(1+\beta_j)\big) = \int_{t_0}^{t_{k+1}} \prod_{s\leqslant t_j\leqslant t_{k+1}} \frac{p_j(1+\beta_j)}{\mu(p_j(1+\beta_j))} p(s)\,ds. \tag{10}$$

Пусть $t\in(t_{i+1}, t_{i+2}]$. Тогда неравенство (2) принимает вид

$$\begin{aligned} v(t) \leqslant c_0 \prod_{j=0}^{i+1} p_j + \sum_{k=0}^{i} \big(\prod_{j=k+1}^{i+1} p_j\big) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)\,\Phi(v(s))\,ds + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,\Phi(v(s))\,ds + \\ + \sum_{k=1}^{i} \big(\prod_{j=k}^{i+1} p_j\big)\beta_k v(t_k-0) + p_{i+1}\beta_{i+1} v(t_{i+1}-0). \end{aligned} \tag{11}$$

Из неравенств (7), (9) и (11) получаем, что при $t\in(t_{i+1}, t_{i+2}]$

$$v(t) \leqslant c_{i+1} p_{i+1}(1+\beta_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,\Phi(v(s))\,ds. \tag{12}$$

Рассуждая как в пункте 1° из (12) следует, что

$$\Psi(v(t)) \leqslant \Psi(c_{i+1} p_{i+1}(1+\beta_{i+1})) + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,ds \quad \text{при } t\in(t_{i+1}, t_{i+2}]. \tag{13}$$

Исходя из свойств функции Φ, находим что при $x > 0$, $y > 0$ и $\lambda > 0$

$$\Psi(\lambda x) - \Psi(\lambda y) \leqslant \frac{\lambda}{\mu(\lambda)}(\Psi(x) - \Psi(y)). \tag{14}$$

Тогда, согласно (13), (14) и (10),

$$\Psi(v(t)) - \Psi\big(c_0 \prod_{j=0}^{i+1} p_j(1+\beta_j)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi(p_{i+1}(1+\beta_{i+1})c_{i+1}) - \Psi\big(p_{i+1}(1+\beta_{i+1})c_0 \prod_{j=0}^{i} p_j(1+\beta_j)\big) + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p_{i+1}(1+\beta_{i+1})}{\mu(p_{i+1}(1+\beta_{i+1}))}[\Psi(c_{i+1})-\Psi(c_0\prod_{j=0}^{i}p_j(1+\beta_j))]+\int_{t_{i+1}}^{t}p(s)ds\leqslant$$

$$\leqslant \frac{p_{i+1}(1+\beta_{i+1})}{\mu(p_{i+1}(1+\beta_{i+1}))}\int_{t_0}^{t_{i+1}}\prod_{s\leqslant t_j<t_{i+1}}\frac{p_j(1+\beta_j)}{\mu(p_j(1+\beta_j))}p(s)ds+\int_{t_{i+1}}^{t}p(s)ds=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\prod_{s\leqslant t_j<t}\frac{p_j(1+\beta_j)}{\mu(p_j(1+\beta_j))}p(s)ds.$$

Этим доказана справедливость неравенства (8) для $t\in(t_{i+1},\,t_{i+2}]$. Из неравенства (13), после несложных преобразований, получаем, что соотношения (7), (9) и (10) имеют место при $k=i+1$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть $\Phi(v)=v^m$, $m>1$. Тогда из неравенства

$$v(t)\leqslant c\prod_{t_0<t_i<t}p_i+\int_{t_0}^{t}\prod_{s\leqslant t_i<t}p_i\,p(s)v^m(s)ds+\sum_{t_0<t_i<t}\Big(\prod_{t_i\leqslant t_j<t}p_j\Big)\beta_i v(t_i-0)$$

следует неравенство

$$v(t)\leqslant c\prod_{t_0<t_i<t}p_i(1+\beta_i)\Big[1-(m-1)\int_{t_0}^{t}\Big(c\prod_{t_0<t_i<s}p_i(1+\beta_i)\Big)^{m-1}p(s)ds\Big]^{1/(1-m)}$$

при всех $t\geqslant t_0$, для которых

$$(m-1)\int_{t_0}^{t}\Big(c\prod_{t_0<t_i<s}p_i(1+\beta_i)\Big)^{m-1}p(s)ds<1.$$

Следствие 2. Пусть $\Phi(v)=v$. Тогда из неравенства

$$v(t)\leqslant c\prod_{t_0<t_i<t}p_i+\int_{t_0}^{t}\prod_{s\leqslant t_i<t}p_i\,p(s)v(s)ds+\sum_{t_0<t_i<t}\Big(\prod_{t_i\leqslant t_j<t}p_j\Big)\beta_j v(t_i-0)$$

следует неравенство

$$v(t)\leqslant c\prod_{t_0<t_i<t}p_i(1+\beta_i)\exp\Big(\int_{t_0}^{t}p(s)ds\Big),\qquad \text{при } t\geqslant t_0.$$

Замечание 1. При $p_i\equiv 1$ и $m>1$ результат следствия 1 совпадает с результатом леммы 2 [6]. При $p_i\equiv 1$ и $m=1$ результат следствия 2 совпадает с результатом леммы 2 [4] и представляет собой обобщением леммы Гронуолла – Беллмана.

Отметим, что в Теореме 1, точки разрыва функции могут не совпадать с точками „скачка" $\{t_i\}$ (как это требуется в [4] и [6]), что особенно важно в случаях, когда моменты импульсного воздействия не фиксированы.

3. Теоремы сравнения для дифференциальных неравенств для функций со скачками. Пусть вектор-функция $u(t)$ удовлетворяет системе с импульсным воздействием в фиксированных моментах времени

$$\frac{du}{dt} = F(t, u) \quad \text{при } t \neq t_i, \qquad u(t_i+0) = \Psi_i(u(t_i)), \tag{15}$$

где F: $I \times G \to \boldsymbol{R}^k$; Ψ_i: $G \to \boldsymbol{R}^k$; G — открытое подмножество $\boldsymbol{R}^k$; $0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots$; $\lim\limits_{i \to \infty} t_i = \infty$.

Прежде чем сформулировать теоремы о дифференциальных неравенствах введем некоторые определения.

Пространство $\boldsymbol{R}^k$ будем считать полуупорядоченным в следующем смысле: будем писать $v \leqslant u$ $(v < u)$, если $v_i \leqslant u_i$ $(v_i < u_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, k$.

Определение 1. Функцию Ψ: $G \to \boldsymbol{R}^k$ называем *монотонно возрастающей в* G, если при всех $u, v \in G$ из того что $v \leqslant u$ следует что $\Psi(v) \leqslant \Psi(u)$, а из $v < u$ следует $\Psi(v) < \Psi(u)$.

Определение 2 [7]. Функцию F называем *квазимонотонно возрастающей в* G, если для любой пары (t, u) и (t, v) из $I \times G$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ имеем $F_i(t, v) \leqslant F_i(t, u)$ всегда, когда $v_i = u_i$ и $v \leqslant u$.

Определение 3. Решение u^+: $(t_0, \omega) \to \boldsymbol{R}^k$ системы (15), для которого $u^+(t_0+0) = u_0$, называем *максимальным решением системы* (15), если любое другое решение u: $(t_0, \tilde{\omega}) \to \boldsymbol{R}^k$, для которого $u(t_0+0) = u_0$, удовлетворяет неравенству $u(t) \leqslant u^+(t)$ при $t \in (t_0, \omega) \cap (t_0, \tilde{\omega})$.

Аналогично определяется минимальное решение $u^-(t)$ системы (15).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1. *Функция* F: $I \times G \to \boldsymbol{R}^k$ *непрерывна и квазимонотонно возрастающая в* G.

2. *Функции* Ψ_i: $G \to \boldsymbol{R}^k$, $k = 1, 2, \ldots$ — *монотонно возрастающие в* G.

3. *Функция* u^+: $(t_0, \omega) \to \boldsymbol{R}^k$ — *максимальное решение системы* (15), *для которого* $u^+(t_0+0) = u_0$ *и* $(t_0, u_0) \in I \times G$.

4. *Функция* v: $(t_0, \tilde{\omega}) \to \boldsymbol{R}^k$ $(\tilde{\omega} \leqslant \omega)$ *кусочнонепрерывна с точками разрыва* $\{t_i\}$ *и такова, что*:

$$\begin{aligned} &(t, v(t)) \in I \times G, && \text{при } t \in (t_0, \tilde{\omega}), \\ &v(t_0+0) \leqslant u_0, && \\ &Dv(t) \leqslant F(t, v(t)), && \text{при } t \in (t_0, \tilde{\omega}),\ t \neq t_i, \\ &v(t_i+0) \leqslant \Psi_i(v(t_i)), && \text{при } t_i \in (t_0, \tilde{\omega}), \end{aligned} \tag{16}$$

где $Dv(t)$ *некоторая производная Дини для* $v(t)$.

Тогда $v(t) \leqslant u^+(t)$ *при* $t \in (t_0, \tilde{\omega})$.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $t_0 < t_1$. Пусть $t \in (t_0, t_1] \cap (t_0, \tilde{\omega})$. Тогда согласно условию 4 Теоремы 2 и Лемме сравнения [7], *IX*, 2.6 (см. также [8]) будем иметь, что $v(t) \leqslant u^+(t)$. В частности, $v(t_1) \leqslant u^+(t_1)$ и учитывая неравенство (16) и условие 2 получаем

$$v(t_1+0) \leqslant \Psi_1(v(t_1)) \leqslant \Psi_1(u^+(t_1)) = u^+(t_1+0).$$

С аналогичными рассуждениями доказывается, что $v(t) \leqslant u^+(t)$ при $t \in (t_i, t_{i+1}] \cap (t_0, \tilde{\omega})$, $i = 1, 2, \ldots$

Этим теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Выполнены условия* 1 *и* 2 *теоремы* 2.

2. *Функция* $u^-: (t_0, \omega) \to \boldsymbol{R}^k$ *— минимальное решение системы* (15), *для которого* $u^-(t_0+0) = u_0$ *и* $(t_0, u_0) \in I \times G$.

3. *Функция* v: $(t_0, \tilde{\omega}) \to \boldsymbol{R}^k$ $(\tilde{\omega} \leqslant \omega)$ *кусочно-непрерывна с точками разрыва* $\{t_i\}$ *и такова, что*:

$$(t, v(t)) \in I \times G, \qquad \text{при } t \in (t_0, \tilde{\omega}),$$
$$v(t_0+0) \geqslant u_0,$$
$$Dv(t) \geqslant F(t, v(t)), \qquad \text{при } t \in (t_0, \tilde{\omega}),\ t \neq t_i,$$
$$v(t_i+0) \geqslant \Psi_i(v(t_i)), \qquad \text{при } t_i \in (t_0, \tilde{\omega}),$$

где $Dv(t)$ *некоторая производная Дини для* $v(t)$.

Тогда $v(t) \geqslant u^-(t)$ *при* $t \in (t_0, \tilde{\omega})$.

Доказательство Теоремы 3 аналогично доказательству Теоремы 2.

Отметим, что условие квазимонотонности для функции F можно отбросить в важном для приложений случае, когда уравнение сравнения (15) скалярно. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть функция* $v(t)$ *дифференцируема при* $t \neq t_i$ *и удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$\frac{dv}{dt} \leqslant f(t, v) \qquad \text{при } 0 \leqslant t < T \leqslant \infty,\ t \neq t_i,$$
$$v(t_i+0) \leqslant \Psi_i(v(t_i)), \qquad v(0) \leqslant u_0,$$

где функция $f(t, v)$ *— непрерывна в области* $\{0 \leqslant t < T,\ |v| < \gamma\}$, *а функции* Ψ_i: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *— неубывающие.*

Тогда

$$v(t) \leqslant u^+(t) \qquad \text{при } t \in [0, T) \cap [0, \omega),$$

где $u^+(t)$ — максимальное решение начальной задачи с импульсным воздействием

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad \text{при } t \in [0, \omega),\ t \neq t_i,$$

(17)

$$u(t_i+0) = \Psi_i(u(t_i)), \quad u(0) = u_0.$$

Теорема 5. *Пусть функции f и Ψ_i удовлетворяют условиям Теоремы 4 и*

$$\frac{dv}{dt} \geqslant f(t, v) \quad \text{при } t \in [0, T),\ t \neq t_i,$$

$$v(t_i+0) \geqslant \Psi_i(v(t_i)), \quad v(0) \geqslant u_0.$$

Тогда

$$v(t) \geqslant u^-(t) \quad \text{при } t \in [0, T) \cap [0, \omega),$$

где $u^-(t)$ — минимальное решение задачи (17).

Теоремы 4 и 5 являются следствиями Теоремы 1.2 и Теоремы 1.3 из [8] и доказываются как Теоремы 2 и 3.

Следующее утверждение является частным случаем Теорем 4 и 5.

Следствие 1. Пусть функции $p(t)$ и $q(t)$ непрерывны при $0 \leqslant t < T \leqslant \leqslant \infty$, а $d_i \geqslant 0$ и b_i — постоянные. Пусть функция $v(t)$ дифференцируема при $t \neq t_i$ и удовлетворят неравенству

$$\frac{dv}{dt} \lesseqqgtr p(t)v + q(t) \quad \text{при } t \in [0, T),\ t \neq t_i,$$

$$v(t_i+0) \lesseqqgtr d_i v(t_i) + b_i.$$

Тогда при $t \in [0, T)$ имеет место неравенство

$$v(t) \lesseqqgtr v(0) \prod_{0<t_i<t} d_i \exp\Big(\int_0^t p(s)\,ds\Big) + \int_0^t \prod_{s<t_i<t} d_i \exp\Big(\int_s^t p(\tau)\,d\tau\Big) + \tag{18}$$

$$+ \sum_{0<t_i<t} \prod_{t_i<t_k<t} d_k \exp\Big(\int_{t_i}^t p(\tau)\,d\tau\Big) b_i.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно в Теореме 4 (Теореме 5) положить $f(t, u) = p(t)u + q(t)$, $\Psi_i(u) = d_i u + b_i$ и заметить, что единственное решение задачи

$$\frac{du}{dt} = p(t)u + q(t), \quad t \in [0, T),\ t \neq t_i,$$

$$u(t_i+0) = d_i u(t_i) + b_i, \quad u(0) = v(0)$$

является правой частью неравенства (18).

Отметим еще один случай, когда на функцию F не накладывается условие квазимонотонности.

Теорема 6. *Пусть функция* v: $[0, T) \to \mathbf{R}^k$ *дифференцируема при* $t \neq t_i$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} \leqslant Av+q(t), \quad \text{при } t\in[0, T),\ t\neq t_i, \\ &v(t_i+0) \leqslant \Psi_i(v(t_i)), \quad v(0) \leqslant u_0, \end{aligned} \tag{19}$$

где функция q: $[0, T) \to \mathbf{R}^k$ *— непрерывна; функции* Ψ_i: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ *— монотонно возрастающие в* $\mathbf{R}^k$ *и для элементов постоянной матрицы* $A = (a_{ij})_1^k$ *выполнено*

$$a_{ij} \geqslant 0, \quad \text{при } i\neq j. \tag{20}$$

Тогда

$$v(t) \leqslant u(t), \tag{21}$$

где $u(t)$ *— решение задачи*

$$\frac{du}{dt} = Au+q(t), \quad t\in[0, T),\ t\neq t_i,$$

$$u(t_i+0) = \Psi_i(u(t_i)), \quad u(0) = u_0.$$

Доказательство. При $t\in[0, T)\cap[0, t_1)$ имеем

$$\frac{dv}{dt} = Av+q(t)-f(t),$$

где $f(t) \geqslant 0$. Из условия (20) следует, что при $t \geqslant 0$ матрица e^{At} имеет неотрицательные элементы [9]. Тогда

$$v(t) = e^{At}v(0)+\int_0^t e^{A(t-s)}q(s)\,ds-\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{At}u_0+\int_0^t e^{A(t-s)}q(s)\,ds = u(t).$$

В частности, $v(t_1) \leqslant u(t_1)$ и $v(t_1+0) \leqslant u(t_1+0)$. Далее, справедливость неравенства (21) для последующих интервалов $(t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots$ доказывается индукцией по i.

Замечание 2. Теорема 6 остается в силе, если в (19) и (21) поменяем направление неравенств.

Замечание 3. Отметим, что в [10] получен другой аналог неравенства Бихари для функции со скачками, который является следствием Теоремы 4.

Литература

[1] В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис, *Об устойчивости движения при наличии толчков*, Сибирский мат. ж. 1 (1960), 233–237.

[2] —, —, *Случайные толчки в линейных динамических системах. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений*, Из-во АН УССР, Киев 1963, 64–81.

[3] А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко, *Системы с толчками в заданные моменты времени*, Мат. сб. 74 (1967).

[4] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием*, Дифф. уравнения 11 (1977), 1981–1992.

[5] —, —, *Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием*, Дифф. уравниения 1 (1981), 1995–2001.

[6] С. Д. Борисенко, *Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсным воздействием*, УМЖ 35 (1983), 144–150.

[7] Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, „Мир", Москва 1980, 300 с.

[8] Я. Д. Мамедов, С. Аширов, С. Атдаев, *Теоремы о неравенствах*, „Ылым", Ашхабад 1980, 232 с.

[9] Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, „Мир", Москва 1965, 276 с.

[10] Н. А. Перестюк, О. С. Черникова, *К вопросу об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием*, УМЖ 36 (1984), 190–195.

ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
„ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИЙ"

Reçu par la Rédaction le 1984.11.11