ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur les trièdres affines associés aux courbes

par J. MERZA (Debrecen)

Dédié à M. le professeur S. Gołąb
à l'occasion de son 60ième anniversaire

Grâce aux travaux de nombreux auteurs la théorie des courbes plongées dans un espace affine est bien développée, mais on s'est peu occupé des courbes tracées sur les surfaces. C'est E. Čech qui a signalé cette lacune dans son article [2] qui joue un rôle important dans la suite. Dans cet article on applique une méthode différente de celle de E. Čech en étudiant la relation entre les trièdres mobiles de deux espèces liés à la courbe et on trouve ainsi plusieurs faits géométriques. Nous nous occuperons en premier lieu de la géométrie affine unimodulaire, puis nous donnerons des résultats importants dans la géométrie centro-affine. Nous supposons que les fonctions dont il sera question sont dérivables jusqu'à l'ordre nécessaire.

§ 1. Les trièdres associés à une courbe. On sait que le trièdre mobile du cinquième ordre d'une courbe gauche rapportée à son arc affine s est composé des vecteurs x', x'', x''' (la virgule désigne la dérivation par rapport à s). Dans ce qui suit nous supposons que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Dans les recherches il est plus commode d'utiliser le repère introduit par A. Winternitz, dont les vecteurs sont

$$x_1 = x', \quad x_2 = x'', \quad x_3 = x''' + \frac{k}{4}x' \tag{1}$$

(k signifie la courbure affine de la courbe). Rappelons aussi que les formules de la variation de ce trièdre sont

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = k_1 x_1 + x_3, \quad x_3' = k_2 x_1 + 3k_1 x_2 . \tag{2}$$

Les invariants k_1 et k_2 figurant dans ces formules sont les courbures de la courbe. Considérons maintenant la courbe

$$u^a = u^a(s) \quad (a = 1, 2) \tag{3}$$

de la surface

$$x = x(u^1, u^2) . \tag{4}$$

On peut attacher à cette courbe le trièdre mobile x', x'', x''', l'équation de la courbe dans l'espace étant donnée par l'équation

$$x = x\big(u^1(s),\, u^2(s)\big)\,. \tag{5}$$

Nous voulons montrer comment on peut trouver un autre trièdre mobile associé à la courbe sur la surface.

C'est le vecteur tangent de la courbe qui se présente naturellement comme le premier vecteur du trièdre. En désignant les vecteurs du trièdre sur la surface par les lettres $t_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ nous pouvons écrire

$$x' = t_{(1)}\,. \tag{6}$$

Pour établir les relations suivantes formons le vecteur x''. En différentiant l'expression (5) nous obtenons

$$x'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u^\alpha}\,u'^\alpha\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\,u'^\alpha u'^\beta + \frac{\partial x}{\partial u^\alpha}\,u''^\alpha\,.$$

Moyennant les formules différentielles

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}\frac{\partial x}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta}\cdot n$$

de Gauss (voir [4]) nous aurons

$$x'' = (u''^\varrho + \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}\,u'^\alpha u'^\beta)\frac{\partial x}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta}\,u'^\alpha u'^\beta\cdot n\,,$$

n désignant le vecteur normal à la surface. Désignons la première forme fondamentale affine de la surface par

$$\varphi = G_{\alpha\beta}\,u'^\alpha u'^\beta$$

et remarquons que c'est la dérivée invariante du vecteur tangent qui figure entre parenthèses, et que par suite

$$x'' = \frac{Du'^\varrho}{ds}\cdot\frac{\partial x}{\partial u^\varrho} + \varphi\cdot n\,.$$

Choisissons pour deuxième vecteur du trièdre le vecteur

$$t_{(2)} \overset{\text{def}}{=} \frac{Du'^\varrho}{ds}\cdot\frac{\partial x}{\partial u^\varrho} \tag{7}$$

situé dans le plan tangent et lié à la courbe d'une manière invariante et pour troisième vecteur le vecteur n

$$t_{(3)} \overset{\text{def}}{=} n\,. \tag{8}$$

L'expression du vecteur x'' est donc de la forme

$$x'' = t_{(2)} + \varphi\cdot t_{(3)}\,. \tag{9}$$

La décomposition du vecteur x''' par rapport aux vecteurs $t_{(i)}$ exige simple calcul, qui conduit à la formule

$$x''' = A^\sigma \frac{\partial x}{\partial u^\sigma} + A \cdot n \tag{10}$$

où

$$A^\sigma = u'''^\sigma + 3\Gamma^{*\sigma}_{\alpha\beta} u''^\alpha u'^\beta + \left(\frac{\partial \Gamma^{*\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}\Gamma^{*\sigma}_{\varrho\gamma} + G_{\alpha\beta}B^\sigma_\gamma\right) u'^\alpha u'^\beta u'^\gamma \tag{11}$$

et

$$A = 3G_{\alpha\beta}u''^\alpha u'^\beta + \left(\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + G_{\varrho\gamma}\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}\right) u'^\alpha u'^\beta u'^\gamma , \tag{12}$$

ou, sous une forme plus concise,

$$A = \psi + \tfrac{3}{2}\varphi' \tag{13}$$

dans laquelle

$$\psi = A_{\alpha\beta\gamma} u'^\alpha \, u'^\beta \, u'^\gamma$$

désigne la deuxième forme fondamentale de la surface. Pour éliminer les vecteurs $\partial x/\partial u^\alpha$ figurant dans la formule (10) nous les écrivons sous la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u^\alpha} = c^\varrho_\alpha \, t_{(\varrho)} .$$

Si nous y substituons les expressions (6) et (7) des vecteurs $t_{(1)}$ et $t_{(2)}$ nous obtenons, à cause de l'indépendance linéaire des vecteurs $\partial x/\partial u^\alpha$, le système d'équations

$$c^1_1 t^1 + c^2_1 \frac{Dt^1}{ds} = 1 ,$$

$$c^1_1 t^2 + c^2_1 \frac{Dt^2}{ds} = 0 .$$

De là il résulte que si le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} t^1 & \dfrac{Dt^1}{ds} \\ t^2 & \dfrac{Dt^2}{ds} \end{vmatrix} \tag{14}$$

du système est différent de zéro, on a

$$c^1_1 = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{Dt^2}{ds} , \qquad c^2_1 = -\frac{1}{\delta} \cdot t^2 .$$

D'une manière analogue on obtient les autres coefficients

$$c^1_2 = -\frac{1}{\delta} \cdot \frac{Dt^1}{ds} , \qquad c^2_2 = \frac{1}{\delta} \cdot t^1 .$$

En connaissant les quantités c^{ϱ}_{α} on a

$$x''' = A^{\sigma} c^{\alpha}_{\sigma} t_{(\alpha)} + A t_{(3)}$$

puis avec la notation

$$c^{\alpha}_{\sigma} A^{\sigma} \overset{\text{def}}{=} F^{\alpha} \tag{15}$$

on obtient

$$x''' = F^{\alpha} t_{(\alpha)} + A t_{(3)} . \tag{16}$$

On voit que la relation entre les deux trièdres mobiles est donnée par la matrice

$$F = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi \\ F^1 & F^2 & A \end{Vmatrix} . \tag{17}$$

En supposant $\delta \neq 0$ nous excluons une classe de courbes. Si $\delta = 0$, on a

$$\frac{Dt^{\alpha}}{ds} = \mu(s) t^{\alpha} ,$$

d'où

$$t_{(2)} = \mu(s) t_{(1)} .$$

En utilisant ce fait l'expression (9) s'écrit sous la forme

$$x'' = \mu t_{(1)} + \varphi t_{(3)} .$$

Si nous employons la définition des vecteurs $t_{(1)}$ et $t_{(3)}$ nous trouvons

$$\varphi n = x'' - \mu x' ,$$

d'où l'on voit que le plan osculateur de la courbe contient la normale de la surface et que par suite la courbe est une géodésique de première espèce (voir [6]). Le cas $\varphi = 0$ est exclu ici; d'ailleurs x' et x'' seraient alors linéairement dépendants.

Nous avons ainsi montré que si $\delta = 0$, la courbe est une géodésique affine de la surface. En partant de la définition d'une géodésique et en tenant compte de la relation (9) on peut démontrer qu'inversement, si la courbe est une géodésique, on a $\delta = 0$.

COROLLAIRE 1. *Si les vecteurs x', x'', x''' sont linéairement indépendants, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe sur la surface soit une géodésique affine est $\delta = 0$.*

Il est clair que si la courbe n'est pas une géodésique, l'indépendance linéaire des vecteurs x', x'', x''' entraîne celle des vecteurs $t_{(i)}$. Évidemment, selon le corollaire 1, dans ce cas les vecteurs $t_{(1)}$ et $t_{(2)}$ ne sont pas proportionnels et la normale affine de la surface n'étant pas dans le plan tangent, ces trois vecteurs forment un système indépendant. Les résultats obtenus donnent le

THÉORÈME 1. *Si une courbe tracée sur une surface n'est pas une géodésique et si son trièdre mobile du cinquième ordre est composé de vecteurs indépendants, on peut lui attacher un trièdre mobile sur la surface, lié au précédent par les formules*

$$x' = t_{(1)}, \qquad x'' = t_{(2)} + \varphi t_{(3)}, \qquad x''' = F^{\alpha} t_{(\alpha)} + A t_{(3)} . \tag{18}$$

Établissons enfin la relation entre le trièdre sur la surface et le trièdre de Winternitz. En vertu de (1) *on a*

$$x_1 = t_{(1)}, \qquad x_2 = t_{(2)} + \varphi t_{(3)}, \qquad x_3 = (F^1 + \tfrac{1}{4}k) t_{(1)} + F^2 t_{(2)} + A t_{(3)} . \tag{19}$$

Si $\varphi = 0$, alors $x'' = t_{(2)}$ et inversement. Il en résulte le

COROLLAIRE 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne soit asymptotique est la proportionnalité de sa normale principale à la dérivée invariante de son vecteur tangent.*

Maintenant nous allons calculer les dérivées des vecteurs $t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}$. La dérivée du vecteur $t_{(1)}$ étant identique au vecteur x'', on a d'après (18)

$$t'_{(1)} = t_{(2)} + \varphi t_{(3)} .$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial n}{\partial u^{\alpha}} = B^{\varrho}_{\alpha} \frac{\partial x}{\partial u^{\alpha}}$$

(voir [1], [6]) par suite

$$t'_{(3)} = n' = \frac{\partial n}{\partial u^{\alpha}} u'^{\alpha} = B^{\varrho}_{\alpha} u'^{\alpha} \frac{\partial x}{\partial u^{\varrho}} = B^{\varrho}_{\alpha} c^{\sigma}_{\varrho} u'^{\alpha} t_{(\sigma)} .$$

Tirons le vecteur $t_{(2)}$ de l'équation (9) et dérivons-le par rapport à s:

$$t'_{(2)} = \frac{d}{ds}(x'' - \varphi t_{(3)}) = x''' - \varphi' t_{(3)} - \varphi t'_{(3)} = (F^{\varrho} - \varphi B^{\mu}_{\alpha} c^{\varrho}_{\mu} u'^{\alpha}) t_{(\varrho)} + (A - \varphi') t_{(3)} .$$

THÉORÈME 2. *Les dérivées des vecteurs* $t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}$ *sont données par les expressions*

$$t'_{(1)} = t_{(2)} + \varphi t_{(3)} ,$$
$$t'_{(2)} = (F^{\varrho} - \varphi B^{\mu}_{\alpha} c^{\varrho}_{\mu} u'^{\alpha}) t_{(\varrho)} + (A - \varphi') t_{(3)} ,$$
$$t'_{(3)} = B^{\mu}_{\alpha} c^{\varrho}_{\mu} u'^{\alpha} t_{(\varrho)} .$$

§ 2. Le calcul des invariants de la courbe. Dans ce paragraphe nous donnerons l'expression des invariants liés à la courbe considérée comme courbe gauche à l'aide des quantités superficielles. Moyennant cette méthode il sera clair que les théorèmes qui sont valables dans le trièdre $\{x', x'', x'''\}$ peuvent être énoncés par l'emploi du trièdre sur la surface avec des quantités superficielles. Calculons d'abord la courbure et la torsion de la courbe. A cette fin écrivons le vecteur x^{IV} sous la forme

$$x^{\mathrm{IV}} = \Phi^{\varrho} t_{(\varrho)} + \Phi t_{(3)} \tag{21}$$

où

$$\Phi^1 = \frac{\partial F^1}{\partial u^a} u'^a + B^{\mu}_a c^1_{\mu} u'^a (A - F^2 \varphi) + F^1 F^2 ,$$

$$\Phi^2 = \frac{\partial F^2}{\partial u^a} u'^a + F^1 + (F^2)^2 + B^{\mu}_a c^2_{\mu} u'^a (A - F^2 \varphi) , \tag{22}$$

$$\Phi = \frac{\partial A}{\partial u^a} u'^a + F^1 \varphi + F^2 (A - \varphi') .$$

Considérons maintenant la relation bien connue

$$x^{\mathrm{IV}}(s) + k(s) x''(s) + t(s) x'(s) = 0 \tag{23}$$

qui est valable pour toutes les courbes rapportées à leurs arcs affines. En y substituant l'expression (21) du vecteur x^{IV} et les expressions des vecteurs x' et x'' on obtient

$$\big(\Phi^1 + t(s)\big) t_{(1)} + \big(\Phi^2 + k(s)\big) t_{(2)} + (\Phi + \varphi k) t_{(3)} = 0$$

d'où, à cause de l'indépendance linéaire des vecteurs $t_{(i)}$, on a

$$k(s) = -\Phi^2 , \qquad t(s) = -\Phi^1 \tag{24}$$

et évidemment la relation

$$\Phi = -k\varphi . \tag{25}$$

Si nous calculons la courbure k par la formule

$$k = (x', x''', x^{\mathrm{IV}})$$

nous pouvons faire une remarque. On peut écrire l'expression

$$k = (t_{(1)}, F^{\varrho} t_{(\varrho)} + A t_{(3)}, \Phi^{\varrho} t_{(\varrho)} + \Phi t_{(3)})$$

obtenue par la substitution des vecteurs $x', x''', x^{\mathrm{IV}}$ avec leurs formes dans le trièdre $\{t_{(i)}\}$ de sorte qu'on ait

$$k = (F^2 \Phi - A \Phi^2)(t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}) .$$

On voit facilement que

$$(t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}) = \left(t^1 \frac{Dt^2}{ds} - t^2 \frac{Dt^1}{ds}\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, n\right) = \delta |G|^{1/2}$$

et en faisant la substitution on a

$$k = \begin{vmatrix} F^2 & A \\ \Phi^2 & \Phi \end{vmatrix} \delta |G|^{1/2} .$$

Nous savons déjà que $k = -\Phi^2$; l'emploi de cette relation nous fournit, si $k \neq 0$,

$$\delta |G|^{1/2} (A - F^2 \varphi) = 1 .$$

Si l'on introduit avec E. Čech l'invariant

(26) $$\Delta = \varepsilon \cdot \frac{|G|^{1/2} \cdot \delta}{\varphi^{3/2}} , \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn} G, \ \varphi \neq 0$$

(voir [2]) qui est une généralisation naturelle de la notion de courbure géodésique dans la géométrie riemannienne on aura

(27) $$\Delta = \frac{\varepsilon}{(A - F^2 \varphi) \varphi^{3/2}} .$$

THÉORÈME 3. *La courbure et la torsion d'une courbe sont données par les formules* (24) *à l'aide desquelles nous trouvons une autre forme* (27) *de l'invariant* (26) *introduit par E. Čech. Cette forme met l'invariant Δ dans son vrai jour en montrant qu'il dépend essentiellement du déterminant de la matrice* (17) *qui exprime la liaison entre les trièdres mobiles.*

§ 3. La signification géométrique de F^2 et la construction du trièdre de deuxième espèce. Dans le paragraphe précédent nous avons vu quelle est la signification géométrique des quantités Φ^ϱ et Φ. Dans ce paragraphe nous donnons la signification de la quantité F^2. Projetons la courbe sur le plan tangent parallèlement à la direction de la normale affine de la surface et construisons la normale affine unimodulaire de la courbe plane. Cette construction a un sens, car la normale affine unimodulaire d'une courbe plane est invariante par rapport aux transformations affines arbitraires. Examinons la relation entre cette normale et le vecteur $t_{(2)}$. Partons du développement taylorien

$$x(s) = x(0) + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \cdot s + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 \cdot \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 \cdot \frac{s^3}{3!} + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 \cdot \frac{s^4}{4!} + O(5)$$

pris dans le voisinage de $s = 0$ de la courbe. En remplaçant les dérivées par les formules déjà connues nous aurons

$$x(s) = t_{(1)} s + (t_{(2)} + \varphi t_{(3)}) \frac{s^2}{2!} + (F^\varrho t_{(\varrho)} + A t_{(3)}) \frac{s^3}{3!} + (\Phi^\varrho t_{(\varrho)} + \Phi t_{(3)}) \frac{s^4}{4!} + O(5) ,$$

où

$$x(s) = \left[s + F^1\frac{s^3}{3!} + \Phi^1\frac{s^4}{4!} + O(5)\right]t_{(1)} + \left[\frac{s^2}{2!} + F^2\frac{s^3}{3!} + \Phi^2\frac{s^4}{4!} + O(5)\right]t_{(2)} + \\ + \left[\varphi\frac{s^2}{2!} + A\frac{s^3}{3!} + \Phi\frac{s^4}{4!} + O(5)\right]t_{(3)}. \tag{28}$$

La projection parallèle à la normale affine de la surface de la courbe sur le plan tangent est donnée dans le système $\{t_{(1)}, t_{(2)}\}$ par les équations

$$\begin{aligned} \xi^1(s) &= s + F^1\frac{s^3}{3!} + \Phi^1\frac{s^4}{4!} + O(5), \\ \xi^2(s) &= \frac{s^2}{2!} + F^2\frac{s^3}{3!} + \Phi^2\frac{s^4}{4!} + O(5) \end{aligned} \tag{29}$$

(ξ^1, ξ^2 signifient les coordonnées relatives au système $\{t_{(1)}, t_{(2)}\}$). Pour déterminer la normale affine tenons compte de ce que le paramètre s figurant dans les équations de la courbe plane n'est pas la longueur d'arc de cette courbe, on doit donc utiliser les formules relatives à un paramètre arbitraire. La normale affine de la courbe plane sera fournie par $\xi''(\sigma)$, où σ signifie la longueur d'arc de cette courbe. On sait que pour la quantité σ on a la relation

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left(\frac{d\xi(s)}{ds}, \frac{d^2\xi(s)}{ds^2}\right)^{1/3}. \tag{30}$$

En désignant le second membre par a on obtient

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{1}{a}$$

et

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \frac{d^2\xi}{ds^2}\cdot\frac{1}{a^2} - \frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{da}{ds}. \tag{31}$$

Si nous développons le second membre nous obtenons pour les composantes de la normale affine les valeurs

$$\nu^1 = -\frac{F^2}{3}, \quad \nu^2 = 1. \tag{32}$$

Théorème 4. *La quantité F^2 caractérise la déviation du vecteur $t_{(2)}$ de la normale affine de la courbe construite par une projection, parallèle à la normale affine de la surface de la courbe, sur le plan tangent.*

En nous basant sur ce théorème nous pouvons attacher à la courbe en chaque point un système de 3 droites qui est lié à la courbe d'une manière invariante par rapport aux transformations affines arbitraires. Ces droites sont la tangente à la courbe, la droite normale de la projection de la courbe sur le plan tangent et la normale affine à la surface.

On peut remplacer le vecteur $t_{(2)}$ par le vecteur ν, remarquons pourtant que, à cause du choix du paramètre s, le trièdre $\{t_{(1)}, \nu, t_{(3)}\}$, n'est lié à la courbe d'une manière invariante que par rapport aux transformations affines unimodulaires. Nous appelons ce trièdre trièdre de deuxième espèce.

DÉFINITION. Le *trièdre de deuxième espèce* est composé des vecteurs $\tau_{(i)}$ définis par les expressions

$$\tau_{(1)} = t_{(1)}, \quad \tau_{(2)} = \nu = -\tfrac{1}{3}F^2 t_{(1)} + t_{(2)}, \quad \tau_{(3)} = t_{(3)}. \tag{33}$$

Le trièdre ainsi défini se rattache au trièdre $\{x', x'', x'''\}$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} x' &= \tau_{(1)}, \\ x'' &= \tfrac{1}{3}F^2\tau_{(1)} + \tau_{(2)} + \varphi\tau_{(3)}, \\ x''' &= [F^1 + \tfrac{1}{3}(F^2)^2]\tau_{(1)} + F^2\tau_{(2)} + A\tau_{(3)}. \end{aligned} \tag{34}$$

Dans les applications nous aurons besoin des dérivées d'ordre supérieur. C'est pourquoi nous donnons ici les formules des dérivées du repère $\{\tau_{(i)}\}$ en omettant les calculs:

$$\begin{aligned} \tau'_{(1)} &= \tfrac{1}{3}F^2\tau_{(1)} + \tau_{(2)} + \varphi\tau_{(3)}, \\ \tau'_{(2)} &= \omega^i\tau_{(i)}, \\ \tau'_{(3)} &= (c^1_\mu + \tfrac{1}{3}F^2 c^2_\mu)B^\mu_\alpha u'^\alpha\tau_{(1)} + B^\mu_\alpha c^2_\mu u'^\alpha\tau_{(2)}. \end{aligned} \tag{35}$$

La forme explicite des coefficients ω^i est

$$\begin{aligned} \omega^1 &= F^1 + \frac{2}{9}(F^2)^2 - \varphi B^\mu_\alpha u'^\alpha\left(c^1_\mu + \frac{F^2}{3}c^2_\mu\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial F^2}{\partial u^\alpha}u'^\alpha, \\ \omega^2 &= \frac{2F^2}{3} - \varphi B^\mu_\alpha c^2_\mu u'^\alpha, \qquad \omega^3 = A - \varphi' - \frac{\varphi F^2}{3}. \end{aligned} \tag{36}$$

§ 4. Interprétation géométrique de la première forme fondamentale d'une surface et autres applications. Dans la géométrie riemannienne la détermination de la première forme fondamentale de la surface revient au calcul du carré de l'élément linéaire d'une courbe. Les efforts qui tendent à employer cette méthode dans la géométrie différentielle affine sont en général difficilement réalisables. Dans l'article cité de Čech la longueur d'arc doit être calculée de deux manières suivant qu'il s'agit de lignes asymptotiques ou non. Nous montrons ici comment l'application du trièdre mobile sur la surface mène à un procédé par lequel nous obtenons également la première forme fondamentale à l'aide du calcul d'un arc affine, sans qu'il soit nécessaire de distinguer deux cas. Pour cela nous prouvons le

Théorème 5. *Si nous projetons une courbe tracée sur la surface parallèlement au vecteur $t_{(2)}$ sur le plan déterminé par la tangente à la courbe et la normale à la surface et si nous calculons la longueur d'arc affine de la courbe plane ainsi obtenue, nous avons*

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{s=0} = \left(G_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\cdot\frac{du^\beta}{ds}\right)^{1/3}. \tag{37}$$

Pour démontrer ce théorème partons de l'expression paramétrique (28) de la courbe dans le trièdre $t_{(i)}$ et projetons la courbe parallèlement au vecteur $t_{(2)}$ sur le plan $\{t_{(1)}, t_{(3)}\}$. Les équations de la courbe obtenue sont

$$\begin{aligned} \xi^1(s) &= s + F^1\frac{s^3}{3!} + O(4), \\ \xi^2(s) &= \varphi\frac{s^2}{2} + A\frac{s^3}{3!} + O(4). \end{aligned} \tag{38}$$

A l'aide de la formule (30) on a simplement le résultat

$$\left(\frac{d\xi}{ds}, \frac{d^2\xi}{ds^2}\right)_0 = \varphi(0)$$

d'où on peut tirer le théorème annoncé.

La connaissance de la quantité $(d\sigma/ds)_0$ en tout point de la courbe permet de définir une fonction $L\big(u(s), u'(s)\big)$ dont on peut dériver le tenseur fondamental affine de la surface comme il suit:

$$G_{\alpha\beta}\big(u(s)\big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 L^3\big(u(s), u'(s)\big)}{\partial u'^\alpha \partial u'^\beta}.$$

Il y a lieu de remarquer que la courbure de la courbe plane obtenue de la courbe sur la surface par une projection parallèle à la normale affine à la surface sur le plan tangent est liée aux quantités superficielles par la relation

$$9\varkappa_0 + 3k + 12F^1 + 5(F^2)^2 = 0 \tag{39}$$

($\varkappa_0$ signifie la courbure affine unimodulaire de la courbe plane au point $s = 0$ qui — comme il ressort de la formule (39) — est un invariant aussi dans l'espace affine unimodulaire). Cette relation donne la signification géométrique de la quantité F^1. Pour interpréter la quantité A, qui n'a pas encore de signification géométrique, projetons la courbe parallèlement au vecteur $t_{(2)}$ sur le plan $\{t_{(1)}, t_{(3)}\}$. En désignant la courbure affine unimodulaire de la courbe obtenue au point $s = 0$ par la lettre λ_0 on peut constater que

$$9\varphi^{8/3}\lambda_0 + 3\varphi^2(k + 4F^1) + 5A^2 = 0 \tag{40}$$

d'où nous déduisons le caractère invariant de λ_0 et la caractérisation de A. En supposant $\varphi \neq 0$ nous pouvons éliminer de cette relation la quantité F^1 à l'aide de l'équation (39) et la relation

$$\varepsilon A = \frac{1}{2\Delta\varphi^{3/2}} - a\Delta\varphi^{7/2} \tag{41}$$

ainsi obtenue, où a signifie

$$a = \tfrac{9}{10}(\lambda_0\varphi^{2/3} - \varkappa_0)\,,$$

nous donne une forme explicite de A.

THÉORÈME 6. *L'interprétation des quantités F^1 et A est fournie à l'aide des courbures des projections de la courbe sur le plan tangent et sur le plan $\{t_{(1)}, t_{(3)}\}$ et ce sont les formules* (39) *et* (41) *qui l'expriment.*

§ 5. Le trièdre mobile des courbes d'une surface dans la géométrie centro-affine. L'examen que nous allons faire dans la géométrie centro-affine ne diffère guère, au point de vue de la méthode, de celui qui se fait dans le cas unimodulaire. Nous abordons cette question, car il y aura quelques modifications dans les résultats. Par exemple, nous donnerons une caractéristique simple de la courbure d'ordre minimum introduite par I. Popa (voir [5]).

Si nous considérons la courbe rapportée à son arc centro-affine sous la forme (5), la relation

$$x'' = t_{(2)} + \varphi t_{(3)} \tag{42}$$

obtenue de l'identité

$$x' = t_{(1)} \tag{43}$$

par dérivation successive est évidemment vraie. Dans ces formules $t_{(2)}$ signifie la dérivée invariante

$$t_{(2)} = (u''^{\alpha} + \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} u'^{\beta} u'^{\gamma})\,\frac{\partial x}{\partial u^{\alpha}}$$

du vecteur tangent de la courbe par rapport à la longueur d'arc centro-affine, $t_{(3)}$ désigne le vecteur de position et φ est la première forme fondamentale centro-affine de la surface. La relation entre les trièdres mobiles de la courbe a donc la forme

$$x = t_{(3)}\,, \qquad x' = t_{(1)}\,, \qquad x'' = t_{(2)} + \varphi t_{(3)}\,. \tag{44}$$

Dans les raisonnements ultérieurs nous supposons toujours

$$(x, x', x'') \neq 0$$

d'où résulte que le déterminant

$$(t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)})\,,$$

égal au précédent, n'est pas zéro. Le cas exclu caractérise les géodésiques centro-affines. Nous allons calculer la troisième et la quatrième dérivée du vecteur x. De la troisième formule de (44) nous obtenons l'expression

$$x''' = A^{\varrho}\frac{\partial x}{\partial u^{\varrho}} + Ax + \varphi t_{(1)}\,, \tag{45}$$

où nous avons appliqué les notations

$$\begin{aligned} A^{\varrho} &= u'''^{\varrho} + 3\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}u''^{\alpha}u'^{\beta} + \left(\frac{\partial\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} + \Gamma^{*\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{*\varrho}_{\mu\gamma}\right)u'^{\alpha}u'^{\beta}u'^{\gamma}\,,\\ A &= 3G_{\alpha\beta}u''^{\alpha}u'^{\beta} + \left(\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} + G_{\mu\gamma}\Gamma^{*\mu}_{\alpha\beta}\right)u'^{\alpha}u'^{\beta}u'^{\gamma}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Substituons dans la formule (45)

$$\frac{\partial x}{\partial u^{\alpha}} = a^{\mu}_{\alpha}t_{(\mu)}$$

et faisons les réductions. Le résultat sera

$$x''' = C^{\varrho}t_{(\varrho)} + Ct_{(3)}\,. \tag{47}$$

Les coefficients C figurant ici sont

$$C^1 = A^{\varrho}c^1_{\varrho} + \varphi, \qquad C^2 = A^{\varrho}c^2_{\varrho}, \qquad C = A = \tfrac{3}{2}\varphi' + \Psi\,. \tag{48}$$

En remplaçant les vecteurs $\partial x/\partial u^{\alpha}$ par les vecteurs $t_{(\alpha)}$ nous obtenons le déterminant

$$\delta = \left(t^{\alpha}, \frac{Dt^{\alpha}}{ds}\right) \tag{49}$$

et nous supposons qu'il n'est pas zéro. Déterminons maintenant le vecteur x^{IV}. Pour cela il sera utile de donner les formules de dérivation du repère sur la surface. On peut les obtenir par un calcul simple; nous n'écrivons ici que des résultats

$$\begin{aligned} t'_{(1)} &= t_{(2)} + \varphi t_{(3)}\,,\\ t'_{(2)} &= (C^1 - \varphi)t_{(1)} + C^2 t_{(2)} + (C - \varphi')t_{(3)}\,,\\ t'_{(3)} &= t_{(1)}\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Après cela dérivons encore une fois l'identité (47) et utilisons les équations (50). Dans l'expression

$$x^{\mathrm{IV}} = \Gamma^{\alpha}t_{(\alpha)} + \Gamma t_{(3)} \tag{51}$$

ainsi obtenue les valeurs des coefficients sont

$$(52)\qquad \begin{aligned} \Gamma^1 &= \frac{\partial C^1}{\partial u^\alpha}u'^\alpha + C^1C^2 - \varphi C^2 + C\,, \\ \Gamma^2 &= \frac{\partial C^2}{\partial u^\alpha}u'^\alpha + C^1 + (C^2)^2\,, \\ \Gamma &= \frac{\partial C}{\partial u^\alpha}u'^\alpha + C^1\varphi + C^2(C-\varphi')\,. \end{aligned}$$

Les coefficients C^α ont des expressions assez compliquées. Mais nous mettons leurs significations géométriques en pleine évidence si on tient bien compte du fait qu'entre les vecteurs du trièdre mobile de la courbe on a la relation

$$(53)\qquad x''' = x + p_2 x' + \tau x''$$

dans laquelle p_2 et τ signifient la courbure et la torsion centro-affine introduites par I. Popa [5]. Si l'on substitue les vecteurs dans (53), les équations (44) et (47) on aura

$$C^\varrho t_{(\varrho)} + C t_{(3)} = p_2 t_{(1)} + \tau t_{(2)} + (1+\tau\varphi)t_{(3)}\,,$$

d'où

$$(54)\qquad C^1 = p_2, \qquad C^2 = \tau, \qquad C = 1 + \tau\varphi\,.$$

Nous avons ainsi obtenu la signification des coefficients C et, d'autre part, la forme de la courbure et de la torsion exprimées par les quantités superficielles.

Nous voulons encore démontrer deux applications du repère mobile sur la surface, dont l'une caractérise la torsion centro-affine et l'autre détermine la courbure centro-affine d'ordre minimum.

Dans le premier cas posons la question: comment est située la normale affine de la courbe plane qui est la projection de la courbe considérée sur le plan tangent? A cette fin partons du développement

$$(55)\qquad x(s) = x(0) + x'(0)s + x''(0)\frac{s^2}{2} + x'''(0)\frac{s^3}{3!} + x^{\mathrm{IV}}(0)\frac{s^4}{4!} + O(5)$$

de la courbe où les dérivées seront remplacées par les expressions (44), (47) et (51). On obtient ainsi la décomposition

$$(56)\qquad \begin{aligned} x(s) = {} & \left(s + C^1\frac{s^3}{3!} + \Gamma^1\frac{s^4}{4!} + O(5)\right)t_{(1)} + \left(\frac{s^2}{2} + C^2\frac{s^3}{3!} + \Gamma^2\frac{s^4}{4!} + O(5)\right)t_{(2)} + \\ & + \left(1 + \varphi\frac{s^2}{2} + C\frac{s^3}{3!} + \Gamma\frac{s^4}{4!} + O(5)\right)t_{(3)}\,. \end{aligned}$$

Les équations de la courbe projetée parallèlement au vecteur x sur le plan tangent sont

$$\xi^1(s) = s + C^1\frac{s^3}{3!} + \Gamma^1\frac{s^4}{4!} + O(5)\,,$$

(57)

$$\xi^2(s) = \frac{s^2}{2} + C^2\frac{s^3}{3!} + \Gamma^2\frac{s^4}{4!} + O(5)\,.$$

Comme s n'est pas la longueur d'un arc unimodulaire de cette courbe plane, calculons les composantes de la normale affine de la courbe. On peut utiliser la formule (31) et on aura le résultat

$$\nu^1 = -\frac{C^2}{3} = -\frac{\tau}{3}\,, \qquad \nu^2 = 1\,.$$

Désignons par ν le vecteur dans l'espace dont les composantes sont ν^1 et ν^2 dans le plan tangent et formulons le

THÉORÈME 7. *Si nous projetons la courbe tracée sur la surface parallèlement au vecteur $t_{(3)}$ sur le plan tangent et nous construisons la normale affine ν de la courbe obtenue alors on a*

$$t_{(2)} - \nu = \tfrac{1}{3}\tau\cdot t_{(1)}\,,$$

c'est-à-dire la torsion mesure la déviation de ces vecteurs. (*Il est intéressant que la différence $t_{(2)} - \nu$ ne dépende pas des quantités superficielles.*)

C'est M. I. Popa qui a introduit dans son article [5] la notion de courbure centro-affine d'ordre minimum. On sait que cette courbure, notée k, est définie par

$$k \overset{\text{def}}{=} p_2 - \tfrac{1}{3}\tau' + \tfrac{2}{9}\tau^2\,. \tag{58}$$

Nous allons prouver le

THÉORÈME 8. *La courbure centro-affine d'ordre minimum d'une courbe sur la surface est égale à la courbure négative affine unimodulaire de la courbe même qui est la projection, parallèle au vecteur de position de la courbe considérée, sur le plan tangent.*

Pour prouver le théorème partons des équations (57) de la courbe projetée et utilisons la formule

$$\varkappa = \frac{3(\dot\xi\ddot\xi)(\dot\xi\xi^{\mathrm{IV}}) + 12(\dot\xi\ddot\xi)(\ddot\xi\dddot\xi) - 5(\dot\xi\dddot\xi)^2}{9(\dot\xi\ddot\xi)^{8/3}}\,. \tag{59}$$

qui sert au calcul de la courbure unimodulaire des courbes données par un paramètre arbitraire. Les valeurs au point $s = 0$ des déterminants qui y figurent sont

$$(\dot\xi\ddot\xi) = 1\,, \quad (\dot\xi\dddot\xi) = C^2, \quad (\ddot\xi\dddot\xi) = -C^1, \quad (\dot\xi\xi^{\mathrm{IV}}) = \Gamma^2\,. \tag{60}$$

En substituant ces valeurs on a

$$\varkappa = \frac{3\Gamma^2 - 12C^1 - 5(C^2)^2}{9}.$$

En utilisant les formules (52) et (54) on obtient

$$-\varkappa = p_2 - \frac{\tau'}{3} + \frac{2\tau^2}{9}$$

d'où, en vertu de (58), il vient

$$-\varkappa = k,$$

c.q.f.d.

Travaux cités

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* II, Berlin 1923.

[2] E. Čech, *Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine*, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk 28 (1923), pp. 1-47.

[3] O. Mayer, *Géométrie centro-affine différentielle des surfaces*, Ann. Sci. Univ. Jassy, Sect. I, 21 (1934), pp. 1-77.

[4] J. Merza, *L'introduction de la différentiation absolue dans l'espace affine*, Publ. Math. Debrecen 5 (1958), pp. 330-337.

[5] I. Popa, *Géométrie centro-affine hyperbolique des courbes gauches*, Ann. Sci. Univ. Jassy, Sect. I, 21 (1934), pp. 78-140.

[6] P. A. Shirokov, A. P. Shirokov, *Géométrie différentielle affine*, Moscou 1959 (en russe).

Reçu par la Rédaction le 16. 2. 1961