INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
BOGDAN BOJARSKI, ANDRZEJ MOSTOWSKI,
MARCELI STARK, STANISŁAW TURSKI

LXX

Z. CHARZYŃSKI et J. ŚLADKOWSKA

Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes

WARSZAWA 1970
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

5.7133

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 5
* **Informations préliminaires** 8

I. FONCTIONS RATIONNELLES SIMPLES

1. Interpolation locale 15
2. Prolongement de la famille des fonctions rationnelles simples au cercle fermé du paramètre 22
3. Variations des fonctions rationnelles simples 26

II. APPROXIMATIONS SUCCESSIVES ET RÉSULTAT FINAL

0. Formule fondamentale pour les variations des fonctions univalentes bornées 41
1. Approximation 42
2. Variation des fonctions déterminantes 47
3. Variation des fonctions accommodées 51
4. Variation des fonctions intérieures 57
5. Passage à la limite et déduction de la formule fondamentale 67

Bibliographie 76

Introduction

En 1955 l'un de nous a introduit dans [3] la notion de fonctions algébriques, univalentes dans le cercle unité, de la forme

$$(*) \qquad a(z) = a_1 z + \ldots,$$

vérifiant l'équation $\Omega\big(a(z)\big) = X(z)$, où

$$\Omega(w) = \frac{D_L}{w^L} + \ldots + D_0 + \ldots + \bar{D}_L w^L,$$

$$X(z) = \frac{E_L}{z^L} + \ldots + E_0 + \ldots + \bar{E}_L z^L$$

sont des fonctions rationnelles, symétriques par rapport à la circonférence unité. Cela permis de démontrer qu'à l'aide des fonctions du type (*) on peut arbitrairement approcher, après une normalisation convenable, toutes les fonctiones univalentes dans le cercle unité; de plus on obtient avec elles le théorème classique de Riemann sur la représentation conforme [5] par une méthode nouvelle et entièrement élémentaire et, dans la théorie moderne des fonctions, l'équation structurale de Löwner par une méthode nouvelle, particulièrement simple [15], [9].

Dans le présent ouvrage nous obtenons, à l'aide des fonctions mentionnées du type (*), un nouveau résultat de la théorie moderne des fonctions, à savoir la variation intérieure analytique des fonctions univalentes bornées.

Les premières formules non analytiques de la variation intérieure des fonctions univalentes non bornées ont été données en 1938 par M. Schiffer dans [22] et, plus tard, sous une forme un peu différente, par ce même auteur en 1943 dans [23]. Presque en même temps de pareilles formules ont été obtenues en 1946 et 1947 par G. M. Golusin dans [11], [12] et [13], et aussi en 1943, 1945, 1946 et 1950 par A. C. Schaeffer et D. C. Spencer dans [19], [20] et [21]. Pour les fonctions univalentes bornées les formules correspondantes non analytiques ont été données par l'un de nous en 1948, 1953 dans [1], [2], par H. L. Royden en 1949 dans [17] et par A. C. Schaeffer et D. C. Spencer en 1950 dans [21].

En 1962 P. L. Duren et M. Schiffer ont obtenu dans [8] des formules sur la variation analytique pour les fonctions univalentes non bornées.

Le résultat des auteurs de cet ouvrage s'engage dans la même voie. Ils obtiennent une formule nouvelle sur la variation analytique pour les fonctions univalentes bornées, analogue à celle qu'ont obtenue Duren et Schiffer pour les fonctions non bornées; de même, dans la nouvelle méthode de déduction, entièrement élémentaire, dont se sont servi les auteurs, on profite de moyens qui ne dépassent pas les plus simples éléments d'Analyse, tels que les premiers chapitres de la théorie des fonctions analytiques uniformes et de la théorie des équations différentielles ordinaires. Les moyens qu'utilise la méthode appliquée dans [8] sont beaucoup plus difficiles.

Remarquons que les recherches sur les fonctions univalentes non bornées et bornées diffèrent en général entre elles.

Ces formules analytiques introduisent dans la théorie des fonctions univalentes les variations de rangs supérieurs au premier.

Nous espérons que la construction des variations à l'aide des solutions d'équations différentielles simples, donnée par les formules (31) et (54) de 5, chapitre II, jettera un nouveau jour sur la nature des variations des fonctions univalentes et qu'elle pourra être appliquée au cas des classes de fonctions plus générales aussi bien que plus spéciales.

La longueur de cet ouvrage se justifie, entre autres, par la circonstance que nous avons essayé d'y motiver même les plus simples remarques. Le lecteur connaissant la théorie élémentaire des fonctions pourra évidemment en omettre la plupart.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que dans cet ouvrage les théorèmes, les lemmes et les formules d'une même partie sont cités en indiquant leurs numéros, ceux d'un même chapitre en indiquant leurs numéros et ceux de la partie correspondant, enfin ceux d'un autre chapitre en indiquant leurs numéros, ceux de la partie et du chapitre correspondants.

Dans le chapitre I nous exposons les propriétés générales des fonctions rationnelles simples et, en particulier, rationnelles spéciales et un lemme fondamental sur la famille analytique des variations (2, 3) pour la fonction rationnelle simple (1, 3), dont la dérivée admet des racines dans certains domaines 1 de 3. Il est essentiel ici que le cercle $|t| < R$ du paramètre correspondant t ne dépend pas du degré de la fonction initiale (1, 3) et qu'il existe une relation simple (31, 3) entre la famille des variations (2, 3) et la solution (19, 3) de l'équation différentielle (22, 3) à points singuliers (3, 3) contenus dans les domaines fixés de 1, 3. Dans le chapitre II nous donnons des informations sur l'approximation, la construction des familles analytiques de variations (11, 2) et (18, 3) pour les fonctions approximantes: déterminantes (1, 2) et accomodées (5, 3); ensuite, nous y démontrons l'existence des familles analytiques de variations (8, 4) et (2, 0); enfin nous y donnons pour (8, 4) et (2, 0) les conditions différentielles

(57, 4) et (4, 0). Un fait important que nous y démontrons à l'aide des relations algébriques (9, 4), c'est que pour les valeurs réelles du paramètre t les fonctions intérieures (8, 4) existent et sont univalentes dans tout le cercle unité et, en particulier, qu'elles sont holomorphes dans le voisinage des points singuliers (20, 3) où la formule (31, 5), qui détermine la fonction (2, 0) à l'aide des solutions (18, 5) et (19, 5) des équations (20, 5) et (21, 5), est en défaut.

---

* Informations préliminaires

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

1. (a, b), $[a, b]$ et $\{a, b\}$ désigneront resp. un intervalle ouvert d'extrémités a et b, un intervalle fermé de mêmes extrémités et un intervalle d'extrémités a et b, dans le cas où on ne saura pas si les extrémités lui appartiennent ou non.

2. $\overrightarrow{[p, q]}$ désignera un segment orienté d'origine p et d'extrémité q, où p et q sont des nombres arbitraires complexes.

3. Outre le paramètre t parcourant un segment orienté $\overrightarrow{[a, b]}$ de l'axe réel, nous emploierons également un paramètre t parcourant un segment $\overrightarrow{[ai, bi]}$ de l'axe imaginaire.

4. E^* désignera la frontière de l'ensemble E, E' l'ensemble complémentaire de cet ensemble à tout l'espace, E° l'intérieur de E, $\bar{E}$ la fermeture de E.

5. Les symboles $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ et $\setminus$ signifieront resp.: „appartient à l'ensemble", „est contennu dans l'ensemble", la somme, le produit et la différence d'ensembles.

6. $K(a, r)$ désignera le cercle de centre a et de rayon r.

7. $K(\infty, r)$ désignera le cercle de centre ∞ et de rayon r, c.-à-d. l'extérieur du cercle $K(0, 1/r)$.

8. $\varrho(x, y)$, $\varrho(x, A)$ et $\varrho(A, B)$ désigneront resp. la distance des points x, y, la distance du point x à l'ensemble A, la distance des ensembles A, B.

9. Le nombre $h(A, B)$ défini par la formule

$$h(a, b) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \varrho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \varrho(b, a)\}$$

s'appellera la *distance au sens de Hausdorff* des ensembles A et B.

10. $\tilde{A}$ désignera l'ensemble symétrique de l'ensemble A par rapport à la circonférence unité $K^*(0, 1)$; en particulier, $\tilde{K}(0, 1)$ désignera l'extérieur du cercle unité.

11. La fonction $f(z)$ étant définie dans l'ensemble plan D, nous désignerons par $\tilde{f}(z)$ la fonction définie par la formule

$$\tilde{f}(z) = \left(\overline{f(\bar{z}^{-1})}\right)^{-1}$$

pour $z \in \tilde{D}$.

12. Si $f(x, \ldots)$ est une fonction d'une ou de plusieurs variables et E un certain ensemble de points $(x, \ldots)$, nous désignerons par $f(E)$ l'image de l'ensemble E par cette fonction.

Nous appliquerons des notations analogues et évidentes dans le cas où E sera une courbe.

13. Nous remplaçerons parfois le symbole $\overline{f(z)}$ par le symbole $\bar{f}(z)$.

14. Nous appellerons *a-diminution* du domaine plan G l'ensemble $G_a = \{z\colon z \in G,\ \varrho(z, G^*) > a\}$. Si le domaine G est limité par une courbe régulière fermée (comp. [18], p. 91-92), alors, comme il est facile de le voir, G_a est également un domaine pour a suffisamment petit.

15. Nous dirons que la suite des arcs plans (au sens de Jordan), $H_n\colon z = z_n(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ n = 1, 2, \ldots,$ est *convergente au sens du paramètre vers l'arc* $H_0\colon z = z_0(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$, si la suite des représentations paramétriques $\{z_n(t)\}$ converge uniformément vers $z_0(t)$ dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

16. Nous dirons que la suite des arcs $\{H_n\}$ plans est *convergente au sens de Hausdorff vers l'arc* H_0, si $h(H_n, H_0) \to 0$, où H_n et H_0 désignent ici les images géométriques des arcs respectifs, lorsque $n \to \infty$; alors pour tout nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ il existe un nombre N tel que tous les arcs H_n, où $n > N$, sont situés dans un ε-entourage de l'arc H_0, soit dans l'ensemble $\bigcup\limits_{z \in H_0} K(z, \varepsilon)$.

On voit facilement que la convergence d'une suite d'arcs au sens du paramètre entraîne la convergence de cette suite au sens de Hausdorff.

17. Une fonction de la forme

$$b(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \qquad b_1 > 0,$$

univalente dans le cercle unité $K(0, 1)$ et telle que $|b(z)| < 1$ pour $z \in K(0, 1)$ sera appelée *fonction bornée au sens de Löwner*.

18. Une fonction rationnelle $\delta(\mathfrak{z})$ de pôles uniques de mêmes multiplicités aux points 0 et ∞ de la forme

$$\delta(\mathfrak{z}) = \frac{f_k}{\mathfrak{z}^k} + \ldots + \frac{f_1}{\mathfrak{z}} + f_0 + \hat{f}_1 \mathfrak{z} + \ldots + \hat{f}_k \mathfrak{z}^k, \qquad f_k, \hat{f}_k \neq 0;\ k > 0,$$

sera dite *fonction rationnelle simple*; en même temps nous dirons que son *degré* est le nombre $2k$.

19. Une fonction rationnelle simple $\delta(\mathfrak{z})$, réelle sur la circonférence unité, c'est-à-dire de la forme

$$\delta(\mathfrak{z}) = \frac{f_k}{\mathfrak{z}^k} + \ldots + \frac{f_1}{\mathfrak{z}} + f_0 + \bar{f}_1\mathfrak{z} + \ldots + \bar{f}_k\mathfrak{z}^k, \quad f_k \neq 0, f_0 \text{ réel},$$

sera appelée *fonction rationnelle spéciale de degré* $2k$.

20. Nous dirons que la fonction

$$a(z) = a_1 z + \ldots, \quad a_1 > 0, \; z \in K(0, 1),$$

est une fonction *algébrique spéciale* si elle satisfait dans le cercle unité à l'équation

$$\Omega\big(a(z)\big) = X(z),$$

où $\Omega(w)$ et $X(z)$ sont des fonctions rationnelles spéciales. En même temps, nous appellerons les fonctions $\Omega(w)$ et $X(z)$ resp. *déterminante* et *accommodée*. Nous appellerons parfois la fonction $a(z)$ *fonction intérieure*.

21. Soit H un arc régulier (comp. [18], p. 91-92) de Jordan, situé dans le cercle $K(0, 1)$, à l'exception de son origine qui est située sur la circonférence $K^*(0, 1)$, et qui ne passe pas par zéro. Soit ensuite $\Omega(w)$ une fonction rationnelle spéciale. Nous appellerons H *arc spécial* correspondant à la fonction $\Omega(w)$, si cette dernière prend sur lui uniquement des valeurs réelles.

Dans le présent travail nous nous bornerons aux arcs spéciaux orthogonaux à la circonférence unité sans notifier chaque fois explicitement ce fait.

22. Soit $\{f_\tau(z)\}$ une famille de fonctions régulières (comp. [18], p. 145-146) dans un domaine G, dépendant du paramètre complexe τ, parcourant un ensemble T, et soit $f^*(z)$ une fonction régulière dans ce même domaine G. Supposons ensuite que $f_\tau(z)$ et $f^*(z)$ aient les mêmes points singuliers dans l'ensemble G. Nous dirons que $f_\tau(z)$ *tend vers* $f^*(z)$ pour τ tendant vers un τ^* presque uniformément dans G, si une telle convergence a lieu dans G_0, où G_0 désigne le domaine obtenu de G en éliminant tous ces points singuliers.

On voit facilement que, lorsque $\{\delta_\tau(\mathfrak{z})\}$ est une famille de fonctions rationnelles simples d'un même degré $2k$, dépendant du paramètre complexe τ, alors, pour que $\delta_\tau(\mathfrak{z})$ tende vers une fonction simple $\delta^*(\mathfrak{z})$ du même degré $2k$ pour τ tendant vers un τ^*, il faut et il suffit que les coeffitients des fonctions $\delta_\tau(\mathfrak{z})$ tendent vers les coeffitients respectifs de la fonction $\delta^*(\mathfrak{z})$.

23. Nous appellerons *proches* deux fonctions rationnelles simples si

elles sont de même degré et si leurs coefficients respectifs sont proches au sens habituel.

24. Nous dirons qu'une fonction complexe d'une ou de plusieurs variables complexes est *holomorphe* dans un ensemble, si elle est holomorphe dans un ensemble ouvert qui le contient.

Nous appellerons *proches* deux fonctions holomorphes dans un ensemble, si la valeur absolue de leur différence est uniformément petite dans cet ensemble.

25. Nous dirons que l'image $f(K(0,1))$ du cercle unité par la fonction $f(z)$ *remplit presque ce cercle*, si l'ensemble $f(K(0,1))$ est contenu dans $K(0,1)$ et si son aire est égale à l'aire du cercle $K(0,1)$.

26. Soit une fonction $f_0(z)$ (fixée) régulière dans un certain domaine et ayant en un point de ce domaine une racine de multiplicité finie k; soit ensuite $f_1(z)$ une fonction (variable) dans ce même domaine et ayant des racines aux points différents $z_1, z_2, \ldots, z_l$. Nous dirons que le système des racines $z_1, z_2, \ldots, z_l$ *correspond à la racine* z_0, si la somme de leurs multiplicités est k et s'il existe un entourage $|z-z_0| < \varepsilon$ du point z_0, contenu avec sa frontière $|z-z_0| = \varepsilon$ dans le domaine cité, contenant toutes les racines du système cité, ne contenant pas d'autres racines de la fonction $f_0(z)$ excepté la racine z_0 et tel que $|f_1(z)-f_0(z)| < |f_0(z)|$ sur la frontière $|z-z_0| = \varepsilon$.

Du théorème de Rouché résulte que cette définition a un sens unique, c.-à-d. qu'il n'existe pas deux systèmes différents de racines de la fonction $f_1(z)$ correspondant à une même racine z_0 de la fonction $f_0(z)$.

En effet, s'il existait deux systèmes différents $z_1', z_2', \ldots, z_{l'}'$, et $z_1'', z_2'', \ldots, z_{l''}''$ de racines correspondant à la racine z_0, alors, en prenant le plus grand des deux entourages, mentionnés plus haut, contenant resp. les racines en question, la somme des multiplicités des racines de la fonction $f_1(z)$, contenues dans cet entourage, serait plus grande que k; en outre sur la frontière de cet entourage aurait évidemment lieu l'inégalité $|f_1(z)-f_0(z)| < |f_0(z)|$, ce qui serait en contradiction évidente avec le théorème de Rouché.

Il résulte immédiatement de ce théorème et du fait que $f_0(z) \neq 0$ dans un voisinage du point z_0 que, si en particulier les fonctions $f_0(z)$ et $f_1(z)$ sont rationnelles simples, alors, lorsque la fonction $f_1(z)$ est suffisamment proche de la fonction $f_0(z)$, il existe un système de racines de la fonction $f_1(z)$, situées dans un entourage arbitrairement petit du point z_0, qui correspond à la racine z_0 de la fonction $f_0(z)$.

Si $f_0(z), f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont des fonctions rationnelles simples, z_0, z_1 et z_2 sont resp. les racines de ces fonctions, si $f_1(z)$ est suffisamment proche de la fonction $f_0(z)$ et z_1 correspond à z_0, si ensuite $f_2(z)$ est suffisamment proche de la fonction $f_1(z)$ et z_2 correspond à z_1, alors z_2 correspond à z_0. Il en est de même pour un plus grand nombre de fonctions.

RÉSULTATS AUXILIAIRES

27. Chaque fonction $b(z)$ holomorphe dans le cercle $|z| < r$ et y satisfaisant à l'équation $U(b(z)) = V(z)$, où $U(w)$ et $V(z)$ sont des fonctions rationnelles simples de même degré $2k$, se prolonge d'une façon continue au cercle fermé $|z| \leqslant r$, [3].

Il en résulte immédiatement que toute fonction $a(z)$ algébrique spéciale se prolonge d'une façon continue au cercle fermé $\overline{K(0, 1)}$, et ensuite que la fonction $\tilde{a}(z)$ se prolonge également d'une façon continue au domaine fermé $\overline{\tilde{K}(0, 1)}$.

28. Soit une suite quelconque de fonctions $\{b_\nu(z)\}$ satisfaisant aux cinq conditions suivantes:

1° Chaque fonction $b_\nu(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < r_\nu$, où r_ν est un nombre positif.

2° Chaque fonction $b_\nu(z)$ vérifie l'identité $U_\nu(b_\nu(z)) = V_\nu(z)$, où $U_\nu(w)$ et $V_\nu(z)$ sont des fonctions rationnelles simples de même degré $2k$.

3° La suite des nombres $\{r_\nu\}$ converge vers une limite finie r_0 non nulle.

4° La suite $\{b_\nu(z)\}$ converge presque uniformément dans le cercle $|z| < r_0$ vers une fonction holomorphe $b_0(z)$ (comp. [2], p. 3-4).

5° Les suites $\{U_\nu(w)\}$ et $\{V_\nu(z)\}$ convergent presque uniformément vers des fonctions $U_0(w)$ et $V_0(z)$ rationnelles simples de même degré $2k$.

Alors, pour toute suite de points $\{z_\nu\}$ convergente vers un point z_0, tels que $|z_\nu| \leqslant r_\nu$ pour tout ν et $|z_0| = r_0$, la suite $\{b_\nu(z_\nu)\}$ converge vers $b_0(z_0)$; on admet évidemment, suivant 27, que chacune des fonctions $b_\nu(z)$ et $b_0(z)$ est prolongée resp. au cercle $|z| \leqslant r_\nu$ et $|z| \leqslant r_0$, [3].

29. Soit $b(z)$ la fonction intervenant dans 27 et soit $w_0 = b(z_0)$, où $|z_0| = r$. Si w_0 et z_0 sont des racines des dérivées resp. $U'(w)$ et $V'(z)$ de même degré, la fonction $b(z)$ se prolonge comme fonction holomorphe par le point z_0, [5].

30. L'image de cercle unité par une fonction algébrique spéciale remplit presque ce cercle, [5].

31. Une fonction algébrique spéciale est univalente dans le cercle unité, [5].

32. On voit facilement que, si $\delta(\mathfrak{z})$ est une fonction rationnelle spéciale, alors la fonction $\delta'(\mathfrak{z})\mathfrak{z}i$ est également rationnelle spéciale de même degré que la fonction $\delta(\mathfrak{z})$, ayant les mêmes racines que la dérivée $\delta'(\mathfrak{z})$.

33. Pour toute fonction rationnelle spéciale $\delta(\mathfrak{z})$ il existe une fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\mathfrak{z})$ de même degré qui lui est arbitrairement proche, dont la dérivée a des racines uniquement simples, [5].

34. Si $\Omega(w)$ est une fonction rationnelle spéciale et H un arc spécial qui lui correspond et si les cinq conditions suivantes sont remplies:

1° La dérivée $\Omega'(w)$ a toutes ses racines simples, situées en dehors de H, à l'exception de son origine, où elle a une racine.

2° Les valeurs de $\Omega(w)$ pour toutes les racines de la dérivée $\Omega'(w)$ sont distinctes et différentes de la valeur à l'extrémité de H.

3° $a(z)$ transforme d'une façon conforme $K(0,1)$ en $K(0,1)\setminus H$, ainsi que $a(0)=0$, $a'(0)>0$ et elle se prolonge à $\overline{K(0,1)}$.

4° $X(z)$ est une fonction rationnelle spéciale telle que $\Omega\big(a(z)\big)=X(z)$.

5° z^* est une racine de la dérivée $X'(z)$ différente des images réciproques de toutes les racines de la dérivée $\Omega'(w)$ à l'exception de l'origine de H.

Alors

(a) la dérivée $X'(z)$ possède uniquement des racines simples;

(b) $a(z^*)=w^*$, où w^* est l'extrémité de H; en outre il n'y a pas d'autres points qui se transforment en w^*, [5].

35. On voit facilement que si la fonction rationnelle spéciale $\delta(\mathfrak{z})$ possède sur la circonférence $K^*(0,1)$ une racine simple $e^{i\theta_0}$, alors toute fonction rationnelle spéciale $\delta_1(\mathfrak{z})$ suffisamment proche de la fonction $\delta(\mathfrak{z})$ a sur la circonférence $K^*(0,1)$ une racine simple analogue $e^{i\theta_1}$, arbitrairement proche de $e^{i\theta_0}$, qui correspond à $e^{i\theta_0}$ au sens de 26.

36. Si la fonction rationnelle spéciale $\Lambda(w)$ admet une inverse sur l'arc spécial R qui lui correspond et si sa dérivée $\Lambda'(w)$ n'a pas de racines sur R, à l'exception de son origine d_0 où elle a une racine simple, alors pour toute fonction rationnelle spéciale $\Omega(w)$, suffisamment proche de la fonction $\Lambda(w)$, il existe un arc spécial H correspondant, arbitrairement proche de R au sens de Hausdorff, sur lequel la fonction $\Omega(w)$ admet une inverse et sa dérivée $\Omega'(w)$ n'admet pas de racines sur H, à l'exception de son origine v_0 où elle a une racine simple; de plus, $\Omega(v)-\Omega(v_0)=\Lambda(d)-$ $-\Lambda(d_0)$ où d et v désignent les extrémités des arcs R et H respectivement.

En effet, en supposant, ce qui ne diminue pas la généralité des considérations, que $\Lambda(w)$ transforme R en segment $\overrightarrow{[0,-1]}$, en sorte que d_0 et d se transforment resp. en points 0 et -1, considérons la fonction $\Lambda(w)-\Lambda(d_0)$ et remarquons qu'elle admet une inverse sur l'arc R et, par conséquent, ne s'annule pas sur R à l'exception de d_0, où elle a une racine double. D'où il résulte facilement qu'il existe un domaine $P\supset R$ suffisamment petit, dans lequel il existe une branche du radical $\sqrt{\Lambda(w)-\Lambda(d_0)}$ uniforme et univalente, faisant correspondre R au segment $\overrightarrow{[0,i]}$; en outre, à cause de l'univalence, la dérivée de cette branche est différente de zéro dans P et, par suite, la dérivée de la fonction $\Lambda(w)$ a dans P exactement une racine d_0. Soit maintenant Q un domaine arbitraire tel

que $R \subset Q \subset \bar{Q} \subset P$. Si $\Omega(w)$ est une fonction rationnelle spéciale, suffisamment proche de la fonction $\Lambda(w)$, alors, en vertu de 35 et de ce qui a été constaté plus haut, dans le produit $K^*(0, 1) \cap Q$ il y a exactement une racine v_0 de la dérivée $\Omega'(w)$, arbitrairement proche de d_0 et, par suite, la différence $\Omega(w) - \Omega(v_0)$ est arbitrairement proche de la différence $\Lambda(w) - \Lambda(d_0)$. Ainsi, lorsque l'approximation est suffisamment bonne, ces différences ont dans Q les mêmes nombres de racines. Comme la fonction $\Lambda(w) - \Lambda(d_0)$ admet dans Q exactement une racine double d_0 et la fonction $\Omega(w) - \Omega(v_0)$ y admet aussi une racine double v_0, elle est évidemment différente de zéro à l'exception de v_0. D'où il résulte aisément qu'il existe dans Q une branche uniforme du radical $\sqrt{\Omega(w) - \Omega(v_0)}$, arbitrairement proche de la branche $\sqrt{\Lambda(w) - \Lambda(d_0)}$. De plus, prenant ensuite un domaine un peu petit S, $R \subset S \subset \bar{S} \subset Q$, nous voyons facilement que lorsque l'approximation est suffisamment bonne, la fonction $\sqrt{\Omega(w) - \Omega(v_0)}$ est univalente dans S (comp. [3], p. 9-10) et l'image du domaine S par cette fonction couvre le segment $\overrightarrow{[0, i]}$ de l'axe imaginaire. En outre, à cause de l'univalence, la dérivée de cette fonction est différente de zéro dans S et, par suite, la dérivée de la fonction $\Omega(w)$ admet dans S exactement une racine v_0. Désignons par H l'image réciproque du segment $\overrightarrow{[0, i]}$ par cette fonction; nous constatons qu'elle est un arc régulier de Jordan, arbitrairement proche au sens du paramètre, donc à plus forte raison au sens de Hausdorff, de l'arc R; de plus, le vecteur tangent à H à son origine v_0 est, comme il est facile de le prouver, arbitrairement proche du vecteur tangent à l'arc R à son origine d_0, ce qui donne facilement que l'arc H, à l'exception de l'origine v_0, est situé, de même que l'arc R, entièrement dans le cercle $K(0, 1)$. Il est aussi facile de calculer que H est orthogonal à la circonférence unité. Etant donné que la branche $\sqrt{\Omega(w) - \Omega(v_0)}$ admet une inverse sur l'arc H et la fonction $\varphi(x) = x^2$ une inverse sur son image $\overrightarrow{[0, i]}$, la fonction composée $\left(\sqrt{\Omega(w) - \Omega(v_0)}\right)^2 = \Omega(w) - \Omega(v_0)$ et, par conséquent, la fonction $\Omega(w)$ admet une inverse sur l'arc H. Enfin, les extrémités d et v étant les images réciproques du point i par les branches mentionnées, on en obtient immédiatement que $\Lambda(d) - \Lambda(d_0) = i^2 = -1$ et $\Omega(v) - \Omega(v_0) = i^2 = -1$.

Récapitulant les faits mentionnés plus haut, nous voyons que H est l'arc spécial demandé dont il a été question au début, correspondant à la fonction $\Omega(w)$.

I. FONCTIONS RATIONNELLES SIMPLES

1. INTERPOLATION LOCALE

LEMME 1 (sur l'interpolation). *Soit* $\delta(\mathfrak{z})$ *une fonction rationnelle simple* (18, $*$) *de la forme*

$$\delta(\mathfrak{z}) = \frac{f_k}{\mathfrak{z}^k} + \ldots + f_0 + \ldots + \hat{f}_k \mathfrak{z}^k, \quad f_k \neq 0, \hat{f}_k \neq 0. \tag{1}$$

Supposons que la dérivée $\delta'(\mathfrak{z})$ *de cette fonction a toutes ses racines simples et soient*

$$x_l, \frac{1}{\hat{x}_l}, \quad l = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

$$y_r, \quad r = 0, \ldots, g, \tag{3}$$

toutes les racines de cette dérivée, où q *et* g *sont des nombres quelconques non négatifs, tels que* $2q+g+1 = 2k$; *cette façon non uniforme dont nous avons désigné les racines sera commode pour l'énoncé de la seconde partie du lemme.*

Soient ensuite

$$s_l = \delta(x_l), \quad \hat{s}_l = \delta\left(\frac{1}{\hat{x}_l}\right), \quad l = 1, \ldots, q, \tag{4}$$

$$t_r = \delta(y_r), \quad r = 0, \ldots, g, \tag{5}$$

les valeurs de la fonction (1) *pour les valeurs des racines* (2) *et* (3) *de sa dérivée.*

Alors pour tout système de nombres

$$\dot{s}_l, \quad \hat{\dot{s}}_l, \quad l = 1, \ldots, q, \tag{6}$$

$$\dot{t}_r, \quad r = 0, \ldots, g, \tag{7}$$

suffisamment proches des nombres respectifs (4) *et* (5), *il existe, déterminés d'une façon unique: une fonction rationnelle simple*

$$\dot{\delta}(\mathfrak{z}) = \frac{\dot{f}_k}{\mathfrak{z}^k} + \ldots + \dot{f}_0 + \ldots + \hat{\dot{f}}_k \mathfrak{z}^k \tag{8}$$

et un système de nombres

$$\dot{x}_l, \quad \frac{1}{\hat{\dot{x}}_l}, \quad l = 1, \ldots, q, \tag{9}$$

$$\dot{y}_r, \quad r = 0, \ldots, g, \tag{10}$$

arbitrairement proches resp. de la fonction (1) *et des nombres* (2) *et* (3), *tels que*

$$\dot{\delta}'(\dot{x}_l) = 0, \quad \dot{\delta}'\left(\frac{1}{\hat{\dot{x}}_l}\right) = 0, \tag{11}$$

$$\dot{\delta}'(\dot{y}_r) = 0, \tag{12}$$

$$\dot{\delta}(\dot{x}_l) = \dot{s}_l, \quad \dot{\delta}\left(\frac{1}{\hat{\dot{x}}_l}\right) = \hat{\dot{s}}_l, \tag{13}$$

$$\dot{\delta}(\dot{y}_r) = \dot{t}_r, \tag{14}$$

$$\frac{\dot{f}_k}{\hat{\dot{f}}_k} = \frac{f_k}{\hat{f}_k}. \tag{15}$$

En même temps l'expression (8) *et les nombres* (9) *et* (10) *sont des fonctions holomorphes des variables* (6) *et* (7).

En outre, dans le cas particulier où la fonction initiale (1) *est rationnelle spéciale et les nombres* (2) *et* (3) *sont racines de sa dérivé, situées resp. à l'intérieur et symétriquement en dehors, ainsi que sur la circonférence unité et, lorsque les valeurs* (6) *sont conjuguées et* (7) *sont réelles, la fonction* (8) *est rationnelle spéciale.*

Démonstration. La première partie de la conclusion du lemme équivaut à l'existence d'une solution unique et holomorphe du système des équations (11) à (15) par rapport aux coeffitients inconnues

$$\dot{f}_0, \dot{f}_s, \hat{\dot{f}}_s, \quad s = 1, \ldots, k, \tag{16}$$

et aux racines inconnues (9) et (10), situées dans un entourage des valeurs initiales respectives

$$f_0, f_s, \hat{f}_s, \quad s = 1, \ldots, k, \tag{17}$$

et (2) et (3), cette solution dépendant des paramètres variables (6) et (7). Ensuite, il suffit pour cela, en vertu de résultats connus, que le déterminant fonctionnel des expressions (11)-(15) par rapport aux inconnues (16), (9) et (10) soit différent de zéro pour les valeurs initiales (17), (2) et (3). Admettons que dans les lignes successives de ce déterminant figurent les dérivées partielles des premiers membres successifs (11)-(15) par

rapport aux inconnues (16), (9) et (10). Pour la démonstration supposons le contraire, à savoir que le déterminant ne soit pas différent de zéro. Il existerait dans ce cas un système de nombres ne s'annulant pas simultanement

$$\Delta f_0,\ \Delta f_s,\ \Delta \hat{f}_s, \qquad s = 1, \ldots, k, \tag{18}$$

$$\Delta x_l,\ \Delta \hat{x}_l, \qquad l = 1, \ldots, q, \tag{19}$$

$$\Delta y_r, \qquad r = 0, \ldots, g, \tag{20}$$

tel que la somme des produits des éléments de chaque ligne du déterminant par ces nombres serait égale à zéro. Calculant à partir de (11)-(15) les éléments du déterminant et effectuant les calculs indiqués ci-dessus, nous obtenons

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{x}_l)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{x}_l)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta x_l \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{x}_l)}{\partial \dot{x}_l} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}'(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}'(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta \hat{x}_l \frac{\partial \dot{\delta}'(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \hat{\dot{x}}_l} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{y}_r)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{y}_r)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta y_r \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{y}_r)}{\partial \dot{y}_r} = 0,$$

$$\Delta f_0 \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{x}_l)}{\partial \dot{f}_0} + \sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{x}_l)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{x}_l)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta x_l \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{x}_l)}{\partial \dot{x}_l} = 0,$$

$$\Delta f_0 \frac{\partial \dot{\delta}(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \dot{f}_0} + \sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta \hat{x}_l \frac{\partial \dot{\delta}(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \hat{\dot{x}}_l} = 0,$$

$$\Delta f_0 \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{y}_r)}{\partial \dot{f}_0} + \sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{y}_r)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{y}_r)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta y_r \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{y}_r)}{\partial \dot{y}_r} = 0,$$

$$\Delta f_k \frac{\partial (\dot{f}_k/\hat{\dot{f}}_k)}{\partial \dot{f}_k} + \Delta \hat{\dot{f}}_k \frac{\partial (\dot{f}_k/\hat{\dot{f}}_k)}{\partial \hat{\dot{f}}_k} = 0,$$

où toutes les dérivées mentionnées sont prises pour les valeurs (17), (2) et (3). Ayant calculé ces dérivées, nous obtenons

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{-s\Delta f_s}{x_l^{s+1}} + s\Delta \hat{f}_s x_l^{s-1}\right) + \Delta x_l\, \delta''(x_l) = 0, \tag{21}$$

BU W

$$(21') \qquad \sum_{s=1}^{k}\left(-s\Delta f_s\hat{x}_l^{s+1}+s\Delta\hat{f}_s\frac{1}{\hat{x}_l^{s-1}}\right)+\Delta\hat{x}_l\,\delta''\left(\frac{1}{\hat{x}_l}\right)\left(-\frac{1}{\hat{x}_l^2}\right)=0,$$

$$(22) \qquad \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{-s\Delta f_s}{y_r^{s+1}}+s\Delta\hat{f}_s y_r^{s-1}\right)+\Delta y_r\,\delta''(y_r)=0,$$

$$(23) \qquad \Delta f_0+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\Delta f_s}{x_l^s}+\Delta\hat{f}_s x_l^s\right)=0,$$

$$(24) \qquad \Delta f_0+\sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s\hat{x}_l^s+\Delta\hat{f}_s\frac{1}{\hat{x}_l^s}\right)=0,$$

$$(25) \qquad \Delta f_0+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\Delta f_s}{y_r^s}+\Delta\hat{f}_s y_r^s\right)=0,$$

$$(26) \qquad \frac{\Delta f_k}{f_k}=\frac{\Delta\hat{f}_k}{\hat{f}_k}.$$

Considérons maintenant la fonction

$$(27) \qquad \Delta\delta(\mathfrak{z})=\frac{\Delta f_k}{\mathfrak{z}^k}+\ldots+\Delta f_0+\ldots+\Delta\hat{f}_k\mathfrak{z}^k;$$

c'est une fonction rationnelle, dont le nombre des racines ne dépasse pas le nombre $2k$. Nous déduisons de (23), (24) et (25) que les points (2) et (3) sont racines de cette fonction de multiplicité au moins un. Si le nombre des racines de la fonction (27) était égal à $2k$, les points (2) et (3) devraient être racines de cette fonction de multiplicité exactement un; elle serait alors une fonction rationnelle de mêmes pôles et de mêmes racines que a fonction $\mathfrak{z}\delta'(\mathfrak{z})$, donc

$$\Delta\delta(\mathfrak{z})=C\mathfrak{z}\,\delta'(\mathfrak{z}),$$

où C est constant, c'est-à-dire

$$\Delta f_0+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\Delta f_s}{\mathfrak{z}^s}+\Delta\hat{f}_s\mathfrak{z}^s\right)=C\cdot\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{-sf_s}{\mathfrak{z}^s}+s\hat{f}_s\mathfrak{z}^s\right).$$

Comparant les coefficients des mêmes puissances de $\mathfrak{z}$, nous obtenons entre autres

$$\Delta f_k=-Ckf_k \quad \text{et} \quad \Delta\hat{f}_k=Ckf_k;$$

vu (26), cela donne $C=0$, donc $\Delta\delta(\mathfrak{z})\equiv 0$, d'où

$$(28) \qquad \Delta f_0=0, \quad \Delta f_s=0, \quad \Delta\hat{f}_s=0.$$

Par conséquent, des relations (21), (21′) et (22) et de la simplicité des racines de la dérivé $\delta'(\mathfrak{z})$ nous déduisons que

$$\Delta x_l = 0, \quad \Delta \hat{x}_l = 0, \tag{29}$$

$$\Delta y_r = 0; \tag{30}$$

conjointement avec les égalités (28) cela est contraire à l'hypothèse que les nombres (18), (19) et (20) ne s'annulent pas simultanément. La première partie de la conclusion du lemme est ainsi prouvée.

La seconde partie résulte du fait que dans le cas où les nombres (6) sont conjugués et les nombres (7) réels, la réalisation du système (11)-(15) par les nombres (16), (9) et (10) équivaut, ce qui est facile à voir, à la réalisation de ce système par les nombres

$$\bar{\dot{f}}_0, \quad \bar{\hat{\dot{f}}}_s, \quad \bar{\dot{f}}_s, \tag{31}$$

$$\bar{\hat{\dot{x}}}_l, \quad \frac{1}{\bar{\dot{x}}_l}, \tag{32}$$

$$\frac{1}{\bar{\dot{y}}_r}; \tag{33}$$

de là et de l'unicité des solutions il résulte que la fonction (8) et les systèmes (16), (9), (10) et (31), (32), (33) doivent être identiques, donc

$$\dot{f}_0 = \bar{\dot{f}}_0, \quad \hat{\dot{f}}_s = \bar{\dot{f}}_s, \tag{34}$$

$$\hat{\dot{x}}_l = \bar{\dot{x}}_l, \tag{35}$$

$$\dot{y}_r = \frac{1}{\bar{\dot{y}}_r}. \tag{36}$$

En particulier, il résulte dé (34) que la fonction (8) est une fonction rationnelle spéciale.

Dans la suite nous aurons besoin d'une spécification du lemme 1:

Lemme 1′. *Soit*

$$s_l(t), \quad \hat{s}_l(t), \quad s_l(t_0) = s_l, \quad \hat{s}_l(t_0) = \hat{s}_l, \quad l = 1, \ldots, q^*; q^* < q, \tag{37}$$

un système de $2q^*$ de fonctions holomorphes dans un cercle $|t-t_0| < T_0$. Il existe alors pour la fonction (1) *et pour les nombres* (2) *et* (3) *un T^*, $0 < T^* \leqslant T_0$, tel que dans le cercle $|t-t_0| < T^*$ existent, déterminés d'une façon unique: une famille de fonctions rationnelles par rapport à $\mathfrak{z}$, qui dépend du paramètre complexe t et qui est holomorphe par rapport à t, de la forme*

$$\delta(\mathfrak{z}, t) = \frac{f_k(t)}{\mathfrak{z}^k} + \ldots + f_0(t) + \ldots + \hat{f}_k(t)\mathfrak{z}^k, \quad f_k(t) \neq 0, \hat{f}(t) \neq 0, \tag{38}$$

et un système de fonctions holomorphes

$$x_l(t), \qquad \frac{1}{\hat{x}_l(t)}, \qquad l = 1, \ldots, q,$$

$$y_r(t), \qquad r = 0, \ldots, g,$$

tels que

$$\delta'_{\mathfrak{z}}\big(x_l(t), t\big) = 0, \qquad \delta'_{\mathfrak{z}}\left(\frac{1}{\hat{x}_l(t)}, t\right) = 0, \tag{39}$$

$$\delta'_{\mathfrak{z}}\big(y_r(t), t\big) = 0, \tag{40}$$

$$\delta\big(x_l(t), t\big) = s_l(t), \qquad \delta\left(\frac{1}{\hat{x}_l(t)}, t\right) = \hat{s}_l(t), \qquad l = 1, \ldots, q^*, \tag{41}$$

$$\delta\big(x_l(t), t\big) = s_l, \qquad \delta\left(\frac{1}{\hat{x}_l(t)}, t\right) = \hat{s}_l, \qquad l = q^*+1, \ldots, q, \tag{42}$$

$$\delta\big(y_r(t), t\big) = t_r, \tag{43}$$

$$\frac{f_k(t)}{\hat{f}_k(t)} = \frac{f_k}{\hat{f}_k}, \tag{44}$$

$$\delta(\mathfrak{z}, t_0) = \delta(\mathfrak{z}), \tag{45}$$

$$x_l(t_0) = x_l, \qquad \hat{x}_l(t_0) = \hat{x}_l, \tag{46}$$

$$y_r(t_0) = y_r. \tag{47}$$

De plus la relation

$$\delta'_t(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\,\delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t) \sum_{l=1}^{q^*} \left[M_l(t)\, \frac{\mathfrak{z} + x_l(t)}{\mathfrak{z} - x_l(t)} + \hat{M}_l(t)\, \frac{1 + \hat{x}_l(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{x}_l(t)\mathfrak{z}} \right], \tag{48}$$

est remplie, où

$$M_l(t) = \frac{s'_l(t)}{2x_l^2(t)\, i\delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\big(x_l(t), t\big)}, \qquad \hat{M}_l(t) = \frac{\hat{s}'_l(t)}{-2\dfrac{1}{\hat{x}_l^2(t)}\, i\delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\left(\dfrac{1}{\hat{x}_l(t)}, t\right)}. \tag{49}$$

La famille (38) *sera appelée famille de variations pour la fonction* (1).

Démonstration. La première partie du lemme est une conséquence directe du lemme précédent si l'on y remplace les variables indépendantes s_l, $\hat{s}_l$, $l = 1, \ldots, q^*$, respectivement par les fonctions (37), et les variables restantes de (6) et (7) respectivement par les constantes correspondantes de (4) et (5).

Pour démontrer la formule (48), nous considérons les fonctions

$$\delta'_t(\mathfrak{z}, t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{f'_j(t)}{\mathfrak{z}^j} + \hat{f}'_j(t)\mathfrak{z}^j \right) + f'_0(t) \tag{50}$$

et

$$(51)\qquad i\mathfrak{z}\,\delta_{\mathfrak{z}}'(\mathfrak{z},t) = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{-jif_j(t)}{\mathfrak{z}^j} + ji\hat{f}_j(t)\mathfrak{z}^j\right).$$

La première s'annule aux points

$$x_l(t), \quad \frac{1}{\hat{x}_l(t)}, \quad l = q^*+1, \ldots, q,$$

$$y_r(t), \quad r = 0, \ldots, g;$$

elle a donc avec la seconde au moins $q-q^*+g$ racines communes. Nous le constatons en dérivant les relations (42) et (43) et en tenant compte de (39) et (40). Par conséquent nous pouvons mettre le quotient de (50) par (51), en abrégeant les facteurs communs, sous la forme

$$(52)\qquad \frac{\delta_t'(\mathfrak{z},t)}{i\mathfrak{z}\,\delta_{\mathfrak{z}}'(\mathfrak{z},t)} = \sum_{l=1}^{q^*}\left[M_l(t)\frac{\mathfrak{z}+x_l(t)}{\mathfrak{z}-x_l(t)} + \hat{M}_l(t)\frac{1+\hat{x}_l(t)\mathfrak{z}}{1-\hat{x}_l(t)\mathfrak{z}}\right] + M(t),$$

ce qui équivaut, comme on le voit immédiatement, à une décomposition en fractions simples, où $M_l(t)$, $\hat{M}_l(t)$ et $M(t)$ représentent des fonctions holomorphes du paramètre t.

En comparant maintenent les coefficients de $\mathfrak{z}^{-k}$ et de $\mathfrak{z}^k$ dans les deux membres de la relation (52), nous obtenons les deux relations suivantes

$$\frac{1}{ki}\frac{f_k'(t)}{f_k(t)} = \sum_{l=1}^{q^*}\big(M_l(t)-\hat{M}_l(t)\big) - M(t),$$

$$\frac{1}{ki}\frac{\hat{f}_k'(t)}{\hat{f}_k(t)} = \sum_{l=1}^{q^*}\big(M_l(t)-\hat{M}_l(t)\big) - M(t),$$

d'où

$$2ki\,M(t) = -\frac{d}{dt}\log\frac{f_k(t)}{\hat{f}_k(t)}.$$

Mais, étant donné (44),

$$\frac{d}{dt}\log\frac{f_k(t)}{\hat{f}_k(t)} = 0,$$

c'est-à-dire $M(t) = 0$; l'expression (52) prend donc la forme (48). Passant ensuite dans (48) à la limite avec $\mathfrak{z} \to x_l(t)$ et avec $\mathfrak{z} \to 1/\hat{x}_l(t)$ et, vu (41) et (39), nous constatons enfin qu'en même temps ont lieu les relations (49), ce qui termine la démonstration.

Remarque 1. Dans le cas particulier, considéré dans le lemme 1, où les fonctions (37) sont conjuguées, les nombres (4) pour $l = q^*+1, \ldots, q$

sont conjugués et les nombres (5) réels, nous en déduisons, de même que dans la démonstration du lemme précédent, que

$$f_0(t) = \overline{f_0(t)}, \quad \hat{f}_j(t) = \overline{f_j(t)}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

$$\hat{x}_l(t) = \overline{x_l(t)}, \quad l = 1, \ldots, q,$$

$$y_r(t) = \frac{1}{\overline{y_r(t)}}, \quad r = 0, \ldots, g,$$

d'où il résulte en particulier que la fonction (38) est rationnelle spéciale et, par suite, il résulte des formules (49) que

$$\hat{M}_l(t) = \overline{M_l(\bar{t})}, \quad l = 1, \ldots, q^*.$$

Remarque 2. Il résulte immédiatement de l'unicité des solutions du système (11)-(15) par rapport aux inconnues correspondantes que pour deux cercles quelconques $|t-t_0| < T_1^*$ et $|t-t_0| < T_2^*$, dans lesquels existent les familles et les systèmes de fonctions du type mentionné dans le lemme 1', ces familles et ces systèmes sont identiques dans la partie commune des cercles mentionnés.

Par conséquent, il existe parmi les nombres T^*, intervenant dans le lemme, un nombre le plus grand qui est leur borne supériéure.

Remarque 3. On peut observer que, si on se donne la fonction rationnelle simple (1), mentionnée plus haut, dont la dérivée a toutes ses racines simples, et si e_0 est une racine quelconque de cette dérivée arbitrairement choisie, il existe une fonction analogue rationnelle simple (8), arbitrairement proche de (1), dont la dérivée a toutes ses racines simples et il existe une racine de cette dérivée $\dot{e}_0$, arbitrairement proche de e_0 qui lui correspond au sens de (26,$*$), telles que les valeurs de la fonction (8) pour toutes les racines de la dérivée sont distanctes et différentes du nombre $-1+\dot{\delta}(\dot{e}_0)$.

En effet, il suffit d'appliquer le lemme 1 (sur l'interpolation), en posant $y_0 = e_0$ et en choisissant ensuite les valeurs (6) et (7) de telle façon qu'elles soient distinctes et différentes de $-1+\dot{t}_0$ et en prenant $\dot{e}_0 = \dot{y}_0$.

Il en est de même dans le cas où les fonctions (1) et (8) sont rationnelles spéciales.

2. PROLONGEMENT DE LA FAMILLE DES FONCTIONS RATIONNELLES SIMPLES AU CERCLE FERMÉ DU PARAMÈTRE

Supposons réalisées les hypothèses suivantes:

1. Soit dans le plan un système de $2n+2$ domaines de Jordan g, G_j, $\hat{G}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\hat{g}$, limités par les courbes régulières g^*, G_j^*, $\hat{G}_j^*$, $\hat{g}^*$, de fermetures disjointes, tel que $0 \in g$, $\infty \in \hat{g}$.

2. Soit un nombre positif d, suffisamment petit.

3. Soit dans le cercle $|t| < T^*$ une famille de fonctions rationnelles simples par rapport à $\mathfrak{z}$, de la forme

$$(1) \qquad \Delta(\mathfrak{z}, t) = \frac{F_K(t)}{\mathfrak{z}^K} + \ldots + F_0(t) + \ldots + \hat{F}_K(t)\mathfrak{z}_K,$$

$$F_K(t) \neq 0, \ \hat{F}_K(t) \neq 0,$$

holomorphes par rapport à t, et de fonctions holomorphes

$$(2) \qquad \mathfrak{z}_j(t), \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$(3) \qquad p_h(t), \quad h = 1, \ldots, m,$$

$$(4) \qquad 2n + m = 2K,$$

telles que

(i) $\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t)$ s'annule aux points (2) et (3);

(ii) les conditions suivantes sont realisées:

$$\Delta\big(\mathfrak{z}_j(t), t\big) = S_j(t), \qquad \Delta\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right) = \hat{S}_j(t),$$

$$\Delta\big(p_h(t), t\big) = \Delta_h,$$

$$\frac{F_K(t)}{\hat{F}_K(t)} = \frac{F_K(0)}{\hat{F}_K(0)},$$

où $S_j(t)$ et $\hat{S}_j(t)$ sont des fonctions holomorphes de la variable t au moins dans un cercle $|t| < T_0$, où $T_0 > T^*$; en outre dans le cercle $|t| < T^*$ les expressions

$$\left| \frac{S'_j(t)}{2\mathfrak{z}_j^2(t)\, i\, \Delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\big(\mathfrak{z}_j(t), t\big)} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\hat{S}'_j(t)}{-2\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^2(t)}\, i\, \Delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\left(\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right)} \right|$$

sont bornées supérieurement et $|F_K(t)|$ et $|\hat{F}_K(t)|$ sont bornées inférieurement par des constantes positives;

(iii) les racines $\mathfrak{z}_j(t)$ et $1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$ pour tout t sont situées respectivement dans les domaines G_j et $\hat{G}_j$ à une distance au moins d de leurs frontières;

(iv) les racines restantes $p_h(t)$ sont situées à l'extérieur de la somme de tous les domaines G_j et $\hat{G}_j$ à une distance au moins d de leurs frontières;

(v) les valeurs $\Delta_h = \Delta\big(p_h(0), 0\big)$ sont toutes différentes entre elles.

Lemme 1 (sur le prolongement). *La famille* (1) *et les fonctions* (2) *et* (3) *peuvent être prolongées, sans nuire à leur analycité, au cercle fermé* $|t| \leqslant T^*$, *en respectant les conditions* (i)-(v).

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'en vertu de (i), (ii) et, vu la démonstration du lemme 1′, 1, on a dans le cercle $|t| < T^*$ l'identité

$$(5)\qquad \Delta_i'(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\,\Delta_{\mathfrak{z}}'(\mathfrak{z}, t)\sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)\,\frac{\mathfrak{z}+\mathfrak{z}_j(t)}{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j(t)} + \hat{N}_j(t)\,\frac{1+\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}{1-\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}\right),$$

où

$$(6)\qquad N_j(t) = \frac{S_j'(t)}{2\mathfrak{z}_j^2(t)\,i\,\Delta_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}''(\mathfrak{z}_j(t), t)}, \qquad \hat{N}_j(t) = \frac{\hat{S}_j'(t)}{-2\,\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^2(t)}\,i\,\Delta_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}''\left(\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right)},$$

et les modules des $N_j(t)$ et $\hat{N}_j(t)$, vu (ii), sont bornés supérieurement et les modules des $\mathfrak{z}_j(t)$ et $1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$, vu (iii) et la définition des domaines $G_j, \hat{G}_j$, sont bornés supérieurement et inférieurement. Remarquons en outre que, vu 1, (iii)-(v), les racines (2) et (3) sont toutes distinctes, donc, en vertu de (4) et la définition de la fonction (1), elles sont toutes simples.

Soit maintenant t^* un point arbitraire suité sur la circonférence du cercle $|t| < T^*$, c.-à-d. $|t^*| = T^*$. Soit ensuite $\{t_m\}$ une suite arbitraire de points de ce même cercle tendant vers t^*.

Analysant dans la relation (5) les coefficients des puissances de $\mathfrak{z}$, nous observons qu'une puissance arbitraire positive $\mathfrak{z}^s$ figure au premier membre avec le coefficient $\hat{F}_s'(t)$ et une puissance arbitraire non positive $\mathfrak{z}^{-s}$ avec le coefficient $F_s'(t)$. Au second membre, vu la divisibilité de la fonction $\Delta_{\mathfrak{z}}'(\mathfrak{z}, t)$ par les dénominateurs $\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j(t)$ et $\mathfrak{z}-1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$, la puissance positive analogue $\mathfrak{z}^s$ a le coefficient $L_s\big(F_K(t), \ldots, F_0(t), \ldots, \hat{F}_K(t), N_1(t), \ldots, N_n(t), \hat{N}_1(t), \ldots, \hat{N}_n(t), \mathfrak{z}_1(t), \ldots, \mathfrak{z}_n(t), \hat{\mathfrak{z}}_1(t), \ldots, \hat{\mathfrak{z}}_n(t)\big)$, qui est une fonction linéaire par rapport à $F_K(t), \ldots, \hat{F}_K(t)$, dont les coefficients sont des polynômes par rapport à $N_1(t), \ldots, \hat{N}_n(t), \mathfrak{z}_1(t), \ldots, \mathfrak{z}_n(t), \hat{\mathfrak{z}}_1(t), \ldots, \hat{\mathfrak{z}}_n(t), 1/\mathfrak{z}_1(t), \ldots, 1/\mathfrak{z}_n(t), 1/\hat{\mathfrak{z}}_1(t), \ldots, 1/\hat{\mathfrak{z}}_n(t)$, du premier degré par rapport aux variables $N_1(t), \ldots, \hat{N}_n(t)$. Le coefficient de la puissance non positive $\mathfrak{z}^{-s}$ sera analogue. Par conséquent, la comparaison des coefficients des puissances successives de la variable $\mathfrak{z}$ dans les deux membres de la relation citée (5) mène à un système linéaire d'équations différentielles aux fonctions inconnues $F_K(t), \ldots, \hat{F}_K(t)$. Etant donné que dans ce système les coefficients de mêmes fonctions inconnues aux seconds membres sont bornés, puisque $|N_j(t)|$ et $|\hat{N}_j(t)|$ sont bornés supérieurement et $|\mathfrak{z}_j(t)|$ et $|1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)|$ supérieurement et inférieurement, alors, conformément à la propriété connue des systèmes linéraires, les fonctions $F_K(t), \ldots, \hat{F}_K(t)$ sont bornées supérieurement; en outre, ce qui résulte de l'hypothèse (ii), les fonctions $F_K(t)$ et $\hat{F}_K(t)$ sont aussi bornées inférieurement. Il résulte ensuite de la propriété mentionnée des coefficients que les modules de toutes les racines $p_h(t)$ $(h = 1, \ldots, m)$, $\mathfrak{z}_j(t)$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$

sont bornés; les modules de ces dernières racines sont bornés déjà par l'hypothèse.

Considérons maintenant les suites

$$\{F_K(t_m)\}, \ldots, \{\hat{F}_K(t_m)\}, \{\mathfrak{z}_j(t_m)\}, \left\{\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t_m)}\right\}, \{p_h(t_m)\}, m = 1, 2, \ldots$$

Comme elles sont bornées, en extrayant au besoin une suite partielle, nous pouvons admettre que la suite $\{t_m\}$ a été choisie de façon que toutes les suites mentionnées soient convergentes vers des limites $F_K^*, \ldots, \hat{F}_K^*$, $\mathfrak{z}_j^*$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$, p_h^*.

Posant

$$\Delta^*(\mathfrak{z}) = \frac{F_K^*}{\mathfrak{z}^K} + \ldots + F_0^* + \ldots + F_K^* \mathfrak{z}^K,$$

nous remarquons, vu (i) et (ii), que $\mathfrak{z}_j^*$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$, p_h^* sont les racines de la dérivée $\Delta^{*\prime}(\mathfrak{z})$ et que les valeurs de la fonction elle-même $\Delta^*(\mathfrak{z})$ en ces points sont respectivement égales à $S_j(t^*)$, $\hat{S}_j(t^*)$ et Δ_h. Il en résulte en particulier que les points p_h^*, $h = 1, \ldots, m$, sont tous distincts. De plus, comme ces points sont situés dans l'ensemble complémentaire de la somme des domaines disjoints G_j et $\hat{G}_j$, contenant les ensembles fermés $\overline{G_{jd}}$ et $\overline{\hat{G}_{jd}}$, dans lesquels sont situés les points $\mathfrak{z}_j^*$ et $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$, on voit que les points p_h^* doivent être différents des points $\mathfrak{z}_j^*$, et $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$. Comparant ces faits on tire de (4) que $\mathfrak{z}_j^*$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$ et p_h^* sont $2K$ racines de la dérivée $\Delta^{*\prime}(\mathfrak{z})$, qui sont distinctes et, par conséquent, elles sont toutes des racines simples.

Appliquant à présent à la fonction $\Delta^*(\mathfrak{z})$ et aux nombres $\mathfrak{z}_j^*$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$ et p_h^* le lemme 1′, 1, nous en déduisons qu'il existe un cercle $|t-t^*| < \tilde{T}$, tel qu'il existe dans ce cercle déterminés d'une façon unique une famille de fonctions rationnelles par rapport à $\mathfrak{z}$, dépendant du paramètre complexe t et holomorphes par rapport à t, de la forme

$$(1^*) \qquad \Delta^*(\mathfrak{z}, t) = \frac{F_K^*(t)}{\mathfrak{z}^K} + \ldots + \hat{F}_K^*(t)\mathfrak{z}^K, \qquad F_K^*(t) \neq 0, \hat{F}_K^*(t) \neq 0,$$

et un système de fonctions holomorphes

$$(2^*) \qquad \mathfrak{z}_j^*(t), \qquad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^*(t)}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

$$(3^*) \qquad p_h^*(t), \qquad h = 1, \ldots, m,$$

telles que

$$(\mathrm{i}^*) \quad \Delta_\delta^{*\prime}(\mathfrak{z}_j^*(t), t) = 0, \ \Delta_\delta^{*\prime}\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^*(t)}, t\right) = 0, \ \Delta_\delta^{*\prime}(p_h^*(t), t) = 0,$$

$$\text{(ii*)}\quad \Delta^*\big(\mathfrak{z}_j^*(t), t\big) = S_j(t),\ \Delta^*\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^*(t)}, t\right) = \hat{S}_j(t),\ \Delta^*\big(p_h^*(t), t\big) = \Delta_h,$$

$$\frac{F_K^*(t)}{\hat{F}_K^*(t)} = \frac{F_K^*}{\hat{F}_K^*},$$

et que

$$\Delta^*(\mathfrak{z}, t^*) = \Delta^*(\mathfrak{z}),$$

$$\mathfrak{z}_j^*(t^*) = \mathfrak{z}_j^*, \qquad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^*(t^*)} = \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^*},$$

$$p_h^*(t^*) = p_h^*.$$

On voit encore aisément que les conditions (iii) et (iv) restent valables pour les points limites $\mathfrak{z}_j^*$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$, et p_h^*, c.-à-d. que

(iii*) $\mathfrak{z}_j^*$ et $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$ sont situés respectivement dans les domaines G_j et $\hat{G}_j$ à une distance au moins d de leurs frontières;

(iv*) p_h^* sont situés à l'extérieur de la somme de tous les domaines G_j et $\hat{G}_j$ à une distance au moins d de leurs frontières.

Par conséquent il résulte facilement de l'unicité locale des solutions des équations du type considéré dans le lemme 1′, 1, en comparant les conditions (i), (ii) et (i*), (ii*) pour $t = t_m$, $m = 1, 2, \ldots$, que pour m suffisamment grand les fonctions (1), (2), (3) et (1*), (2*), (3*) coïncident pour $t = t_m$. Il en résulte directement, vu la remarque 2, 1, que ces fonctions coïncident aussi dans un certain entourage de t_m. Enfin, en vertu du fait que ces fonctions sont holomorphes, il en résulte qu'elles coïncident dans le produit des cercles $|t| < T^*$ et $|t - t^*| < \tilde{T}$. Mais, cela signifie que les fonctions (1), (2), (3) se prolongent comme fonctions holomorphes par rapport à t par un point arbitraire t^* de la circonférence $|t| = T^*$, c.-à-d. au cercle fermé $|t| \leqslant T^*$.

3. VARIATIONS DES FONCTIONS RATIONNELLES SIMPLES

Supposons realisées les conditions suivantes:

1. Soit dans le plan un système de $2n+2$ domaines de Jordan g, G_j, $\hat{G}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\hat{g}$, limités par les courbes régulières g^*, G_j^*, $\hat{G}_j^*$, $\hat{g}^*$, de fermetures disjointes, tels que $0 \in g$, $\infty \in \hat{g}$.

2. Soient cinq membres positifs arbitraires ν_1, ν^1, ν_2, N et δ, où δ est assez petit pour que les dominutions $G_{j\delta}$ et $\hat{G}_{j\delta}$ soient des domaines et que $\delta < \min(1, \sqrt[5]{4\nu^1/\nu_2})$; en outre $\nu_1 < \nu^1$.

3. Soit une fonction rationnelle simple, arbitraire de degré arbitraire, de la forme

$$(1)\qquad \Delta(\mathfrak{z}) = \frac{F_K}{\mathfrak{z}^K} + \ldots + \hat{F}_K \mathfrak{z}^K, \quad F_K \neq 0,\ \hat{F}_K \neq 0,$$

ayant les propriétés suivantes:

(j) $\Delta'(\mathfrak{z})$ admet uniquement des racines simples;

(jj) $\Delta'(\mathfrak{z})$ admet à l'intérieur de chaque domaine G_j resp. $\hat{G}_j$ exactement une racine $\mathfrak{z}_j$ resp. $1/\hat{\mathfrak{z}}_j$;

(jjj) les racines restantes p_h $(h = 1, \ldots, m)$, $m = 2K - 2n$, de la fonction $\Delta'(\mathfrak{z})$ sont situées à l'extérieur de la somme de tous les domaines G_j et $\hat{G}_j$;

(jv) les valeurs $\Delta(p_h)$ sont toutes distinctes;

(v) les distances des points 0, $\mathfrak{z}_j$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j$, ∞ respectivement aux frontières $g^*, G_j^*, \hat{G}_j^*, \hat{g}^*$ sont toutes plus grandes que δ (comp. [18], p. 19);

(vj) sur les frontières des diminutions $G_{j(1/2)\delta}$ et $\hat{G}_{j(1/2)\delta}$ on a $|\Delta'(\mathfrak{z})| > \nu_1$ et dans les fermetures $\bar{G}_j$ et $\bar{\hat{G}}_j$ on a $|\Delta'(\mathfrak{z})| < \nu^1$, $|\Delta''(\mathfrak{z})| > \nu_2$.

4. Soit un système arbitraire (N^0) de nombres complexes N_j et $\hat{N}_j$, $j = 1, \ldots, n$, dont les modules sont bornés supérieurement par N.

On a le lemme suivant:

Lemme 1 (sur les variations), *Il existe un $R > 0$ qui dépend uniquement du système des domaines de* 1 *et des nombres de* 2, *tel que pour toute fonction* (1) *remplissant les conditions* (j)-(vj) *et pour tout système de nombres de* 4, *il existe dans le cercle $|t| < R$ une famille de variations des fonctions rationnelles de la variable $\mathfrak{z}$, dépendant du paramètre complexe t, holomorphes par rapport à t, de la forme*

$$(2)\qquad \Delta(\mathfrak{z}, t) = \frac{F_K(t)}{\mathfrak{z}^K} + \ldots + \hat{F}_K(t)\mathfrak{z}^K, \quad F_K(t) \neq 0,\ \hat{F}_K(t) \neq 0,$$

et il existe des systèmes de fonctions holomorphes

$$(3)\qquad \mathfrak{z}_j(t), \quad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$(4)\qquad p_h(t), \quad h = 1, \ldots, m, \quad m = 2K - 2n,$$

tels que

$$(5)\qquad \mathfrak{z}_j(t) \in G_{j(1/2)\delta}, \quad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)} \in \hat{G}_{j(1/2)\delta},$$

$$(5')\qquad p_h(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/2)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/2)\delta}\Big)',$$

$$\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}_j(t), t) = 0, \quad \Delta'_{\mathfrak{z}}\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right) = 0, \tag{6}$$

$$\Delta'_{\mathfrak{z}}(p_h(t), t) = 0, \tag{7}$$

$$\Delta(\mathfrak{z}_j(t), t) = S_j(t), \quad \Delta\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right) = \hat{S}_j(t), \tag{8}$$

$$\Delta(p_h(t), t) = \Delta_h, \quad \text{où } \Delta_h = \Delta(p_h), \tag{9}$$

$$\frac{F_K(t)}{\hat{F}_K(t)} = \frac{F_K}{\hat{F}_K}, \tag{10}$$

$$\Delta(\mathfrak{z}, 0) = \Delta(\mathfrak{z}), \tag{11}$$

$$\mathfrak{z}_j(0) = \mathfrak{z}_j, \quad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(0)} = \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j}, \tag{12}$$

$$p_h(0) = p_h; \tag{13}$$

les inégalités suivantes ont lieu:

$$|N_j(t)| < CN, \quad |\hat{N}_j(t)| < CN, \tag{14}$$

où

$$C = 4\frac{\nu^1}{\delta^5 \nu_2}, \tag{15}$$

et où on a posé

$$S_j(t) = \Delta(\mathfrak{z}_j) + N_j 2i\mathfrak{z}_j^2 \Delta''(\mathfrak{z}_j)t, \tag{16}$$

$$\hat{S}_j(t) = \Delta\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j}\right) - \hat{N}_j 2i\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^2}\Delta''\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j}\right)t, \tag{16'}$$

et

$$N_j(t) = \frac{S'_j(t)}{2i\mathfrak{z}_j^2(t)\Delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}_j(t), t)}, \quad \hat{N}_j(t) = \frac{\hat{S}'_j(t)}{-2i\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^2(t)}\Delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right)}. \tag{17}$$

On a la relation suivante:

$$\Delta'_t(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)\frac{\mathfrak{z}+\mathfrak{z}_j(t)}{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j(t)} + \hat{N}_j(t)\frac{1+\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}{1-\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}\right). \tag{18}$$

De plus il existe une fonction

$$\mathfrak{z} = \vartheta(u, t), \tag{19}$$

définie et holomorphe par rapport aux deux variables u et t dans le domaine

$$\{u, t\colon\ u \in U,\ |t| < R\}, \tag{20}$$

où

$$U = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/8)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/8)\delta} \cup \bar{g}_{(1/8)\delta} \cup \bar{\hat{g}}_{(1/8)\delta}\Big)', \tag{21}$$

qui est, en tant que fonction de la variable t, solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -i\mathfrak{z} \sum_{j=1}^{n} \left(N_j(t) \frac{\mathfrak{z}+\mathfrak{z}_j(t)}{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j(t)} + \hat{N}_j(t) \frac{1+\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}{1-\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}} \right), \tag{22}$$

considérée dans le domaine

$$\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \hat{\mathfrak{Z}},\ |t| < R\}, \tag{23}$$

où

$$\hat{\mathfrak{Z}} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/4)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/4)\delta} \cup \bar{g}_{(1/4)\delta} \cup \bar{\hat{g}}_{(1/4)\delta}\Big)', \tag{24}$$

avec la condition initiale

$$\mathfrak{z} = u \quad \textit{pour } t = 0; \tag{25}$$

cette fonction (19) *est, pour t arbitraire et fixé, une fonction univalente, en tant que fonction de la variable u, dans le domaine U. Pour la fonction* (19) *on a dans* (20) *l'inégalité*

$$|\vartheta(u, t) - u| \leqslant \tfrac{1}{16}\delta. \tag{26}$$

En même temps pour t arbitraire, fixé et u variable l'image du domaine U par la fonction (19) *couvre le domaine*

$$\mathfrak{Z} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/16)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/16)\delta} \cup \bar{g}_{(1/16)\delta} \cup \bar{\hat{g}}_{(1/16)\delta}\Big)'. \tag{27}$$

Il existe donc, au moins pour $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, *une fonction*

$$u = \vartheta^{-1}(\mathfrak{z}, t) \tag{28}$$

inverse de (19). *Cette fonction est holomorphe par rapport aux deux variables* $\mathfrak{z}$ *et t dans le domaine*

$$\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z},\ |t| < R\} \tag{29}$$

et elle y vérifie aussi l'inégalité

$$|\vartheta^{-1}(\mathfrak{z}, t) - \mathfrak{z}| \leqslant M|t|, \tag{30}$$

où $M = \dfrac{48}{\delta^3} nCN.$

La fonction (19) *satisfait dans* (20) *à la relation*

$$\Delta\big(\vartheta(u, t), t\big) = \Delta(u). \tag{31}$$

Enfin, dans le cas particulier où la fonction (1) *est rationnelle spéciale, lorsque* $\hat{\mathfrak{z}}_j = \bar{\mathfrak{z}}_j$, $\hat{N}_j = \bar{N}_j$ *et* $g \subset K(0,1)$, $G_j \subset K(0,1)$, $\hat{g} = \tilde{g}$, $\hat{G}_j = \tilde{G}_j$, *les fonctions* (2) *sont également rationnelles spéciales pour t réels et les valeurs* (3) *sont symétriques par rapport à* $K^*(0,1)$. *Il est clair que l'ensemble des points* (4) *est de même situé symétriquement par rapport à* $K^*(0,1)$, *il n'est pourtant pas necessaire de le mettre en évidence par des notations spéciales. En outre, pour ces mêmes t réels et pour u appartenant respectivement aux ensembles* $K(0,1)$, $K^*(0,1)$ *et* $\tilde{K}(0,1)$ *les valeurs de* $\vartheta(u,t)$ *appartiennent respectivement aux mêmes ensembles.*

Démonstration. Considérons les domaines et les nombres mentionnés dans 1 et 2, que nous supposerons fixés dans la suite du raisonnement. Soit ensuite $\mathscr{D}$ la classe de toutes les fonctions rationnelles simples de la forme (1), satisfaisant aux conditions (j)-(vj) et $\mathscr{N}$ — la classe de tous les systèmes (N^0) de 4. Du lemme 1′, 1 nous déduisons tout d'abord que pour toute fonction (1) de cette classe et pour tout système de nombres arbitraires 4, il existe un cercle $|t| < T^*$, dans lequel il existe, pour les fonctions $S_j(t)$ et $\hat{S}_j(t)$ données par les formules (16), une famille de fonctions $\Delta(\mathfrak{z}, t)$ de la forme (2), holomorphes par rapport à t, et il existe des systèmes de fonctions holomorphes $\mathfrak{z}_j(t)$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, $p_h(t)$ $(h = 1, \ldots, m)$, pour lesquels sont remplies les conditions (6)-(13) et, ce qui en résulte, est vérifiée la relation

$$(32) \qquad \Delta_t'(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\,\Delta_{\mathfrak{z}}'(\mathfrak{z}, t) \sum_{j=1}^{n} \left(N_j(t) \frac{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_j(t)}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_j(t)} + \hat{N}_j(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}} \right),$$

où $N_j(t)$ et $\hat{N}_j(t)$ sont définies par les formules (17). Soit $|t| < R_{\Delta N^0}$ d'après la remarque 2, 1, le plus grand des cercles mentionnés plus haut. Soit enfin $|t| < \dot{R}_{\Delta N^0}$ le plus grand cercle contenu dans le précédent, dans lequel les fonctions (3) et (17) satisfont en plus aux conditions (5), (5′) et (14).

On constate facilement que la première partie du lemme signifie simplement que la borne inférieure $\dot{R}$ des nombres $\dot{R}_{\Delta N^0}$ pour $\Delta(\mathfrak{z}) \in \mathscr{D}$ et $(N^0) \in \mathscr{N}$ est positive. Dans ce cas on peut prendre dans la conclusion pour R un nombre arbitraire, au plus égal à $\dot{R}$.

Pour prouver cette première partie du lemme supposons donc le contraire, c.-à-d. que la borne inférieure mentionnée soit égale à zéro. Il en résulte immédiatement que pour tout f naturel il existe une fonction $\Delta_f(\mathfrak{z}) \in \mathscr{D}$ et un système $(N_f^0) \in \mathscr{N}$ de nombres N_{jf}, $\hat{N}_{jf}$ $(j = 1, \ldots, n)$ tels que

$$(33) \qquad \dot{R}_{\Delta_f N_f^0} < \frac{1}{f}, \quad f = 1, 2, \ldots$$

Posons

$$(34) \quad \Delta_f(\mathfrak{z}) = \frac{F_{K_f}}{\mathfrak{z}^{K_f}} + \ldots + \hat{F}_{K_f}\mathfrak{z}^{K_f}, \quad F_{K_f} \neq 0, \ \hat{F}_{K_f} \neq 0, \ f = 1, 2, \ldots,$$

et désignons ensuite par

$$(35)\qquad \mathfrak{z}_{jf},\quad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}},\quad j=1,\ldots,n,\quad f=1,2,\ldots,$$

et

$$(36)\qquad p_{hf},\quad h=1,\ldots,m_f,\ m_f=2K_f-2n,\ f=1,2,\ldots,$$

les racines de la dérivé $\Delta_f'(\mathfrak{z})$ situées respectivement dans les domaines G_j et $\hat{G}_j$ et à l'extérieur de la somme de ces domaines. Désignons ensuite par

$$(37)\qquad \Delta_f(\mathfrak{z},t)=\frac{F_{K_f}(t)}{\mathfrak{z}^{K_f}}+\ldots+\hat{F}_{K_f}(t)\mathfrak{z}^{K_f},\qquad F_{K_f}(t)\neq 0,\ \hat{F}_{K_f}(t)\neq 0,$$

$$(38)\qquad \mathfrak{z}_{jf}(t),\quad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)},$$

$$(39)\qquad p_{hf}(t),$$

respectivement la famille et les fonctions remplissant dans $|t|<\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ des conditions analogues à celles de la conclusion

$$(40)\qquad \Delta_{f_\delta}'\big(\mathfrak{z}_{jf}(t),t\big)=0,\qquad \Delta_{f_\delta}'\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)},t\right)=0,$$

$$(41)\qquad \Delta_{f_\delta}'\big(p_{hf}(t),t\big)=0,$$

$$(42)\qquad \Delta_f\big(\mathfrak{z}_{jf}(t),t\big)=S_{jf}(t),\qquad \Delta_f\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)},t\right)=\hat{S}_{jf}(t),$$

$$(43)\qquad \Delta_f\big(p_{hf}(t),t\big)=\Delta_{hf},\qquad \text{où } \Delta_{hf}=\Delta_f(p_{hf}),$$

$$(44)\qquad \frac{F_{K_f}(t)}{\hat{F}_{K_f}(t)}=\frac{F_{K_f}}{\hat{F}_{K_f}},$$

$$(45)\qquad \Delta_f(\mathfrak{z},0)=\Delta_f(\mathfrak{z}),$$

$$(46)\qquad \mathfrak{z}_{jf}(0)=\mathfrak{z}_{jf},\qquad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(0)}=\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}},$$

$$(47)\qquad p_{hf}(0)=p_{hf},$$

et

$$(48)\qquad \mathfrak{z}_{jf}(t)\in G_{j(1/2)\delta},\qquad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}\in \hat{G}_{j(1/2)\delta},$$

$$(48')\qquad p_{hf}(t)\in\Big(\bigcup_{j=1}^{n}\bar{G}_{j(1/2)\delta}\cup\bigcup_{j=1}^{n}\bar{\hat{G}}_{j(1/2)\delta}\Big)',$$

$$(49)\qquad |N_{jf}(t)|<CN,\qquad |\hat{N}_{jf}(t)|<CN,$$

où

$$S_{jf}(t) = \Delta_f(\mathfrak{z}_{jf}) + N_{jf} 2i \mathfrak{z}_{jf}^2 \Delta_f''(\mathfrak{z}_{jf}) t, \tag{50}$$

$$\hat{S}_{jf}(t) = \Delta_f\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}}\right) - \hat{N}_{jf} 2i \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}^2} \Delta_f''\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}}\right) t, \tag{50'}$$

$$N_{jf}(t) = \frac{S_{jf}'(t)}{2\mathfrak{z}_{jf}^2(t)\, i\, \Delta_{f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}}''(\mathfrak{z}_{jf}(t), t)}, \qquad \hat{N}_{jf}(t) = \frac{\hat{S}_{jf}'(t)}{-2\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}^2(t)}\, i\, \Delta_{f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}}''\left(\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}, t\right)} \tag{51}$$

et la relation qui en résulte:

$$\Delta_{ft}'(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\, \Delta_{f_{\mathfrak{z}}}'(\mathfrak{z}, t) \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) \frac{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_{jf}(t)}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_{jf}(t)} + \hat{N}_{jf}(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}} \right). \tag{52}$$

Considérons pour f arbitraire l'équation différentielle

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -i\mathfrak{z} \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) \frac{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_{jf}(t)}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_{jf}(t)} + \hat{N}_{jf}(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}} \right) \tag{53}$$

avec la condition initiale

$$\mathfrak{z} = u \quad \text{pour } t = 0 \tag{54}$$

dans le domaine

$$\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \hat{\mathfrak{Z}},\ |t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}\}, \tag{55}$$

où $\hat{\mathfrak{Z}}$ est défini par la formule (24).

Soit maintenant $u \in U$ (voir (21)); alors le bicylindre

$$\{\mathfrak{z}, t\colon |\mathfrak{z} - u| < b,\ |t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}\},$$

où

$$b = \tfrac{1}{8}\delta, \tag{56}$$

est entièrement contenu dans le domaine (55).

Remarquons ensuite que dans ce domaine est réalisée l'inégalité

$$\left| -i\mathfrak{z} \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) \frac{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_{jf}(t)}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_{jf}(t)} + \hat{N}_{jf}(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}} \right) \right|$$
$$< 2nCN\left(\frac{1}{\delta} + \tfrac{1}{4}\delta\right) \frac{2/\delta + \frac{1}{4}\delta}{\frac{1}{4}\delta} < \frac{48}{\delta^3} nCN.$$

En effet, vu (48) et la définition de $\hat{\mathfrak{Z}}$, les inégalités suivantes ont lieu

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_{jf}(t)| > \tfrac{1}{4}\delta \quad \text{et} \quad \left| \mathfrak{z} - \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)} \right| > \tfrac{1}{4}\delta,$$

et, en vertu du fait que $\mathfrak{z} \notin \hat{g}_{(1/4)\delta}$, $\mathfrak{z}_{jf}(t) \notin \hat{g}$ et $1/\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t) \notin \hat{g}$ et $\delta < 1$, nous avons (comp. [18], p. 19)

$$|\mathfrak{z}| < \frac{1}{\delta} + \tfrac{1}{4}\delta, \qquad |\mathfrak{z}_{jf}(t)| < \frac{1}{\delta}, \qquad \left|\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}\right| < \frac{1}{\delta}, \qquad \tfrac{1}{4}\delta < \frac{1}{\delta}.$$

Posons

$$M = \frac{48}{\delta^3} nCN. \tag{57}$$

Il suit de résultats connus [7], p. 351-356, qu'il existe exactement une seule solution

$$\mathfrak{z} = \vartheta_f(u, t) \tag{58}$$

de l'équation (53), remplissant la condition initiale

$$\vartheta_f(u, 0) = u, \tag{59}$$

définie et holomorphe par rapport à u et t au moins pour la valeur initiale $u \in U$ et pour la valeur de la variable indépendante $|t| < \operatorname{Min}(\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}, b/M)$, c.-à-d., vu (56) et (57), pour

$$|t| < \operatorname{Min}\left(\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}, \frac{\delta^4}{8\cdot 48\, nCN}\right). \tag{60}$$

Prenons ensuite f est assez grand pour que

$$\frac{1}{f} < \frac{\delta^4}{8\cdot 48\, nCN};$$

alors pour ces f, vu (33), le minimum du second membre de (60) est $\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ et la solution (58) est déterminée définitivement au moins pour u, t du domaine

$$\{u, t\colon\ u \in U,\ |t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}\}. \tag{61}$$

De plus, de l'unicité des solutions de l'équation (53) avec la condition initiale (54), nous déduisons facilement (voir le raisonnement de [14], p. 97) que pour tout t fixé, $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$, la fonction (58) est univalente par rapport à la variable $u \in U$.

Remarquons encore que dans (61) on a

$$\begin{aligned} &|\vartheta_f(u, t) - u| \\ &= \left|\int_0^t \left(-i\vartheta_f(u, t) \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) \frac{\vartheta_f(u, t) + \mathfrak{z}_{jf}(t)}{\vartheta_f(u, t) - \mathfrak{z}_{jf}(t)} + \hat{N}_{jf}(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\vartheta_f(u, t)}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\vartheta_f(u, t)}\right)\right) dt\right| \\ &\leqslant M|t| < M\dot{R}_{\Delta_f N_f^0} < M\frac{1}{f}. \end{aligned} \tag{62}$$

Observons ensuite que pour les f suffisamment grands, l'image du domaine U par la fonction (58), considéré comme fonction de la variable u, avec t arbitraire et fixé du cercle $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$, couvre le domaine $\mathfrak{Z}$ (voir (27)).

En effet, soit $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{Z}$; dans ce cas le cercle $|u-\mathfrak{z}_0| \leqslant \frac{1}{16}\delta$ appartient au domaine U et, si en outre f est assez grand pour que

$$M\frac{1}{f} < \frac{1}{16}\delta,$$

alors, vu (62), sur la circonférence $|u-\mathfrak{z}_0| = \frac{1}{16}\delta$ est remplie l'inégalité $|\vartheta_f(u, t)-u| < |u-\mathfrak{z}_0|$. D'où, en vertu du théorème de Rouché, nous déduisons que la fonction (58) prend dans le cercle $|u-\mathfrak{z}_0| < \frac{1}{16}\delta$ la valeur $\mathfrak{z}_0$ exactement une fois, donc au moins une fois dans U.

Combinant les remarques précédentes, nous obtenons que pour les f suffisamment grands, pour t arbitraire fixé et pour $u \in U$ variable, il existe au moins pour $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ une fonction

$$u = \vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t) \tag{63}$$

inverse de (58); cette fonction, comme fonction des deux variables $\mathfrak{z}$ et t, est définie au moins dans le domaine (64):

$$\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z},\ |t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}\}. \tag{64}$$

Elle est en même temps holomorphe dans ce domaine par rapport aux deux variables, ce qui résulte de la relation $\vartheta_f\big(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t), t\big) = \mathfrak{z}$ et du théorème connu sur les fonctions implicites.

De plus, conformément à ce qui précède, on a dans (64)

$$\begin{aligned} &|\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)-\mathfrak{z}| \\ &\quad = \big|\vartheta_f\big(\mathfrak{z}+(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)-\mathfrak{z}), t\big)-\big(\mathfrak{z}+(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)-\mathfrak{z})\big)\big| \\ &\quad \leqslant M|t| < M\dot{R}_{\Delta_f N_f^0} < M\frac{1}{f}. \end{aligned} \tag{65}$$

Remarquons ensuite que dans (61) on a identiquement

$$\Delta_f\big(\vartheta_f(u, t), t\big) = \Delta_f(u). \tag{66}$$

En effet, cela résulte d'abord du fait que, d'après (52) et la définition de la fonction (58), la dérivé du premier membre de (66) par rapport à t s'annule identiquement, ensuite des conditions initiales (59) et (45).

D'où résulte que dans (64) on a

$$\Delta_f(\mathfrak{z}, t) = \Delta_f\big(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)\big) \tag{66'}$$

et par conséquent, si f est choisi tel que

$$M\frac{1}{f} < \frac{1}{32}\delta,$$

on a l'inégalité (voir 2, $*$)

$$(67)\qquad |\Delta_f(\mathfrak{z}, t) - \Delta_f(\mathfrak{z})|$$
$$= |\Delta_f(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)) - \Delta_f(\mathfrak{z})| = \Big|\int_{\mathfrak{z}}^{\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z},t)} \Delta_f'(u)\,du\Big|$$
$$\leqslant \Big(\underset{u\in[\mathfrak{z},\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z},t)]}{\overrightarrow{\mathrm{Max}}} |\Delta_f'(u)|\Big)\cdot|\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t) - \mathfrak{z}| < \nu^1 M\cdot\frac{1}{f}$$

pour

$$(68)\qquad \mathfrak{z} \in \bigcup_{j=1}^{n} G^*_{j(1/32)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \hat{G}^*_{j(1/32)\delta}.$$

En effet, à cause de (65), (68) et du choix de f, le segment $[\mathfrak{z}, \vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)]$, en particulier son origine, est situé simultanément dans $\mathfrak{Z}$ et dans l'ensemble $\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_j \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_j$, dans lequel est vérifiée, d'après $\Delta_f(u) \in \mathscr{D}$, l'hypothèse (vj), c.-à-d. l'inégalité $|\Delta_f'(u)| < \nu^1$.

Nous voyons ensuite, en appliquant le principe du maximum, que cette inégalité (67) a lieu également pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ dans l'ensemble fermé $\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/32)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/32)\delta}$.

Pour les points

$$(69)\qquad \mathfrak{z} \in \bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/2)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/2)\delta},$$

nous obtenons, en tenant compte du fait que leurs distances à la frontière (68) ne sont pas inférieures à $\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{32}\delta > \frac{1}{4}\delta$, et en appliquant deux fois la formule de Cauchy, vu (67), les inégalités

$$(70)\qquad |\Delta_{f_\delta}'(\mathfrak{z}, t) - \Delta_f'(\mathfrak{z})| < \frac{\nu^1 M\cdot\frac{1}{f}}{\frac{1}{4}\delta}$$

et

$$(71)\qquad |\Delta_{f_{\delta\delta}}''(\mathfrak{z}, t) - \Delta_f''(\mathfrak{z})| < \frac{\nu^1 M\cdot\frac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2}.$$

A cause de l'inégalité (71) et de (vj), nous avons dans l'ensemble (69)

$$(72)\qquad |\Delta_{f_{\delta\delta}}''(\mathfrak{z}, t)| \geqslant \nu_2 - \frac{\nu^1 M\cdot\frac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2}$$

et, par conséquent, en vertu de (51), (50′), 4, du fait que $\mathfrak{z}_{jf}$, $\mathfrak{z}_{jf}(t) \notin g \cup \hat{g}$ et de la limitation

$$|\Delta_f''(\mathfrak{z}_{jf})| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K^*(\mathfrak{z}_{jf},\delta)} \frac{\Delta_f'(\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_{jf})^2}\, d\mathfrak{z} \right| \leqslant \frac{\nu^1}{\delta},$$

résultant de la formule de Cauchy et de (v) et (vj), nous obtenons pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$

$$(73) \qquad |N_{jf}(t)| = |N_{jf}| \frac{|\mathfrak{z}_{jf}|^2 |\Delta_f''(\mathfrak{z}_{jf})|}{|\mathfrak{z}_{jf}(t)|^2 |\Delta_{f\mathfrak{z}\mathfrak{z}}''(\mathfrak{z}_{jf}(t), t)|} \leqslant N \frac{\dfrac{1}{\delta^2} \cdot \dfrac{\nu^1}{\delta}}{\delta^2 \left(\nu_2 - \dfrac{\nu^1 M \cdot \dfrac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2} \right)},$$

et de même

$$(73') \qquad |\hat{N}_{jf}(t)| = |\hat{N}_{jf}| \frac{\left| \dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)} \right|^2 \left| \Delta_f''\left(\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)} \right) \right|}{\left| \dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)} \right|^2 \left| \Delta_{f\mathfrak{z}\mathfrak{z}}''\left(\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}, t \right) \right|}$$

$$\leqslant N \frac{\dfrac{1}{\delta^2} \cdot \dfrac{\nu^1}{\delta}}{\delta^2 \left(\nu_2 - \dfrac{\nu^1 M \cdot \dfrac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2} \right)}.$$

Si donc f est assez grand pour que

$$\nu_2 - \frac{\nu^1 M \cdot \dfrac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2} > \frac{1}{2}\nu_2,$$

alors, vu (15), $N_{jf}(t)$ et $\hat{N}_{jf}(t)$ vérifient pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ les inégalités

$$(74) \qquad |N_{jf}(t)| \leqslant CN - e, \qquad |\hat{N}_{jf}(t)| \leqslant CN - e,$$

où e désigne un nombre positif, $e < \frac{1}{2}CN$.

En comparant maintenant les coefficients de $\mathfrak{z}^{-K_f}$ et de $\mathfrak{z}^{K_f}$ des deux membres de la relation (52), nous obtenons les deux égalités suivantes:

$$F_{K_f}'(t) = K_f i \sum_{j=1}^{n} \big(N_{jf}(t) - \hat{N}_{jf}(t)\big) F_{K_f}(t)$$

et

$$\hat{F}_{K_f}'(t) = K_f i \sum_{j=1}^{n} \big(N_{jf}(t) - \hat{N}_{jf}(t)\big) \hat{F}_{K_f}(t)$$

d'où, vu (45), il résulte immédiatement que

$$F_{K_f}(t) = F_{K_f} \exp\Big(K_f i \int\limits_{\overrightarrow{[0,t]}} \sum_{j=1}^{n} \big(N_{jf}(\tau) - \hat{N}_{jf}(\tau)\big) d\tau\Big)$$

et

$$\hat{F}_{K_f}(t) = \hat{F}_{K_f} \exp\Big(K_f i \int\limits_{\overrightarrow{[0,t]}} \sum_{j=1}^{n} \big(N_{jf}(\tau) - \hat{N}_{jf}(\tau)\big) d\tau\Big).$$

Profitant maintenant de l'inégalité (49), nous obtenons les limitations

$$|F_{K_f}(t)| \geqslant |F_{K_f}| \exp(-K_f \cdot 2nCN\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}), \tag{75}$$

$$|\hat{F}_{K_f}(t)| \geqslant |\hat{F}_{K_f}| \exp(-K_f \cdot 2nCN\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}) \tag{75'}$$

pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$.

Il résulte ensuite de l'inégalité (70) que pour f suffisamment grands on a pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$

$$|\Delta'_{f_3}(\mathfrak{z}, t) - \Delta'_f(\mathfrak{z})| < \tfrac{1}{2}\nu_1$$

dans l'ensemble (69); d'où et de la définition du nombre ν_1 nous déduisons définitivement que pour f suffisamment grands a lieu l'inégalité suivante

$$|\Delta'_{f_3}(\mathfrak{z}, t)| \geqslant \tfrac{1}{2}\nu_1 \tag{76}$$

pour

$$\mathfrak{z} \in \bigcup_{j=1}^{n} G^*_{j(1/2)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \hat{G}^*_{j(1/2)\delta} \tag{76'}$$

et $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$, qui donne immédiatement que pour tout t aucune des racines $\mathfrak{z}_{jf}(t)$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)$ ou $p_{hf}(t)$ n'est située sur les frontières de (76'). En combinant (48) et (48') et en tenant en outre, compte du fait que toutes les racines $p_{hf}(t)$ sont distinctes, puisque les valeurs de la fonction (37) pour ces racines sont, en vertu de l'hypothèse (jv) et (43), distinctes, nous concluons que les racines (38) et (39) sont toutes distinctes. D'autre part, comme le nombre de ces racines est égal au degré de la fonction (37), elles sont les seules racines de sa dérivé. Il est facile de voir que, si f est fixé pour le moment, les racines $\mathfrak{z}_{jf}(t)$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)$ et $p_{hf}(t)$ pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ sont situées à une distance non inférieure à un nombre positif d des frontières des domaines $G_{j(1/2)\delta}$ resp. $G_{j(1/2)\delta}$. Supposant le contraire, il existerait un j_0 ou un $\hat{j}_0$ ou bien un h_0, ainsi qu'une suite de paramètres $\{t_m\}$, $t_m \to t^*$, $|t^*| = \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$, tels que $\mathfrak{z}_{j_0 f}(t_m) \to \mathfrak{z}^*$, $\mathfrak{z}^* \in G^*_{j_0(1/2)\delta}$ ou $1/\hat{\mathfrak{z}}_{\hat{j}_0 f}(t_m) \to 1/\hat{\mathfrak{z}}^*$, $1/\hat{\mathfrak{z}}^* \in \hat{G}^*_{\hat{j}_0(1/2)\delta}$ ou bien $p_{h_0 f}(t_m) \to p^*$, $p^* \in \bigcup_{j=1}^{n} G^*_{j(1/2)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \hat{G}^*_{j(1/2)\delta}$. D'autre part, on pourrait prendre, de même que dans la démonstration du lemme 1, 2 (sur le prolon-

gement), en extrayant au besoin une suite partielle de $\{t_m\}$, que $\Delta_f(\mathfrak{z}, t_m) \to \Delta_f^*(\mathfrak{z})$, où $\Delta^*(\mathfrak{z})$ est aussi, vu (75) et (75'), une fonction rationnelle simple; em même temps on devrait avoir $\Delta^{*\prime}(\mathfrak{z}^*) = 0$ ou $\Delta^{*\prime}(1/\hat{\mathfrak{z}}^*) = 0$ ou bien $\Delta^{*\prime}(p^*) = 0$, ce qui est impossible, car sur les frontieres $G^*_{j(1/2)\delta}$, $\hat{G}^*_{j(1/2)\delta}$ on a, à cause de (76), l'inégalité $|\Delta^{*\prime}(\mathfrak{z})| \geqslant \frac{1}{2}\nu_1$. Donc il doit exister un $d > 0$ tel que

$$(77) \qquad \mathfrak{z}_{jf}(t) \in G_{j((1/2)\delta+d)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)} \in \hat{G}_{j((1/2)\delta+d)},$$

ainsi que

$$(77') \qquad p_{hf}(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j((1/2)\delta-d)} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j((1/2)\delta-d)}\Big)'.$$

Appliquant maintenant le lemme 1, 2, dans lequel le rôle des domaines G_j resp. $\hat{G}_j$ sera joué par les domaines $G_{j(1/2)\delta}$ resp. $G_{j(1/2)\delta}$, et celui du cercle $|t| < T^*$ par le cercle $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N^0_f}$, nous en déduisons, vu les inégalités (74), (75) et (75'), que la famille (37) et les fonctions (38) et (39) pourront être prolongées au cercle fermé $|t| \leqslant \dot{R}_{\Delta_f N^0_f}$; pareillement, il résulte des relations (77) et (77') et de la continuité des fonctions (38) et (39) que les relations (48) et (48') ont lieu dans le cercle fermé $|t| \leqslant \dot{R}_{\Delta_f N^0_f}$.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que la famille (37) et les fonctions (38) et (39) se prolongent comme fonctions holomorphes, en respectant les conditions (40)-(49), à un cercle $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N^0_f} + \eta_f$, $\eta_f > 0$, plus grand que le cercle $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N^0_f}$, contrairement à la définition de ce dernier.

Ainsi, conformément à ce qui nous avons annoncé, la borne inférieure $\dot{R}$ des nombres $\dot{R}_{\Delta N^0}$ mentionnés plus haut est positive. Si, en particulier, nous posons

$$R = \min\left(\dot{R}, \frac{\delta^4}{16 \cdot 48 nCN}\right),$$

alors pour un tel R la première partie de la conclusion est vraie. Démontrons qu'avec le même choix du nombre R la seconde l'est aussi.

En effet, prenons une fonction $\Delta(\mathfrak{z})$ arbitraire, du type indiqué dans 3, une famille correspondante de fonctions (2) et les fonctions (3) et (4) qui remplissent les conditions (5)-(14) dans le cercle $|t| < \dot{R}$. Considérons l'équation différentielle (22) dans le domaine $\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}, |t| < \dot{R}\}$, avec la condition initiale (25).

De même que dans la première partie de la démonstration, il est question des fonctions (58), nous constatons qu'il existe exactement une seule solution

$$(78) \qquad \mathfrak{z} = \vartheta(u, t)$$

de l'équation différentielle (22), remplissant la condition initiale $\vartheta(u, 0) = u$ définie et holomorphe par rapport à u et t au moins pour les valeurs initiales $u \in U$ et pour les valeurs de la variable indépendante

$$(79) \qquad |t| < R = \operatorname{Min}\left(\dot{R}, \frac{\delta^4}{16 \cdot 48 nCN}\right) \leqslant \operatorname{Min}\left(\dot{R}, \frac{\delta^4}{8 \cdot 48 nCN}\right),$$

donc dans le domaine (20).

De plus nous observons que pour tout t fixé la fonction (78) est univalente par rapport à la variable $u \in U$.

Nous remarquons en outre, comme pour (62), en tenant encore compte de (57) et (79), que

$$|\vartheta(u, t) - u| \leqslant M|t| \leqslant \frac{48}{\delta^3} nCN \frac{\delta^4}{16 \cdot 48 nCN} = \frac{1}{16}\delta.$$

Ensuite, vu cette inégalité de même que pour les fonctions (58), nous voyons que l'image du domaine U par la fonction (78), considérée comme fonction de la variable u avec t arbitraire fixé couvre le domaine $\mathfrak{Z}$.

Récapitulant les remarques précédentes, nous constatons que pour t arbitraire, fixé, $|t| < R$, et $u \in U$ variable, il existe au moins pour $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ une fonction

$$(80) \qquad u = \vartheta^{-1}(\mathfrak{z}, t),$$

inverse de (78). Cette fonction est définie et holomorphe par rapport aux deux variables $\mathfrak{z}$ et t dans le domaine (29) et elle y vérifie aussi l'inégalité

$$|\vartheta^{-1}(\mathfrak{z}, t) - \mathfrak{z}| \leqslant M|t|.$$

Nous remarquons enfin, comme pour (66), que la fonction (78) vérifie dans (20) la relation (31).

Supposons enfin que les conditions indiquées dans le cas particulier de la conclusion sont remplies.

Alors il résulte facilement de la remarque 1, 1 que les fonctions (2) sont rationnelles spéciales, les valeurs (3) sont symétriques par rapport à $K^*(0, 1)$ et les valeurs (17) sont conjuguées.

Prenons à présent $t_0 \in (-R, R)$ arbitraire et soit

$$(81) \qquad \lambda = \lambda(t_0, a_0, t)$$

la solution réelle de l'équation réelle

$$(82) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = -\sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)\frac{e^{i\lambda} + \mathfrak{z}_j(t)}{e^{i\lambda} - \mathfrak{z}_j(t)} + \overline{N}_j(t)\frac{\bar{e}^{i\lambda} + \bar{\mathfrak{z}}_j(t)}{\bar{e}^{i\lambda} - \bar{\mathfrak{z}}_j(t)}\right),$$

qui remplit la condition initiale $\lambda(t_0, a_0, t_0) = a_0$, où a_0 est un nombre arbitraire réel. Une telle solution existe toujours au moins pour $t \in (-R, R)$ et elle est une fonction holomorphe. De plus, prenant β arbitraire, réel

et $t \in (-R, R)$ arbitraire et prenant ensuite $a_0 = \lambda(t, \beta, t_0)$, nous obtenons, en vertu de l'identiré connue $\lambda(t, \beta, \tau) = \lambda\big(t_0, \lambda(t, \beta, t_0), \tau\big)$, que $\lambda(t_0, a_0, t) = \beta$; cela prouve que toute solution $\lambda(t_0, a_0, t)$ pour t_0, t fixés pour le moment, considérée comme fonction de a_0, prend toutes les valeurs réelles. D'autre part, de (82) et du fait que dans notre cas particulier $\hat{N}_j(t) = \overline{N}_j(t)$ et $\hat{\mathfrak{z}}_j(t) = \overline{\mathfrak{z}}_j(t)$ pour t réels, il résulte facilement que la fonction $\mathfrak{z} = \exp i\lambda(0, a_0, t)$ est une solution de l'équation (22) avec la condition initiale $\mathfrak{z} = e^{ia_0}$ pour $t = 0$. De là et de l'unicité des solutions de l'équation (22) il résulte que les fonctions (81) et (78) sont liées par la relation

$$\vartheta(e^{ia_0}, t) = \exp i\lambda(0, a_0, t).$$

Ainsi pour t réels et $u \in K^*(0, 1)$ on a également $\vartheta(u, t) \in K^*(0, 1)$; en outre, conformément à ce qui précède, toutes les valeurs sur $K^*(0, 1)$ sont les valeurs de la fonction $\vartheta(u, t)$. De ce fait, par tout point de la circonférence unité il passe une solution de l'équation (22), parcourant entièrement sur cette circonférence. Donc, encore en vertu de l'unicité des solutions de cette équation, aucune solution contenant les points de $K(0, 1)$ ou de $\tilde{K}(0, 1)$ ne peut traverser la circonférence $K^*(0, 1)$, ce qui donne immédiatement que pour $u \in K(0, 1)$ resp. pour $u \in \tilde{K}(0, 1)$ est également $\vartheta(u, t) \in K(0, 1)$ resp. $\vartheta(u, t) \in \tilde{K}(0, 1)$.

Remarque 1. Remarquons que des conditions (jv) et (9) il résulte que les racines (4) sont distinctes. Par conséquent, de (5) et (5') il résulte ensuite que toutes les racines (3) et (4) de la dérivée $\Delta'_\delta(\mathfrak{z}, t)$ sont distinctes et, comme leur nombre est égal au degré de la fonction (37), alors (3) et (4) sont toutes les racines de cette dérivée, nécessairement simples.

II. APPROXIMATIONS SUCCESSIVES ET RÉSULTAT FINAL

0. FORMULE FONDAMENTALE POUR LES VARIATIONS DES FONCTIONS UNIVALENTES BORNÉES

Soit une fonction arbitraire univalente et bornée dans le sens de Löwner (17, *)

$$b(z) = b_1 z + \ldots, \qquad b_1 > 0, \tag{1}$$

transformant le cercle $K(0, 1)$ en un domaine G.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Il existe une famille de variations des fonctions univalentes et bornées dans le sens de Löwner, de la forme*

$$b(z, t) = b_1(t) z + \ldots, \tag{2}$$

définie dans un intervalle $I = (-T, T)$ du paramètre t, holomorphe par rapport à t et vérifiant les relations

$$b(z, 0) = b(z), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} b_t'(z, t) = \sum_{j=1}^{n} \Bigg(& \beta_j(t) \left(\left(\zeta_j(t) \frac{b_z'(\zeta_j(t), t)}{b(\zeta_j(t), t)} \right)^2 b(z, t) \times \right. \\ & \left. \times \frac{b(\zeta_j(t), t) + b(z, t)}{b(\zeta_j(t), t) - b(z, t)} - z b_z'(z, t) \frac{\zeta_j(t) + z}{\zeta_j(t) - z} \right) + \\ & + \bar{\beta}_j(t) \left(\overline{\left(\zeta_j(t) \frac{b_z'(\zeta_j(t), t)}{b(\zeta_j(t), t)} \right)^2} b(z, t) \frac{1 + \overline{b(\zeta_j(t), t)} b(z, t)}{1 - \overline{b(\zeta_j(t), t)} b(z, t)} - \right. \\ & \left. - z b_z'(z, t) \frac{1 + \overline{\zeta_j(t)} z}{1 - \overline{\zeta_j(t)} z} \right) \Bigg). \end{aligned} \tag{4}$$

où $\zeta_j(t)$ et $\beta_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, sont des fonctions holomorphes telles que $|\zeta_j(t)| < 1$ et la quantité n et $\zeta_j(0)$, $\beta_j(0)$ sont des nombres arbitraires donnés d'avance.

La démonstration se composera des cinq parties.

1. APPROXIMATION

Soit $b(z)$ une fonction définie dans $K(1,0)$ et soit $\tilde{b}(z) = 1/\overline{b(1/\bar{z})}$ pour $z \in \tilde{K}(0,1)$; on voit que $\tilde{b}(z)$ transforme d'une façon conforme $\tilde{K}(0,1)$ en $\tilde{G}$ (11, $*$).

Soit un système arbitraire fini de points

$$\zeta_j \in K(0,1), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

et de leurs symétriques par rapport à $K^*(0,1)$

$$\frac{1}{\bar{\zeta}_j} \in \tilde{K}(0,1), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

et soit

$$\omega_j = b(\zeta_j) \in G \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{\omega}_j} = \tilde{b}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) \in \tilde{G}. \tag{3}$$

Soit encore une fonction arbitraire $\varkappa(w)$, holomorphe, et différente de zéro aux points (3), symétrique par rapport à la circonférence $K^*(0,1)$ et telle que $\varkappa'(\omega_j) = 0$, $\varkappa''(\omega_j) \neq 0$ et $\varkappa'(1/\bar{\omega}_j) = 0$, $\varkappa''(1/\bar{\omega}_j) \neq 0$.

On voit immédiatement qu'il existe un système de cercles k et K_j, $j = 1, \ldots, n$, contenant resp. 0 et ω_j, à fermetures disjointes et contenues dans G, et il existe un système de cercles symétriques $\tilde{k}$ et $\tilde{K}_j$, $j = 1, \ldots, n$, contenant resp. ∞ et $1/\bar{\omega}_j$, à fermetures disjointes et contenues dans $\tilde{G}$, donc également disjointes de ces cercles, tels que la fonction $\varkappa(w)$ est holomorphe et différente de zéro dans la somme des cercles fermés $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$, et que sa dérivée, considérée dans la somme de ces cercles, s'annule uniquement aux points ω_j et $1/\bar{\omega}_j$, tandis que sa dérivée seconde y est différente de zéro.

Soit $[\varkappa(w)]^{1/2}$ une fonction définie dans la somme

$$\bigcup_{j=1}^{n} \bar{K}_j \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\tilde{K}}_j,$$

égale dans chaque cercle $\bar{K}_j$ resp. $\bar{\tilde{K}}_j$ à une branche quelconque de la racine carrée de $\varkappa(w)$.

Nous constatons le fait suivant:

LEMME 1 (sur l'approximation). *Il existe une suite $\{\Omega_f(w)\}$ de fonctions rationnelles spéciales et une suite $\{H_f\}$ d'arcs spéciaux correspondant à ces fonctions* (21, $*$), *tels que les conditions suivantes sont remplies*:

(a) *les domaines $K(0,1) \setminus H_f$ tendent dans le sens du noyau vers le domaine G*;

(b) *$\{\Omega_f(w)\}$, $\{\Omega_f'(w)\}$ et $\{\Omega_f''(w)\}$ tendent dans les cercles $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$ uniformément vers les fonctions $\varkappa(w)$, $\varkappa'(w)$ et $\varkappa''(w)$ respectivement*;

(c) *$\Omega_f'(w)$ a toutes ses racines simples*;

(d) *sur l'arc H_f la dérivée $\Omega_f'(w)$ n'a pas de racines à l'exception d'une seule qui est à l'origine de cet arc*;

(e) *les valeurs de la fonction $\Omega_f(w)$ aux racines de la dérivée $\Omega_f'(w)$ à l'extérieur de la somme des cercles K_j et $\tilde{K}_j$, et la valeur analogue à l'extrémité de l'arc H_f sont toutes distinctes.*

Démonstration. En vertu d'un résultat connu ([14], p. 89), il existe une suite d'arcs simples $\{S_f\}$ partant de la circonférence unité vers son intérieur, ne passant pas par zéro, telle que la suite des domaines $\{K(0, 1)\setminus S_f\}$ tend dans le sens du noyau vers G. Par conséquent, pour f suffisamment grand, les distances des arcs S_f à la somme $k \cup \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ sont supérieures à un certain nombre positif. Considérons ensuite, de même que dans [3], p. 12-13, l'homographie $l(w)$ transformant le cercle unité en le demi-plan supérieur, et posons $a = l(0)$. Les arcs S_f se transforment par $l(w)$ en arcs analogues $C_f = l(S_f)$ et les cercles k et K_j se transforment en cercles $l(k)$ et $l(K_j)$. Formons l'arc $\tilde{C}_f$ symétrique de C_f par rapport à l'axe réel et les cercles $l(\tilde{k})$ et $l(\tilde{K}_j)$ symétriques respectivement des précédents par rapport à l'axe réel. Les arcs C_f et $\tilde{C}_f$ forment ensemble un arc F_f symétrique par rapport à l'axe réel. Pour f suffisamment grands la distance de l'arc F_f à la somme

$$l(k) \cup \bigcup_{j=1}^{n} l(K_j) \cup l(\tilde{k}) \cup \bigcup_{j=1}^{n} l(\tilde{K}_j)$$

est supérieure, ce qui est facile à vérifier, à un certain nombre positif. Considérons f arbitraire, suffisamment grand, et l'arc correspondant F_f. L'arc F_f peut être arbitrairement approché dans le sens de Hausdorff (16, 1, I), par un arc analytique A_f de représentation paramétrique

$$\zeta = p_f(\tau), \qquad \tau \in I,$$

où I est le segment $\overrightarrow{[-i, i]}$ et $p_f(\tau)$ est une fonction univalente, définie dans un certain rectangle B_f, symétrique par rapport aux axes de coordonnées et contenant dans son intérieur le segment I (comp. [3], p. 12-13). De plus, en améliorant éventuellement l'approximation, on peut admettre que l'arc A_f est à une distance plus grande qu'un certain nombre positif de la somme des cercles mentionnés. Enfin, on peut admettre que $p_f(\bar{\tau}) = \overline{p_f(\tau)}$ pour $\tau \in B_f$ et aussi en diminuant éventuellement le rectangle B_f, que $D_f = p_f(B_f)$ à une distance plus grande qu'un certain nombre positif de cette même somme de cercles. Examinons maintenant dans le domaine D_f la fonction inverse $p_f^{-1}(\zeta)$. Nous remarquons, vu ce qui précède, que $p_f^{-1}(\bar{\zeta}) = \overline{p_f^{-1}(\zeta)}$ pour $\zeta \in D_f$. Prenons ensuite dans D_f un

domaine fermé simplement connexe et symétrique par rapport à l'axe réel Q_{0f} tel que $I \subset [p_f^{-1}(Q_{0f})]^0$. Formons la fonction composée $[\varkappa(l^{-1}(\zeta))]^{1/2}$ et considérons la fonction $u_f(\zeta)$ qui est égale à $p_f^{-1}(\zeta)$ dans Q_{0f} et à $[\varkappa(l^{-1}(\zeta))]^{1/2}$ dans la somme des cercles $\bigcup_{j=1}^{n} (l(\bar{K}_j) \cup l(\bar{\tilde{K}}_j))$. Cette fonction est évidemment holomorphe dans l'esemble

$$\Sigma_f = Q_{0f} \cup \bigcup_{j=1}^{n} (l(\bar{K}_j) \cup l(\bar{\tilde{K}}_j)),$$

et, comme l'ensemble complémentaire de cet ensemble est un ensemble connexe contenant les points a et $\bar{a}$ et symétrique par rapport à l'axe réel, il résulte facilement des résultats correspondants [3], p. 9, et [18], p. 173, qu'il existe une fonction rationnelle $\pi_f(\zeta)$, symétrique par rapport à l'axe réel, ayant des pôles uniques aux points a et $\bar{a}$, arbitrairement proche de $u_f(\zeta)$ pour $\zeta \in \Sigma_f$, telle que:

(α) $\pi_f'(\zeta)$ et $\pi_f''(\zeta)$ sont resp. arbitrairement proches de $\left[\left(\varkappa(l^{-1}(\zeta))\right)^{1/2}\right]'$ et $\left[\left(\varkappa(l^{-1}(\zeta))\right)^{1/2}\right]''$ dans l'ensemble $\bigcup_{j=1}^{n} (l(K_j) \cup l(\tilde{K}_j))$;

(β) $\pi_f(\zeta)$ est univalente dans l'ensemble Q_{0f};

(γ) $I \subset (\pi_f(Q_{0f}))^0$.

Posons $\pi_{0f}(\zeta) = \pi_f(\zeta)$ pour $\zeta \in Q_{0f}$. Alors, vu ce qui précède, il existe dans $\pi_{0f}(Q_{0f})$ une fonction inverse $\pi_{0f}^{-1}(\tau)$ et, ce qui est facile à vérifier elle y est arbitrairement proche de $p_f(\tau)$.

Posons

$$T_f = \pi_{0f}^{-1}(I). \tag{4}$$

On voit que T_f est un arc analytique simple, symétrique par rapport à l'axe réel, donc orthogonal à cet axe au point d'intersection; T_f ne contient évidemment pas les points a et $\bar{a}$. De plus, en tenant compte du caractère arbitraire des approximations considérées, on peut admettre que les distances dans le sens de Hausdorff des arcs T_f et A_f et, par conséquent, des arcs T_f et F_f, tendent vers zéro lorsque f tend vers l'infini. En outre, on a

$$\pi_f(\zeta) \to \left(\varkappa(l^{-1}(\zeta))\right)^{1/2}, \quad \pi_f'(\zeta) \to \left[\left(\varkappa(l^{-1}(\zeta))\right)^{1/2}\right]', \quad \pi_f''(\zeta) \to \left[\left(\varkappa(l^{-1}(\zeta))\right)^{1/2}\right]'' \tag{5}$$

uniformément pour

$$\zeta \in \bigcup_{j=1}^{n} (l(\bar{K}_j) \cup l(\bar{\tilde{K}}_j)).$$

Examinons à présent la fonction

$$\Lambda_f(w) = \varphi\left(\pi_f\left(l(w)\right)\right), \tag{6}$$

où $\varphi(x) = x^2$. On prouve facilement que c'est une fonction rationnelle spéciale. En effet, la fonction rationnelle (6) est partout holomorphe, à l'exception des points 0 et ∞, où elle a des pôles et elle est réelle sur la circonférence $K^*(0, 1)$. Posant maintenant

$$R_f = l^{-1}(P_f), \tag{7}$$

où P_f est une partie de l'arc T_f située dans le demi-plan supérieur fermé, nous constatons que R_f est un arc simple et, comme précédemment, la distance dans le sens de Hausdorff des arcs R_f et S_f tend vers zéro lorsque f tend vers l'infini.

De plus, puisque la fonction $\pi_f(\zeta)$ est symétrique par rapport à l'axe réel et transforme T_f en I et qu'elle est univalente dans $Q_{0f} \supset T_f$ elle s'annule exactement en un seul point de l'arc T_f situé sur l'axe réel et sa dérivée $\pi_f'(\zeta)$ est constamment différente de zéro sur T_f. Par conséquent, comme on le voit de ce qui précède et de (6) et (7), la dérivée $\Lambda_f'(w)$ s'annule à l'origine de l'arc R_f située sur la circonférence du cercle unité, tandis qu'aux points restants de l'arc R_f elle est différente de zéro.

De plus, comme la fonction $\pi_f(l(w))$ admet une inverse sur l'arc R_f et le transforme en la partie supérieure du segment I, où la fonction $\varphi(x)$ admet une inverse, la fonction (6) admet également une inverse sur l'arc R_f et le transforme en le segment $\overrightarrow{[0, -1]}$. Un calcul élémentaire facile montre que l'arc R_f est orthogonal à son origine à la circonférence unité.

Cela étant, nous constatons que l'arc R_f est spécial correspondant à la fonction (6) et tel que ses valeurs à son origine et à son extrémité sont resp. 0 et -1.

D'ailleurs, vu (5) et (6), on a

$$\Lambda_f(w) \to \varkappa(w), \qquad \Lambda_f'(w) \to \varkappa'(w), \tag{8}$$
$$\Lambda_f''(w) \to \varkappa''(w)$$

uniformément pour $w \in \bigcup_{j=1}^{n} (\overline{K}_j \cup \overline{\tilde{K}}_j)$.

Enfin, désignant resp. par ε_{0f} et ε_f l'origine et l'extrémité de l'arc R_f et en appliquant successivement (33, 1, I) et la remarque 3, 1, I, nous pouvons approcher arbitrairement chaque fonction $\Lambda_f(w)$ par une fonction rationnelle spéciale $\Omega_f(w)$, suffisamment proche de $\Lambda_f(w)$, dont la dérivée $\Omega_f'(w)$ a toutes ses racines simples et dont les valeurs pour ces racines sont toutes distinctes et différentes de la valeur $-1 + \Omega_f(v_{0f})$, où v_{0f} est la racine de la dérivée $\Omega_f'(w)$ correspondant à la racine ε_{0f} dans le sens de (26, $*$). Alors, conformément à (36, $*$), il existe un arc spécial H_f correspondant à la fonction $\Omega_f(w)$, arbitrairement proche dans le sens de

Hausdorff de R_f, sur lequel la fonction $\Omega_f(w)$ admet une inverse et la dérivée $\Omega_f'(w)$ n'a pas de racines à l'exception de son origine v_{0f}, où elle a une racine simple; de plus $\Omega_f(v_f)-\Omega_f(v_{0f}) = \Lambda_f(\varepsilon_f)-\Lambda_f(\varepsilon_{0f})$, donc

$$\Omega_f(v_f) = -1+\Omega_f(v_{0f}), \tag{9}$$

où v_f désigne l'extrémité de l'arc H_f.

En même temps, comme l'approximation examinée plus haut est arbitraire, on peut admettre que les convergences uniformes suivantes ont lieu

$$\Omega_f(w)-\Lambda_f(w) \to 0, \qquad \Omega_f'(w)-\Lambda_f(w) \to 0, \tag{10}$$
$$\Omega_f''(w)-\Lambda_f''(w) \to 0,$$

et que les distances dans le sens de Hausdorff des arcs H_f et R_f tendent vers zéro.

En définitive, prenant les fonctions $\Omega_f(w)$ et les arcs H_f mentionnés pour ceux dont il est question dans la conclusion du lemme, nous vérifions successivement que, vu la définition de l'arc S_f et les rapports de convergence entre R_f et S_f, H_f et R_f, la condition (a) est remplie; en vertu des relations (8) et (10) la condition (b) est remplie; vu la première propriété de la fonction $\Omega_f(w)$, il en est de même de la condition (c); en vertu de la seconde propriété de l'arc H_f la condition (d) l'est aussi; enfin, vu la seconde propriété de la fonction $\Omega_f(w)$ et (9), la condition (e) est aussi remplie. Soit enfin

$$a_f(z), \quad f = 1, 2, \ldots, \text{ pour } z \in K(0, 1), \tag{11}$$

une fonction qui transforme d'une façon conforme le cercle $K(0, 1)$ en le domaine $K(0, 1)\setminus H_f$, telle que

$$a_f(0) = 0, \qquad a_f'(0) > 0; \tag{12}$$

$$\tilde{a}_f(z) \quad \text{pour } z \in \tilde{K}(0, 1) \tag{13}$$

est alors une fonction analogue qui transforme d'une façon conforme $\tilde{K}(0, 1)$ en le domaine $\tilde{K}(0, 1)\setminus\tilde{H}_f$ ((10, *), (11, *)).

Les fonctions (12) et (13) se prolongent d'une façon continue aux ensembles fermés $\overline{K(0, 1)}$ et $\overline{\tilde{K}(0, 1)}$, (27, *).

Du théorème sur le noyau il résulte que

$$a_f(z) \to b(z) \quad \text{et} \quad \tilde{a}_f(z) \to \tilde{b}(z) \tag{14}$$

presque uniformément dans $K(0, 1)$ resp. $\tilde{K}(0, 1)$.

2. VARIATION DES FONCTIONS DÉTERMINANTES

Soient $b(z)$ et $\varkappa(w)$ les fonctions et k, K_j, $\tilde{K}_j$, $\tilde{k}$ et ω_j, $1/\bar{\omega}_j$ les cercles et les points introduits dans 1.

Soit $2\varrho^*$ la borne inférieure des distances des points 0, ω_j, $1/\bar{\omega}_j$ et ∞ aux frontières des cercles k, K_j, $\tilde{K}_j$, et $\tilde{k}$.

Soient $\frac{1}{2}\mu^1$, $2\mu_2$ des nombres positifs limitant supérieurement le module $|\varkappa'(w)|$ et inférieurement le module $|\varkappa''(w)|$ sur les systèmes des cercles $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$, ϱ — un nombre positif arbitraire et assez petit pour que $\varrho < \min(\varrho^*, 1, \sqrt[5]{4\mu^1/\mu_2})$ et $2\mu_1$ un nombre positif limitant inférieurement le module $|\varkappa'(w)|$ sur les systèmes des circonférences $K^*_{j(1/2)\varrho}$ et $\tilde{K}^*_{j(1/2)\delta}$. On a évidemment $\mu_1 < \mu^1$.

En vertu du lemme 1, 1 (sur l'approximation) il existe une suite de fonctions rationnelles spéciales

$$\Omega_f(w) = \frac{D_{L_f}}{w^{L_f}} + \ldots + D_{0f} + \ldots + \bar{D}_{L_f} w^{L_f}, \tag{1}$$

$$D_{L_f} \neq 0,\ D_{0f} - \text{réel},\ f = 1, 2, \ldots,$$

et d'arcs spéciaux H_f correspondant à ces fonctions, tels que

$$\Omega_f(w) \to \varkappa(w) \tag{2}$$

uniformément sur les cercles $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$ et tels que sont remplies les conditions (a), (c), (d) et (e) du même lemme. De (2) et des propriétés de la fonction $\varkappa(w)$ il résulte en outre que pour f suffisamment grand chacun des cercles $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$ contient exactement une seule racine de la dérivée $\Omega'_f(w)$.

Désignons pour ces f suffisamment grands resp. par

$$\omega_{jf}, \quad \frac{1}{\bar{\omega}_{jf}}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$w_{kf}, \quad \frac{1}{\bar{w}_{kf}}, \quad k = 1, \ldots, m'_f, \tag{4}$$

$$v_{lf}, \quad l = 0, \ldots, m''_f, \tag{5}$$

où

$$2n + 2m'_f + (m''_f + 1) = 2L_f, \tag{6}$$

les racines de la dérivée $\Omega'_f(w)$ situées dans les cercles $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$, dans $K(0, 1) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}(0, 1) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\tilde{K}}_j$ et sur la circonférence $K^*(0, 1)$, où v_{0f} est l'origine de H_f.

Soit ensuite ϱ_f le minimum des distances des points 0, ω_{jf}, $1/\bar{\omega}_{jf}$ et ∞ aux frontières des cercles correspondants k, K_j, $\tilde{K}_j$ et $\tilde{k}$ contenant ces points.

Il résulte de la convergence (2) que

$$\omega_{jf} \to \omega_j, \qquad \frac{1}{\bar{\omega}_{jf}} \to \frac{1}{\bar{\omega}_j} \tag{6'}$$

et, par conséquent,

$$\varrho_f \to 2\varrho^*. \tag{7}$$

Des définitions des nombres μ^1, μ_2, ϱ et μ_1 et de (2) et (7) il résulte de plus que pour f suffisamment grands

$$|\Omega_f'(w)| < \mu^1, \qquad |\Omega_f''(w)| > \mu_2 \tag{8}$$

sur les systèmes des cercles fermés $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$,

$$|\Omega_f'(w)| > \mu_1 \tag{9}$$

sur les systèmes des circonférences $K^*_{j(1/2)\varrho}$ et $\tilde{K}^*_{j(1/2)\varrho}$ et

$$\varrho_f > \varrho^* \geqslant \varrho. \tag{10}$$

Soient enfin $A_{jf}, j = 1, \ldots, n, f = 1, 2, \ldots,$ signifie des nombres arbitraires complexes et $\bar{A}_{jf}$ leurs conjugués, tels que les suites $\{A_{jf}\}$, $j = 1, \ldots, n$, soient convergentes respectivement vers les limites A_j données d'avance, et soit A un nombre limitant supérieurement tous les termes de toutes ces suites.

Alors, en vertu du lemme 1, 3, I (sur la variation), il existe un nombre $S > 0$ qui dépend uniquement du système des cercles k, K_j, $\tilde{K}_j$, et $\tilde{k}$ et des nombres μ_1, μ^1, μ_2, A et ϱ, et qui est indépendant de l'indice f, tel que dans le cercle $|t| < S$ il existe pour toute fonction (1) et pour f suffisamment grand une famille de variations de fonctions rationnelles de la variable w, dépendant du paramètre complexe t, holomorphes par rapport à t, de la forme

$$\Omega_f(w, t) = \frac{D_{L_f}(t)}{w^{L_f}} + \ldots + \hat{D}_{L_f}(t) w^{L_f}, \qquad D_{L_f}(t) \neq 0, \hat{D}_{L_f}(t) \neq 0, \tag{11}$$

et il existe des systèmes de fonctions holomorphes

$$\omega_{jf}(t), \qquad \frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$$w_{kf}(t), \qquad \frac{1}{\hat{w}_{kf}(t)}, \qquad k = 1, \ldots, m_f', \tag{13}$$

$$v_{lf}(t), \qquad l = 0, \ldots, m_f'', \tag{14}$$

tels que

$$\Omega'_{fw}\big(\omega_{jf}(t), t\big) = 0, \qquad \Omega'_{fw}\left(\frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)}, t\right) = 0, \tag{15}$$

$$\Omega'_{fw}\big(w_{kf}(t), t\big) = 0, \qquad \Omega'_{fw}\left(\frac{1}{\hat{w}_{kf}(t)}, t\right) = 0, \tag{16}$$

$$\Omega'_{fw}\big(v_{lf}(t), t\big) = 0, \tag{17}$$

$$\Omega_f\big(\omega_{jf}(t), t\big) = S_{jf}(t), \qquad \Omega_f\left(\frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)}, t\right) = \hat{S}_{jf}(t), \tag{18}$$

$$\Omega_f\big(w_{kf}(t), t\big) = \Omega_f(w_{kf}), \qquad \Omega_f\left(\frac{1}{\hat{w}_{kf}(t)}, t\right) = \Omega_f\left(\frac{1}{\overline{w}_{kf}}\right), \tag{19}$$

$$\Omega_f\big(v_{lf}(t), t\big) = \Omega_f(v_{lf}), \tag{20}$$

$$\frac{D_{L_f}(t)}{\hat{D}_{L_f}(t)} = \frac{D_{L_f}}{\overline{D}_{L_f}}, \tag{21}$$

$$\omega_{jf}(t) \in K_{j(1/2)\varrho}, \qquad \frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)} \in \tilde{K}_{j(1/2)\varrho}, \tag{22}$$

$$w_{kf}(t),\ v_{lf}(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{K}_{j(1/2)\varrho} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\hat{K}}_{j(1/2)\varrho}\Big)', \tag{22'}$$

$$\Omega_f(w, 0) = \Omega_f(w), \tag{23}$$

$$\omega_{jf}(0) = \omega_{jf}, \qquad \frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(0)} = \frac{1}{\overline{\omega}_{jf}}, \tag{24}$$

$$w_{kf}(0) = w_{kf}, \qquad \frac{1}{\hat{w}_{kf}(0)} = \frac{1}{\overline{w}_{kf}}, \tag{25}$$

$$v_{lf}(0) = v_{lf}, \tag{26}$$

et que les inégalités

$$|A_{jf}(t)| < C_1 A, \qquad |\hat{A}_{jf}(t)| < C_1 A, \qquad C_1 = 4\frac{\mu^1}{\varrho^5 \mu_2}, \tag{27}$$

ont lieu, où on a appliqué les notations

$$S_{jf}(t) = \Omega_f(\omega_{jf}) + A_{jf} 2i\,\omega_{jf}^2\, \Omega_f''(\omega_{jf})\, t, \tag{28}$$

$$\hat{S}_{jf}(t) = \Omega_f\left(\frac{1}{\overline{\omega}_{jf}}\right) - \overline{A}_{jf} 2i \frac{1}{\overline{\omega}_{jf}^2}\, \Omega_f''\left(\frac{1}{\overline{\omega}_{jf}}\right) t, \tag{28'}$$

et

(29)
$$A_{jf}(t) = \frac{S'_{jf}(t)}{2\omega_{jf}^2(t)\, i\Omega''_{fww}(\omega_{jf}(t), t)}, \qquad \hat{A}_{jf}(t) = \frac{\hat{S}'_{jf}(t)}{-2\dfrac{1}{\hat{\omega}_{jf}^2(t)}\, i\Omega''_{fww}\left(\dfrac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)}, t\right)}.$$

En outre on a la relation

(30)
$$\Omega'_{ft}(w, t) = iw\Omega'_{fw}(w, t)\sum_{j=1}^{n}\left(A_{jf}(t)\frac{w+\omega_{jf}(t)}{w-\omega_{jf}(t)} + \hat{A}_{jf}(t)\frac{1+\hat{\omega}_{jf}(t)w}{1-\hat{\omega}_{jf}(t)w}\right).$$

De plus, pour tout f indiqué plus haut il existe une fonction

(31)
$$w = \psi_f(y, t),$$

définie et holomorphe par rapport aux deux variables y et t dans le domaine

(32)
$$\{y, t\colon\ y \in Y,\ |t| < S\},$$

où

(33)
$$Y = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{K}_{j(1/8)\varrho} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\tilde{K}}_{j(1/8)\varrho} \cup \bar{k}_{(1/8)\varrho} \cup \bar{\tilde{k}}_{(1/8)\varrho}\Big)',$$

fonction qui est, comme fonction de la variable t, solution de l'équation différentielle

(34)
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -iw\sum_{j=1}^{n}\left(A_{jf}(t)\frac{w+\omega_{jf}(t)}{w-\omega_{jf}(t)} + \hat{A}_{jf}(t)\frac{1+\hat{\omega}_{jf}(t)w}{1-\hat{\omega}_{jf}(t)w}\right),$$

considérée dans le domaine

(35)
$$\{w, t\colon\ w \in \hat{W},\ |t| < S\},$$

où

(36)
$$\hat{W} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{K}_{j(1/4)\varrho} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\tilde{K}}_{j(1/4)\varrho} \cup \bar{k}_{(1/4)\varrho} \cup \bar{\tilde{k}}_{(1/4)\varrho}\Big)',$$

avec la condition initiale

(37)
$$w = y \quad \text{pour } t = 0;$$

cette fonction (31), comme fonction de la variable y dans le domaine Y est univalente pour t arbitraire, fixé.

Pour la fonction (31) nous avons dans (33) l'inégalité

(38)
$$|\psi_f(y, t) - y| \leqslant \tfrac{1}{16}\varrho.$$

En même temps pour t arbitraire, fixé et pour y variable, l'image du domaine Y par la fonction (31) couvre le domaine

$$W = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{K}_{j(1/16)\varrho} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\tilde{K}}_{j(1/16)\varrho} \cup \bar{k}_{(1/16)\varrho} \cup \bar{\tilde{k}}_{(1/16)\varrho}\Big)'. \tag{39}$$

Donc, au moins pour $w \in W$ il existe une fonction

$$y = \psi_f^{-1}(w, t) \tag{40}$$

inverse de (31). Cette fonction est holomorphe par rapport aux deux variables w et t dans le domaine

$$\{w, t\colon\ w \in W,\ |t| < S\} \tag{41}$$

et elle y remplit également l'inégalité

$$|\psi_f^{-1}(w, t) - w| \leqslant M_1 |t|, \quad \text{où} \quad M_1 = \frac{48}{\varrho^3} n C_1 A. \tag{42}$$

La fonction (31) satisfait dans (32) à la relation

$$\Omega_f\big(\psi_f(y, t), t\big) = \Omega_f(y). \tag{43}$$

Enfin pour t arbitraire réel, $t \in (-U, U)$, et pour y appartenant resp. à $K(0, 1)$, $K^*(0, 1)$ et $\tilde{K}(0, 1)$ les valeurs des $\psi_f(y, t)$ appartiennent resp. à $K(0, 1)$, $K^*(0, 1)$ et $\tilde{K}(0, 1)$.

3. VARIATION DES FONCTIONS ACCOMMODÉES

Considérons maintenant les systèmes de points (1) et (2) de 1 et la fonction $\sigma(z)$, holomorphe en ces points, définie par la formule

$$\sigma(z) = \varkappa\big(b(z)\big) \tag{1}$$

dans les domaines $b^{-1}(K_j)$ et $\tilde{b}^{-1}(\tilde{K}_j)$.

On déduit par un calcul facile, des propriétés de la fonction $\varkappa(w)$ que

$$\sigma'(\zeta_j) = 0, \quad \sigma'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) = 0, \tag{2}$$

$$\sigma''(\zeta_j) \neq 0, \quad \sigma''\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) \neq 0. \tag{3}$$

Remarquons ensuite qu'il existe un système de cercles q et Q_j, $j = 1, \ldots, n$, contenus dans $K(0, 1)$, analogues à k et K_j, dont les fermetures sont contenues resp. dans les domaines disjoints $b^{-1}(k)$ et $b^{-1}(K_j)$, et contenant resp. les points 0 et ζ_j, et il existe un système de cercles

correspondants $\tilde{q}$ et $\tilde{Q}_j, j = 1, \ldots, n$, contenus dans $\tilde{K}(0, 1)$, symétriques des précédents par rapport à la circonférence unité, dont les fermetures sont contenues resp. dans les domaines disjoints $\tilde{b}^{-1}(\tilde{k})$ et $\tilde{b}^{-1}(\tilde{K}_j)$, contenant resp. les points ∞ et $1/\bar{\zeta}_j$, tels que la fonction $\sigma(z)$ est holomorphe dans les cercles fermés disjoints $\bar{Q}_j$ et $\bar{\tilde{Q}}_j$, sa dérivée $\sigma'(z)$ considérée sur la somme de ces cercles fermés s'annule uniquement aux points ζ_j et $1/\bar{\zeta}_j$, et la dérivée seconde $\sigma''(z)$ y est différente de zéro.

Soit $2\tau^*$ la borne inférieure des distances des points 0, ζ_j, $1/\bar{\zeta}_j$ et ∞ aux frontières des cercles correspondants $q, Q_j, \tilde{Q}_j$ et $\tilde{q}$.

Soient $\frac{1}{2}\lambda^1$, $2\lambda_2$ des nombres positifs limitant supérieurement le module $|\sigma'(z)|$ et inférieurement le module $|\sigma''(z)|$ sur les systèmes des cercles $\bar{Q}_j$ et $\bar{\tilde{Q}}_j$, τ un nombre positif arbitraire et assez petit pour que $\tau < \min(\tau^*, 1, \sqrt[5]{4\lambda^1/\lambda_2})$ et $2\lambda_1$ un nombre positif limitant inférieurement le module $|\sigma'(z)|$ sur les systèmes des circonférences $Q^*_{j(1/2)\tau}$ et $\tilde{Q}^*_{j(1/2)\tau}$. On a évidemment $\lambda_1 < \lambda^1$.

Prenons à présent la suite des fonctions composées

$$X_f(z) = \Omega_f(a_f(z)), \quad f = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

où $\Omega_f(w)$ et $a_f(z)$ sont les fonctions (1, 2) et (11, 1). Il est facile de vérifier que les premiers membres de (4) sont des fonctions rationnelles spéciales de la forme

$$X_f(z) = \frac{E_{L_f}}{z^{L_f}} + \ldots + E_{0f} + \ldots + \bar{E}_{L_f} z^{L_f}, \quad E_{L_f} \neq 0, E_{0f} - \text{réel}. \tag{5}$$

De (4), du lemme 1, 1, de (14, 1) et (1) il résulte facilement que

$$X_f(z) \to \sigma(z), \tag{6}$$

lorsque f tend vers l'infini, sur la somme des cercles fermés $\bar{Q}_j$ et $\bar{\tilde{Q}}_j$. De (6) il résulte de plus que pour f suffisamment grand dans chaque $\bar{Q}_j$ et $\bar{\tilde{Q}}_j$ il y a exactement une seule racine de la dérivée $X'_f(z)$ qui est l'image réciproque par la fonction $a_f(z)$ resp. par la fonction $\tilde{a}_f(z)$ de la racine correspondante (3, 2) de la dérivée $\Omega'_f(w)$, située dans le cercle K_j resp. $\tilde{K}_j$. Pareillement, pour f suffisamment grands il y a à l'extérieur de la somme des cercles nommés $m'_f + m''_f$ racines simples de la dérivée $X'_f(z)$ qui constituent les images réciproques des racines restantes (4, 2) et (5, 2) de la dérivée $\Omega'_f(w)$, à l'exception de v_{0f} qui est l'origine de l'arc H_f, et encore d'une racine simple située évidemment sur la circonférence unité. Il est évident d'après (34, $*$) que cette dernière racine est l'image réciproque de l'extrémité de l'arc H_f.

Désignons les racines mentionnées plus haut par

$$\zeta_{jf} = a_f^{-1}(\omega_{jf}), \quad \frac{1}{\zeta_{jf}} = \tilde{a}_f^{-1}\left(\frac{1}{\bar{\omega}_{jf}}\right), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

$$z_{kf} = a_f^{-1}(w_{kf}), \quad \frac{1}{\bar{z}_{kf}} = \tilde{a}_f^{-1}\left(\frac{1}{\bar{w}_{kf}}\right), \quad k = 1, \ldots, m_f', \tag{8}$$

$$u_{lf} = a_f^{-1}(v_{lf}) = \tilde{a}_f^{-1}(\bar{v}_{lf}^{-1}), \quad l = 1, \ldots, m_f'', \tag{9}$$

$$u_{m_f''+1,f} = a_f^{-1}(v_{m_f''+1,f}) = \tilde{a}_f^{-1}(\bar{v}_{m_f''+1,f}^{-1}), \tag{9'}$$

où $v_{m_f''+1,f}$ et $\bar{v}_{m_f''+1,f}^{-1}$ désignent resp. les extrémités des arcs H_f et $\tilde{H}_f$.

Nous remarquons ensuite facilement, en tenant compte des égalités

$$X_f(z_{kf}) = \Omega_f\big(a_f(z_{kf})\big) = \Omega_f(w_{kf}), \tag{10}$$

$$X_f\left(\frac{1}{\bar{z}_{kf}}\right) = \Omega_f\left(\tilde{a}_f\left(\frac{1}{\bar{z}_{kf}}\right)\right) = \Omega_f\left(\frac{1}{\bar{w}_{kf}}\right), \tag{11}$$

$$X_f(u_{lf}) = \Omega_f\big(a_f(u_{lf})\big) = \Omega_f(v_{lf}), \quad l = 1, \ldots, m_f''+1, \tag{12}$$

qui résultent de (4), (8) et (9), et de la condition (e) du lemme 1, 1, réalisée pour la fonction $\Omega_f(w)$ par hypothèse que les valeurs de la fonction $X_f(z)$ pour les racines de sa dérivée $X_f'(z)$, situées à l'extérieur du système des cercles Q_j et $\tilde{Q}_j$, sont toutes distinctes.

Soit ensuite τ_f la borne inférieure des distances des points 0, ζ_{jf}, $1/\bar{\zeta}_{jf}$ et ∞ aux circonférences correspondantes $q^*, Q_j^*, \tilde{Q}_j^*$ er $\tilde{q}^*$.

De la convergence (6) il résulte que

$$\zeta_{jf} \to \zeta_j, \quad \frac{1}{\bar{\zeta}_{jf}} \to \frac{1}{\bar{\zeta}_j} \tag{12'}$$

et, par conséquent,

$$\tau_f \to 2\tau^*. \tag{13}$$

De (6) et (13) il résulte ensuite que pour f suffisamment grand

$$|X_f'(z)| < \lambda^1, \quad |X_f''(z)| > \lambda_2 \tag{14}$$

sur les systèmes des cercles fermés $\bar{Q}_j$ et $\bar{\tilde{Q}}_j$,

$$|X_f'(z)| > \lambda_1 \tag{15}$$

sur les systèmes des circonférences $Q_{j(1/2)\tau}^*$ et $\tilde{Q}_{j(1/2)\tau}^*$ et

$$\tau_f > \tau^* > \tau. \tag{16}$$

Prenons enfin les nombres complexes B_{jf}, et leurs conjugués $\bar{B}_{jf}$, définis par les formules

$$B_{jf} = A_{jf}\left(\frac{a_f(\zeta_{jf})}{\zeta_{jf}a_f'(\zeta_{jf})}\right)^2, \tag{17}$$

et le nombre

$$B = A\frac{4}{\left[\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\varrho\left(K^*(0,1),Q_j^*\right)\right]^2},$$

qui limite supérieurement les modules des nombres B_{jf}, car, en vertu de l'évaluation connue de la dérivée logarithmique des fonctions univalentes et de la définition du nombre A, [14], p. 117, on a

$$\left|\frac{a_f(\zeta_{jf})}{\zeta_{jf}a_f'(\zeta_{jf})}\right| \leqslant \frac{1+|\zeta_{jf}|}{1-|\zeta_{jf}|} \quad \text{et} \quad |A_{jf}| \leqslant A.$$

Alors, en vertu du lemme 1, 4, I (sur la variation), il existe un nombre $V > 0$, qui dépend uniquement du système des cercles $q, Q_j, \tilde{Q}_j$ et $\tilde{q}$ et des nombres λ_1, λ^1, λ_2, B et τ, et qui est indépendant de l'indice f, tel que dans le cercle $|t| < V$ il existe pour toute fonction (5), pour f suffisamment grand une famille de variations de fonctions rationnelles de la variable z dépendant du paramètre complexe t, holomorphes par rapport à t, de la forme

$$X_f(z,t) = \frac{E_{L_f}(t)}{z^{L_f}} + \ldots + \hat{E}_{L_f}(t)z^{L_f}, \quad E_{L_f}(t) \neq 0, \quad \hat{E}_{L_f}(t) \neq 0, \tag{18}$$

et des systèmes de fonctions holomorphes

$$\zeta_{jf}(t), \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

$$z_{kf}(t), \quad \frac{1}{\hat{z}_{kf}(t)}, \quad k = 1, \ldots, m_f', \tag{20}$$

$$u_{lf}(t), \quad l = 1, \ldots, m_f''+1, \tag{21}$$

tels que

$$X_{fz}'\left(\zeta_{jf}(t), t\right) = 0, \quad X_{fz}'\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)}, t\right) = 0, \tag{22}$$

$$X_{fz}'\left(z_{kf}(t), t\right) = 0, \quad X_{fz}'\left(\frac{1}{\hat{z}_{kf}(t)}, t\right) = 0, \tag{23}$$

$$X_{fz}'\left(u_{lf}(t), t\right) = 0, \tag{24}$$

$$X_f\left(\zeta_{jf}(t), t\right) = S_{jf}(t), \quad X_f\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)}, t\right) = \hat{S}_{jf}(t), \tag{25}$$

$$X_f\left(z_{kf}(t), t\right) = \Omega_f(w_{kf}), \quad X_f\left(\frac{1}{\hat{z}_{kf}(t)}, t\right) = \Omega_f\left(\frac{1}{\bar{w}_{kf}}\right), \tag{26}$$

$$X_f\big(u_{lf}(t), t\big) = \Omega_f(v_{lf}), \tag{27}$$

$$\frac{E_{L_f}(t)}{\hat{E}_{L_f}(t)} = \frac{E_{L_f}}{\bar{E}_{L_f}}, \tag{28}$$

$$\zeta_{jf}(t) \in Q_{j(1/2)\tau}, \qquad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)} \in \tilde{Q}_{j(1/2)\tau}, \tag{29}$$

$$z_{kf}(t),\, u_{lf}(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{Q}_{j(1/2)\tau} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\tilde{Q}}_{j(1/2)\tau}\Big)', \tag{29'}$$

$$X_f(z, 0) = X_f(z), \tag{30}$$

$$\zeta_{jf}(0) = \zeta_{jf}, \qquad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(0)} = \frac{1}{\bar{\zeta}_{jf}}, \tag{31}$$

$$z_{kf}(0) = z_{kf}, \qquad \frac{1}{\hat{z}_{kf}(0)} = \frac{1}{\bar{z}_{kf}}, \tag{32}$$

$$u_{lf}(0) = u_{lf}, \tag{33}$$

et que les inégalités suivantes ont lieu:

$$|B_{jf}(t)| < C_2 B, \qquad |\hat{B}_{jf}(t)| < C_2 B, \qquad C_2 = 4\,\frac{\lambda^1}{\tau^5 \lambda_2}, \tag{34}$$

où $S_{jf}(t)$ et $\hat{S}_{jf}(t)$ ont été définis par les formules (28, 2) et (28′, 2) et

$$B_{jf}(t) = \frac{S'_{jf}(t)}{2\zeta^2_{jf}(t)\, i X''_{fzz}\big(\zeta_{jf}(t), t\big)}, \qquad \hat{B}_{jf}(t) = \frac{\hat{S}'_{jf}(t)}{-2\,\dfrac{1}{\hat{\zeta}^2_{jf}(t)}\, i X''_{fzz}\Big(\dfrac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)}, t\Big)} \text{ (1)}. \tag{35}$$

---

(1) Il est facile de prouver que

$$S_{jf}(t) = X_f(\zeta_{jf}) + B_{jf}\, 2i\zeta^2_{jf} X''_f(\zeta_{jf})\, t \tag{Δ}$$

et d'une façon analogue que

$$\tilde{S}_{jf}(t) = X_f\Big(\frac{1}{\bar{\zeta}_{jf}}\Big) - \bar{B}_{jf}\, 2i\, \frac{1}{\bar{\zeta}^2_{jf}}\, X''_f\Big(\frac{1}{\bar{\zeta}_{jf}}\Big) t. \tag{$\Delta\Delta$}$$

En effet, en dérivant deux fois la relation (4) par rapport à z, posant ensuite ζ_{jf} au lieu de z, en tenant compte de (7) et du fait que ω_{jf} sont racines de la dérivée $\Omega'_f(w)$, nous obtenons

$$\Omega''_f(\omega_{jf})\, a'^2_f(\zeta_{jf}) = X''_f(\zeta_{jf}),$$

d'où

$$\omega^2_{jf}\Omega''_f(\omega_{jf}) = \Big(\frac{a_f(\zeta_{jf})}{\zeta_{jf} a'_f(\zeta_{jf})}\Big)^2 \zeta^2_{jf} X''_f(\zeta_{jf}),$$

et en vertu de (17)

$$A_{jf}\omega^2_{jf}\Omega''_f(\omega_{jf}) = B_{jf}\zeta^2_{jf} X''_f(\zeta_{jf});$$

conjointement avec (28, 2) et avec les relations $X_f(\zeta_{jf}) = \Omega_f(\omega_{jf})$ resultant de (4) et (7), cela donne la première de relations mentionnées. La seconde se démontre de façon analogue.

En outre on a la relation

$$(36)\qquad X'_{ft}(z,t) = izX'_{fz}(z,t)\sum_{j=1}^{n}\left(B_{jf}(t)\frac{z+\zeta_{jf}(t)}{z-\zeta_{jf}(t)} + \hat{B}_{jf}(t)\frac{1+\hat{\zeta}_{jf}(t)z}{1-\hat{\zeta}_{jf}(t)z}\right).$$

De plus, pour tout f indiqué plus haut il existe une fonction

$$(37)\qquad z = \varphi_f(x,t),$$

définie et holomorphe par rapport aux deux variables x et t dans le domaine

$$(38)\qquad \{x,t\colon\ x\in X,\ |t|<V\},$$

où

$$(39)\qquad X = \Big(\bigcup_{j=1}^{n}\bar{Q}_{j(1/8)\tau}\cup\bigcup_{j=1}^{n}\bar{\tilde{Q}}_{j(1/8)\tau}\cup\bar{q}_{(1/8)\tau}\cup\bar{\tilde{q}}_{(1/8)\tau}\Big)',$$

fonction qui est comme fonction de la variable t, solution de l'équation différentielle

$$(40)\qquad \frac{\partial z}{\partial t} = -iz\sum_{j=1}^{n}\left(B_{jf}(t)\frac{z+\zeta_{jf}(t)}{z-\zeta_{jf}(t)} + \hat{B}_{jf}(t)\frac{1+\hat{\zeta}_{jf}(t)z}{1-\hat{\zeta}_{jf}(t)z}\right),$$

considéré dans le domaine

$$(41)\qquad \{z,t\colon\ z\in\hat{Z},\ |t|<V\},$$

où

$$(42)\qquad \hat{Z} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n}\bar{Q}_{j(1/4)\tau}\cup\bigcup_{j=1}^{n}\bar{\tilde{Q}}_{j(1/4)\tau}\cup\bar{q}_{(1/4)\tau}\cup\bar{\tilde{q}}_{(1/4)\tau}\Big)',$$

avec la condition initiale

$$(43)\qquad z = x \quad \text{pour } t = 0;$$

cette fonction, comme la fonction de la variable x dans le domaine X, pour t arbitraire fixé, est univalente.

Pour la fonction (37) nous avons dans (38) l'inégalité

$$(44)\qquad |\varphi_f(x,t)-x| \leqslant \tfrac{1}{16}\tau.$$

En même temps pour t arbitraire, fixé et pour x variable, l'image du domaine X par la fonction (37) couvre le domaine

$$(45)\qquad Z = \Big(\bigcup_{j=1}^{n}\bar{Q}_{j(1/16)\tau}\cup\bigcup_{j=1}^{n}\bar{\tilde{Q}}_{j(1/16)\tau}\cup\bar{q}_{(1/16)\tau}\cup\bar{\tilde{q}}_{(1/16)\tau}\Big)'.$$

Donc, au moins pour $z\in Z$ il existe une fonction

$$(46)\qquad x = \varphi_f^{-1}(z,t)$$

inverse de (37). Cette fonction est holomorphe par rapport aux deux variables z et t dans le domaine

$$\{z, t\colon z \in Z,\ |t| < V\} \tag{47}$$

et elle y satisfait également à l'inégalité

$$|\varphi_f^{-1}(z, t) - z| \leqslant M_2|t|, \quad \text{où } M_2 = \frac{48}{\tau^3} nC_2B. \tag{48}$$

La fonction (37) vérifie dans (38) la relation

$$X_f\big(\varphi_f(x, t), t\big) = X_f(x). \tag{49}$$

Enfin, pour t arbitraire réell, $t \in (-V, V)$, et pour x appartenant resp. à $K(0, 1)$, $K^*(0, 1)$ et $\tilde{K}(0, 1)$ les valeurs des $\varphi_f(x, t)$ appartiennent resp. à $K(0, 1)$, $K^*(0, 1)$ et $\tilde{K}(0, 1)$.

4. VARIATION DES FONCTIONS INTÉRIEURES

Etudions maintenant pour f suffisamment grand, arbitraire et fixé, les fonctions rationnelles (11, 2) et (18, 3), introduites dans 2 et 3, pour les valeurs du paramètre t, $|t| < T_0 = \min(S, V)$; pour simplifier les notations nous omettrons dans la suite l'indice f des fonctions (11, 2), (18, 3) et des fonctions liées avec elles et nous ferons de même pour leurs indices finaux (12, 2), (13, 2), (14, 2), (29, 2), (19, 3), (20, 3), (21, 3), (35, 3), (31, 2), (37, 3) et (11, 1).

LEMME 1 (sur l'existence et l'unicité de la fonction intérieure). *Si pour un t réel, $-T_0 < t < T_0$, pour un $r > 0$ et pour les fonctions correspondantes* (11, 2) *et* (18, 3) *il existe une fonction algébrique spéciale*

$$\tilde{a}(z) = \tilde{a}_1 z + \ldots, \tag{1}$$

remplissant les conditions

$$\Omega\big(\tilde{a}(z), t\big) = X(z, t) \quad \textit{pour } z \in K(0, r) \textit{ et } \tilde{a}_1 > 0, \tag{2}$$

cette fonction est unique.

De plus, si pour un t_0 réel, $-T_0 < t_0 < T_0$, il existe une fonction algébrique spéciale

$$a_0(z) = a_{10} z + \ldots, \tag{3}$$

remplissant les conditions initiales

$$\Omega\big(a_0(z), t_0\big) = X(z, t_0) \quad \textit{pour } z \in K(0, 1) \textit{ et } a_{10} > 0, \tag{4}$$

et

$$a_0\big(\zeta_j(t_0)\big) = \omega_j(t_0), \tag{5}$$

$$a_0\big(z_k(t_0)\big) = w_k(t_0), \tag{6}$$

$$a_0\big(u_l(t_0)\big) = v_l(t_0), \quad l \neq m''+1, \tag{7}$$

alors pour tout t d'un certain entourage (t_0-h, t_0+h) il existe une famille de variations de fonctions algébriques spéciales de la forme

$$a(z, t) = a_1(t)z+\ldots, \tag{8}$$

déterminée d'une façon unique, holomorphe par rapport à t et remplissant les conditions

$$\Omega\big(a(z, t), t\big) = X(z, t) \quad \textit{pour } z\in K(0, 1) \textit{ et } a_1(t) > 0, \tag{9}$$

les conditions

$$a\big(\zeta_j(t), t\big) = \omega_j(t), \tag{10}$$

$$a\big(z_k(t), t\big) = w_k(t), \tag{11}$$

$$a\big(u_l(t), t\big) = v_l(t), \quad l \neq m''+1, \tag{12}$$

et la condition initiale

$$a(z, t_0) = a_0(z). \tag{13}$$

Démonstration. Pour établir la première partie de la conclusion, examinons pour un certain t les fonctions (11, 2) et (18, 3). Nous déduisons des relations $D_L(t) \neq 0$ et $E_L(t) \neq 0$ que ces fonctions sont différentes de zéro pour w et z de certains entourages $|w| < \varrho$ et $|z| < r$. Soient

$$\Omega_L(w, t) = \sqrt[L]{\Omega(w, t)} = \frac{\sqrt[L]{D_L(t)}}{w} + \ldots \tag{14}$$

et

$$X_L(z, t) = \sqrt[L]{X(z, t)} = \frac{\sqrt[L]{E_L(t)}}{z} + \ldots \tag{15}$$

les branches des radicaux des fonctions (11, 2) et (18, 3) déterminées dans les entourages correspondants $|w| < \varrho$ et $|z| < r$, choisies de façon que

$$\sqrt[L]{D_L(t)}\Big/\sqrt[L]{E_L(t)} > 0. \tag{16}$$

Un tel choix est possible, car, étant donné (2), on a $D_L(t) = a_1^L E_L(t)$ et, par conséquent $\arg D_L(t) = \arg E_L(t)$. De (2) nous déduisons facilement, en extrayant les racines des deux membres et en tenant compte de (14), (15) et (16), que dans un certain entourage du point $z = 0$ la fonction (1) remplissant (2) s'exprime par la formule

$$\tilde{a}(z) = \Omega_L^{-1}\big(X_L(z, t), t\big), \tag{16'}$$

ce qui donne immédiatement l'unicité annoncée.

Passant à la seconde partie de la conclusion, nous montrerons tout d'abord que dans un certain entourage du point t_0 existent les fonctions (8) qui remplissent les conditions (9).

En effet, supposant le contraire, il existerait une suite de valeurs du paramètre t,

$$t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

tendant vers t_0, pour lesquelles il n'existerait pas de fonction correspondante (8) (comp. [3], p. 17-23). Examinant les fonctions (11, 2) et (18, 3) dans l'entourage du point t_0, nous voyons, à cause de la continuité de leurs coefficients au point t_0 et des relations $D_L(t_0) \neq 0$ et $E_L(t_0) \neq 0$, que ces fonctions sont différentes de zéro pour t, w et z de certains entourages $|t-t_0| < h_0$, $|w| < \varrho_0$ et $|z| < r_0$ (comp. [5]). Soient

$$\Omega_L(w, t) = \sqrt[L]{\Omega(w, t)} = \frac{\sqrt[L]{D_L(t)}}{w} + \ldots \tag{18}$$

et

$$X_L(z, t) = \sqrt[L]{X(z, t)} = \frac{\sqrt[L]{E_L(t)}}{z} + \ldots \tag{19}$$

pour $|t-t_0| < h_0$ les branches des radicaux des fonctions (11, 2) et (18, 3) définies dans les entourages correspondants $|w| < \varrho_0$ et $|z| < r_0$, choisies de façon que

$$\sqrt[L]{D_L(t)} / \sqrt[L]{E_L(t)} > 0.$$

Ces branches existent, car, étant donné (4), on a $D_L(t_0) = a_{10}^L E_L(t_0)$; d'autre part, vu (21, 2) et (28, 3) et la remarque que pour t réel $\hat{D}_L(t) = \bar{D}_L(t)$ et $\hat{E}_L(t) = \bar{E}_L(t)$, on a les égalités

$$D_L(t)/\bar{D}_L(t) = D_L(t_0)/\bar{D}_L(t_0),$$

$$E_L(t)/\bar{E}_L(t) = E_L(t_0)/\bar{E}_L(t_0),$$

d'où nous déduisons en définitive que $\arg D_L(t) = \arg E_L(t)$, ce qui rend possible le choix désiré des branches. Nous constatons ensuite facilement, en extrayant les racines des deux membres de l'équation $\Omega(w, t_\nu) = X(z, t_\nu)$, que pour tout ν suffisamment grand, tel que $|t_\nu - t_0| < h_0$, il existe dans un entourage $|z| < r_0^*$, fixé et indépendant de ν, exactement une seule fonction holomorphe $a_\nu(z)$, définie par la formule

$$a_\nu(z) = \Omega_L^{-1}\big(X_L(z, t_\nu), t_\nu\big) = a_{1\nu} z + \ldots, \tag{20}$$

et remplissant les conditions

$$\Omega\big(a_\nu(z), t_\nu\big) = X(z, t_\nu), \qquad a_{1\nu} > 0. \tag{21}$$

Soit r_ν le rayon de convergence de la série du second membre de (20). Puisque la fonction du premier membre de (20) est holomorphe au

moins dans l'entourage fixe $|z| < r_0^*$, et que, en raison de la définition de la suite (17), elle ne peut être holomorphe dans tout le cercle unité, on a toujours $r_0^* \leqslant r_\nu < 1$. La fonction (20), considérée dans le cercle $|z| < r_\nu$, y remplit évidemment la première des conditions (21) et, par suite, elle se prolonge au cercle fermé $|z| \leqslant r_\nu$, (27, $*$). Sur la circonférence $|z| = r_\nu$ il doit évidemment exister un point y_ν, en lequel la fonction (20) n'est pas holomorphe. Si nous posons

$$x_\nu = a_\nu(y_\nu), \tag{22}$$

il est évidént que

$$\Omega'_w(x_\nu, t_\nu) = 0, \tag{23}$$

car dans le cas contraire la fonction (20) serait d'après (21), holomorphe au point y_ν. En extrayant au besoin des suites partielles, nous pouvons admettre l'existence des limites

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu\to\infty} r_\nu = \hat{r} \geqslant r_0^* > 0, \quad \hat{r} \leqslant 1, \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} y_\nu = \hat{y}, \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu(z) = \hat{a}(z) = \hat{a}_1 z + \ldots, \end{array}\right. \tag{24}$$

et dans ce cas $\hat{a}(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < \hat{r}$; cette fonction satisfait dans le cercle mentionné, en vertu de (21), (24) et de la convergence de la suite (17) vers t_0, à la relation

$$\Omega\big(\hat{a}(z), t_0\big) = X(z, t_0) \tag{25}$$

avec $\hat{a}_1 = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_{1\nu} \geqslant 0$ et $\hat{a}_1 = \sqrt[L]{D_L(t_0)}/\sqrt[L]{E_L(t_0)}$, donc, vu l'unicité démontrée ci-dessus, elle est identique à la fonction (3) pour $|z| < \hat{r}$; en outre elle se prolonge évidemment, ainsi que $a_0(z)$, au cercle fermé $|z| \leqslant \hat{r}$. Ensuite, vu (22), (24) et (28, $*$), nous constatons que la limite

$$\hat{x} = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \hat{a}(\hat{y}) = a_0(\hat{y}), \tag{26}$$

existe, d'où, on obtient, d'après (23),

$$\Omega'_w(\hat{x}, t_0) = 0. \tag{27}$$

Les cas suivants sont donc possibles: pour un certain $j = 1, \ldots, n$

$$\hat{x} = \omega_j(t_0) \quad \text{et} \quad \hat{y} = \zeta_j(t_0), \tag{28}$$

ou bien pour un certain $k = 1, \ldots, m'$

$$\hat{x} = w_k(t_0) \quad \text{et} \quad \hat{y} = z_k(t_0), \tag{29}$$

ou enfin pour un certain $l = 0, \ldots, m''$

$$\hat{x} = v_l(t_0) \quad \text{et} \quad |\hat{y}| = 1. \tag{30}$$

Nous disons que dans le cas (28) on doit avoir

$$x_\nu = \omega_j(t_\nu) \tag{31}$$

et

$$y_\nu = \zeta_j(t_\nu) \tag{32}$$

pour ν suffisamment grands. En effet, si $x_\nu \neq \omega_j(t_\nu)$ pour un nombre infini d'indices ν, il résulterait de (15, 2), (23), (26) et (28), de la continuité de la fonction (12, 2) et de la définition de la suite (17) que

$$\Omega'_w\big(\omega_j(t_\nu), t_\nu\big) = 0, \qquad \Omega'_w(x_\nu, t_\nu) = 0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \omega_j(t_0), \qquad \lim_{\nu\to\infty} \omega_j(t_\nu) = \omega_j(t_0),$$

d'où, passant à la limite, $\omega_j(t_0)$ serait une racine au moins double de l'équation $\Omega'_w(w, t_0) = 0$, contrairement au fait que toutes les racines de la dérivée sont simples (comp. la remarque 1, 3, I). De la même façon nous démontrons la relation (32) pour ν suffisamment grands. En effet si $y_\nu \neq \zeta_j(t_\nu)$ pour un nombre infini de ν, la fonction $X(z, t_\nu) - \Omega\big(\omega_j(t_\nu), t_\nu\big)$ aurait, en vertu de (25, 3), (18, 2) et (22, 3), une racine double $\zeta_j(t_\nu)$ et, vu (31), (22) et (21), cette même fonction aurait également une autre racine y_ν; ces racines étant distinctes et tendant, en vertu de la continuité de (19, 3) et en vertu de (24) et (28), vers une limite commune $\zeta_j(t_0)$, le point $\zeta_j(t_0)$ devrait être une racine au moins triple de la fonction $X(z, t_0) - \Omega\big(\omega_j(t_0), t_0\big)$, donc au moins double de la dérivée $X'_z(z, t_0)$, contrairement au fait que toutes les racines de cette dérivée sont simples (comp. la remarque 1, 3, I). De (31) et (32) pour ν suffisamment grand, du fait que $\omega_j(t_\nu)$ et $\zeta_j(t_\nu)$ sont des racines simples des dérivées $\Omega'_w(w, t_\nu)$ et $X'_z(z, t_\nu)$ et des relations (21) et (22) il résulterait que la fonction (20) est, en vertu de (29, $*$), holomorphe au point y_ν, contrairement à l'hypothèse. Ainsi le cas examiné est impossible. De la même façon on prouve que le cas (29) l'est également. Il nous reste donc à démontrer l'impossibilité du cas (30). Raisonnant comme auparavant nous constatons que

$$x_\nu = v_l(t_\nu) \tag{33}$$

pour ν suffisamment grands. Ensuite, en considérant la fonction $X(z, t_\nu) - \Omega\big(v_l(t_\nu), t_\nu\big)$, nous constatons, en vertu de (33), (22) et (21) et de ce que le nombre soustrait est réel, que cette fonction a deux racines différentes y_ν et $1/\bar{y}_\nu$, tendant, vu (24), vers la même limite $\hat{y}$; d'où nous déduisons que $\hat{y}$ est une racine au moins double de la fonction limite

$X(z, t_0) - \Omega\big(v_l(t_0), t_0\big)$, donc également une racine de la dérivée $X'_z(z, t_0)$, c'est-à-dire on doit avoir $X(\hat{y}, t_0) - \Omega\big(v_l(t_0), t_0\big) = 0$ et $X'_z(\hat{y}, t_0) = 0$. Donc

$$\hat{y} = u_h(t_0), \tag{33'}$$

où h est l'un des nombres $1, \ldots, m''+1$. Puisque l'on a ensuite, en vertu de (28, $*$),

$$x_\nu = a_\nu(y_\nu) \to a_0\big(u_h(t_0)\big),$$

il s'ensuit, vu (26) et (30), que

$$v_l(t_0) = a_0\big(u_h(t_0)\big);$$

de ce qui précède et de (4), (20, 2) et (27, 3), nous tirons que

$$\Omega\big(v_l(t_0), t_0\big) = \Omega\big(a_0\big(u_h(t_0)\big), t_0\big) = X\big(u_h(t_0), t_0\big), \tag{34}$$

$$\Omega\big(v_l(t_0), t_0\big) = \Omega(v_l), \tag{35}$$

$$X\big(u_h(t_0), t_0\big) = \Omega(v_h), \tag{36}$$

donc

$$\Omega(v_l) = \Omega(v_h), \tag{37}$$

d'où nous déduisons que $h = l$, car les valeurs de la fonction $\Omega(w)$ pour tous les zéros de sa dérivée, situés sur la circonférence unité et sa valeur à l'extrémité de l'arc H sont toutes distinctes, (comp. la condition (e) du lemme 1, 1). En particulier, il résulte de là que le cas $\hat{x} = v_0(t_0)$ n'est pas possible, car $h > 0$. Dans le cas où l est l'un des nombres $1, \ldots, m''$, on a, conformément à (33'),

$$\hat{y} = u_l(t_0).$$

Revenant à présent à la fonction $X(z, t_\nu) - \Omega\big(v_l(t_\nu), t_\nu\big)$, nous constatons, en vertu de (33), (22), (21) et (27, 3) (20, 2) et de la continuité de $u_l(t)$, qu'elle a trois racines différentes y_ν, $1/\bar{y}_\nu$ et $u_l(t_\nu)$ tendant vers une limite $u_l(t_0)$. Le point $u_l(t_0)$ devrait donc être une racine au moins triple de la fonction $X(z, t_0) - \Omega\big(v_l(t_0), t_0\big)$, donc au moins double de sa dérivée $X'_z(z, t_0)$, ce qui n'a pas lieu (comp. la remarque 1, 3, I). Le cas (30) est donc aussi impossible pour $l = 1, \ldots, m''$.

L'impossibilité de tous les cas (28), (29) et (30) prouve, vu la supposition contraire, l'existence dans un certain intervalle $(t_0 - h, t_0 + h)$ d'une fonction algébrique spéciale de la forme (8), remplissant les conditions (9) partout dans le cercle unité.

L'unicité de la fonction (8) résulte de la première partie de la conclusion.

Le fait que la condition initiale (13) est remplie est une conséquence de l'unicité.

Du fait que les fonctions $\Omega(w, t)$ et $X(z, t)$ sont holomorphes et du théorème correspondant sur l'analycité des fonctions implicites ou bien de la représentation (16′), il résulte facilement que la fonction (8) est holomorphe par rapport à t.

Démontrons maintenant que pour h suffisamment petit la fonction (8) vérifie également les relations (10), (11) et (12). Supposons le contraire, p. ex. admettons qu'il existe un l parmi les nombres $1, \ldots, m''$ et une suite de valeurs du paramètre t,

$$t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

tendant vers t_0, tels que

$$a\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big) \neq v_l(t_\nu). \tag{38}$$

Alors, en posant

$$\xi_\nu = a\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big), \tag{39}$$

nous tirons de (9) et (39) que

$$\Omega(\xi_\nu, t_\nu) - X\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big) = 0. \tag{40}$$

D'autre part, en vertu de (27, 3), (20, 2) et (17, 2), il vient

$$\Omega\big(v_l(t_\nu), t_\nu\big) - X\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big) = 0 \tag{41}$$

et

$$\Omega'_w\big(v_l(t_\nu), t_\nu\big) = 0. \tag{42}$$

Enfin, comme (39) et (13), (28, $*$), (7) et la continuité des fonctions correspondantes (14, 2), (11, 2), (18, 3), (21, 3), entraînent

$$\xi_\nu \to a_0\big(u_l(t_0)\big) = v_l(t_0),$$

$$v_l(t_\nu) \to v_l(t_0),$$

$$\Omega(w, t_\nu) - X\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big) \to \Omega(w, t_0) - X\big(u_l(t_0), t_0\big),$$

il résulterait de (40), (41) et (42) que $v_l(t_0)$ est une racine au moins double de la dérivée $\Omega'_w(w, t_0)$, ce qui n'a pas lieu. Il en est de même dans le cas des relations (10) et (11).

De ce fait la démonstration est achevée.

Lemme 2. *Dans chaque intervalle* $\langle -T, T\rangle \subset (-T_0, T_0)$ *il existe, déterminée d'une façon unique, une famille de fonctions du type* (8), *holomorphes par rapport à* t, *remplissant les conditions* (9), *les conditions* (10), (11) *et* (12) *et la condition*

$$a(z, 0) = a(z), \tag{43}$$

où $a(z)$ *est la fonction* (11, 1).

Démonstration. Considérons une classe $\mathscr{K}$ d'intervalles fermés $\langle -\tau_1, \tau_2\rangle \subset \langle -T, T\rangle$, $\tau_1, \tau_2 \geqslant 0$, dans lesquels on peut former, conformément à la première partie du lemme 1, une famille de fonctions du type (8) remplissant les conditions (9), les conditions (10), (11), (12) et la condition initiale (43). Cette classe n'est pas vide, car elle contient l'intervalle $\langle 0, 0\rangle$ dans lequel la fonction (11, 1) forme la famille mentionnée. Désignons par $\{-\tau_1, \tau_2\}$ l'intervalle qui est la somme de tous les intervalles de la classe examinée. De l'unicité des fonctions (1) remplissant les conditions (2) il résulte directement d'une façon connue que dans l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\}$ on peut former une famille de fonctions du type (8) remplissant les conditions (9), les conditions (10), (11), (12) et la condition (43).

Démontrons à présent que la famille de fonctions mentionnée plus haut dans l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\}$ peut être prolongée comme famille de fonctions du type (8), en respectant les conditions (9)-(12) et (43), à l'intervalle fermé $\langle -\tau_1, \tau_2\rangle$. Démontrons en premier lieu que ce prolongement peut être fait à l'intervalle fermé à droite $\{-\tau_1, \tau_2\rangle$.

Prenons à cet effet une suite arbitraire de valeurs du paramètre t:

$$t_\nu \to \tau_2,$$

telle que la suite $\{a(z, t_\nu)\}$ soit convergente vers une certaine limite

$$\hat{a}(z) = \hat{a}_1 z + \ldots, \qquad z \in K(0, 1),\ \hat{a}_1 \geqslant 0, \tag{44}$$

ce qui est possible, car la suite $\{a(z, t_\nu)\}$, étant bornée, est normale (comp. (30, $*$)). La fonction (44) est donc algébrique spéciale et remplit les conditions limites

$$\Omega\big(\hat{a}(z), \tau_2\big) = X(z, \tau_2) \quad \text{pour } z \in K(0, 1),\ \hat{a}_1 > 0, \tag{45}$$

$$\hat{a}\big(\zeta_j(\tau_2)\big) = \omega_j(\tau_2), \tag{46}$$

$$\hat{a}\big(z_k(\tau_2)\big) = w_k(\tau_2), \tag{47}$$

$$\hat{a}\big(u_l(\tau_2)\big) = v_l(\tau_2), \qquad l \neq m''+1. \tag{48}$$

La fonction (44) remplit donc, comme il est facile de le constater, les conditions du lemme 1 pour $t_0 = \tau_2$, $-T_0 < \tau_2 < T_0$. Pour h suffisamment petit il existe donc, pour tout t de l'intervalle $(\tau_2 - h, \tau_2 + h)$, une fonction algébrique spéciale, déterminée d'une façon unique, holomorphe par rapport à t, de la forme

$$\hat{a}(z, t) = \hat{a}_1(t) z + \ldots, \qquad z \in K(0, 1), \tag{49}$$

qui remplit les conditions

$$\Omega\big(\hat{a}(z, t), t\big) = X(z, t) \quad \text{pour } z \in K(0, 1),\ \hat{a}_1(t) > 0, \tag{50}$$

les conditions

$$\hat{a}\big(\zeta_j(t), t\big) = \omega_j(t), \tag{51}$$

$$\hat{a}\big(z_k(t), t\big) = w_k(t), \tag{52}$$

$$\hat{a}\big(u_l(t), t\big) = v_l(t), \quad l \neq m''+1, \tag{53}$$

et la condition initiale

$$\hat{a}(z, \tau_2) = \hat{a}(z). \tag{54}$$

Considerons maintenant la partie commune des intervalles $\{-\tau_1, \tau_2\}$ et $(-\tau_2-h, \tau_2+h)$. Dans cette partie deux familles de fonctions (8) et (49) remplissent les conditions (2) du lemme 1. Alors, en vertu de la première partie de ce lemme, nous avons

$$a(z, t) = \hat{a}(z, t). \tag{55}$$

Comme la famille (49) est holomorphe par rapport à t au point τ_2, la famille (8) peut, en vertu de (55), être prolongée de l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\}$ à l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\rangle$, comme famille holomorphe par rapport à t, en respectant les conditions (9), les conditions (10), (11), (12) et la condition (43).

On constate de la même façon qu'il est possible de prolonger la famille (8), en respectant les propriétés et les conditions mentionnées, de l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\}$ à l'intervalle fermé à gauche $\langle-\tau_1, \tau_2\}$.

Ainsi nous avons démontré qu'on peut prolonger la famille (8) à l'intervalle fermé $\langle-\tau_1, \tau_2\rangle$, comme famille holomorphe par rapport à t, en respectant les conditions (9)-(12) et (43).

De cette façon on a évidemment $\{-\tau_1, \tau_2\} = \langle-\tau_1, \tau_2\rangle$.

Il est facile de constater que $\langle-\tau_1, \tau_2\rangle = \langle-T, T\rangle$. En effet, si p. ex. $\tau_2 < T$, il existerait dans la classe $\mathscr{K}$ des intervalles un intervalle plus large qui ne se contiendrait pas dans l'intervalle $\langle-\tau_1, \tau_2\rangle$, ce qui évidemment n'est pas possible: ce serait p. ex. tout intervalle fermé $\langle-\tau_1, \tau_2+h'\rangle$, où $0 < h' < h$, et la famille de fonctions du type (8), remplissant les conditions (9)-(12) et (43), serait la famille des fonctions définies par les formules

$$\check{a}(z, t) = \begin{cases} a(z, t), & \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \\ \hat{a}(z, t), & \tau_2 \leqslant t \leqslant \tau_2+h'. \end{cases}$$

Ainsi la démonstration est achevée.

COROLLAIRE. *Dans l'intervalle* $(-T_0, T_0)$ *existe, déterminée d'une façon unique, une famille de fonctions du type* (8), *holomorphes par rapport à* t, *remplissant les conditions* (9), *les conditions* (10), (11) *et* (12) *et la condition*

$$a(z, 0) = a(z), \tag{56}$$

où $a(z)$ *est la fonction* (11, 1).

Démonstration. Il suffit ici de remarquer que l'intervalle $(-T_0, T_0)$ est la somme de tous les intervalles fermés $\langle -T, T\rangle$ contenus dans cet intervalle, et de profiter de l'unicité des fonctions (1) qui remplissent la condition (2).

LEMME 3. *La famille de fonctions du type* (8) *dont il est question dans le lemme* 2 *et dans la conclusion de ce lemme, vérifie dans l'intervalle* $(-T_0, T_0)$ *l'équation*

$$(57)\qquad a_t'(z,t) = \sum_{j=1}^{n}\Bigg\{\beta_j(t)\Bigg[\left(\zeta_j(t)\frac{a_z'(\zeta_j(t),t)}{a(\zeta_j(t),t)}\right)^2 a(z,t)\frac{a(\zeta_j(t),t)+a(z,t)}{a(\zeta_j(t),t)-a(z,t)} -$$

$$-z a_z'(z,t)\frac{\zeta_j(t)+z}{\zeta_j(t)-z}\Bigg] + \bar{\beta}_j(t)\Bigg[\overline{\left(\zeta_j(t)\frac{a_z'(\zeta_j(t),t)}{a(\zeta_j(t),t)}\right)^2}\times$$

$$\times a(z,t)\frac{1+\overline{a(\zeta_j(t),t)}\,a(z,t)}{1-\overline{a(\zeta_j(t),t)}\,a(z,t)} - z a_z'(z,t)\frac{1+\overline{\zeta_j(t)}z}{1-\overline{\zeta_j(t)}z}\Bigg]\Bigg\},$$

où l'on a pris

$$(57')\qquad \beta_j(t) = iB_j(t).$$

Démonstration. Dérivons d'abord l'identité (9) successivement par rapport à t et à z; nous obtenons les relations

$$(58)\qquad \Omega_w'\big(a(z,t),t\big)a_t'(z,t) + \Omega_t'\big(a(z,t),t\big) = X_t'(z,t),$$

$$(58')\qquad \Omega_w'\big(a(z,t),t\big)a_z'(z,t) = X_z'(z,t).$$

Si à présent $z \in K(0,1)$ et diffère des points (19, 3) et (20, 3), alors, à cause de (10), (11) et de l'univalence des fonctions (8), $\Omega_w'\big(a(z,t),t\big) \neq 0$ et évidemment $X_z'(z,t) \neq 0$ et $a_z'(z,t) \neq 0$. Divisant ensuite pour ces mêmes z (58) par (58') et multipliant la relation ainsi obtenue par $a_z'(z,t)$, nous avons

$$a_t'(z,t) = \frac{X_t'(z,t)}{X_z'(z,t)}a_z'(z,t) - \frac{\Omega_t'\big(a(z,t),t\big)}{\Omega_w'\big(a(z,t),t\big)},$$

d'où, en vertu de (31, 2) et (36, 3), du fait que $\hat{A}_j(t) = \bar{A}_j(t)$, $\hat{B}_j(t) = \bar{B}_j(t)$, $\hat{\omega}_j(t) = \bar{\omega}_j(t)$ et $\hat{\zeta}_j(t) = \bar{\zeta}_j(t)$ pour t réel, et de (10), nous obtenons

$$(59)\qquad a_t'(z,t) = iza_z'(z,t)\sum_{j=1}^{n}\left(B_j(t)\frac{z+\zeta_j(t)}{z-\zeta_j(t)} + \bar{B}_j(t)\frac{1+\bar{\zeta}_j(t)z}{1-\bar{\zeta}_j(t)z}\right) -$$

$$-ia(z,t)\sum_{j=1}^{n}\left(A_j(t)\frac{a(z,t)+a(\zeta_j(t),t)}{a(z,t)-a(\zeta_j(t),t)} + \bar{A}_j(t)\frac{1+\overline{a(\zeta_j(t),t)}\,a(z,t)}{1-\overline{a(\zeta_j(t),t)}\,a(z,t)}\right)$$

pour z différents de (19, 3) et (20, 3). Multipliant ensuite les deux membres de (59) par $z-\zeta_j(t)$, où j est fixé, et passant à la limite pour $z \to \zeta_j(t)$, nous avons

$$A_j(t) = B_j(t)\left(\zeta_j(t)\frac{a_z'(\zeta_j(t), t)}{a(\zeta_j(t), t)}\right)^2. \tag{60}$$

Mettant enfin dans (59) au lieu de $A_j(t)$ le second membre de (60), nous obtenons (57) pour $z \in K(0, 1)$ et différents des points (19, 3) et (20, 3). La relation (57) a lieu également en ces points, puisque ces deux membres sont continus partout dans le cercle unité.

Soulignons que ce qui a été dit des fonctions $a(z)$, $\Omega(w, t)$, $X(z, t)$, $\omega_j(t)$, $1/\hat{\omega}_j(t)$, $w_k(t)$, $1/\hat{w}_k(t)$, $v_l(t)$, $\zeta_j(t)$, $1/\hat{\zeta}_j(t)$, $z_k(t)$, $1/\hat{z}_k(t)$, $u_l(t)$, $A_j(t)$, $\hat{A}_j(t)$, $B_j(t)$, $\hat{B}_j(t)$, $\psi(y, t)$ et $\varphi(x, t)$, s'applique, conformément à la convention adoptée au début, aussi aux fonctions analogues de 1, 2 et 3, dépendant de l'indice f. Dans la suite nous profiterons de ces formules, en indiquant explicitement que les fonctions mentionnées et les autres qui leur sont liées dépendent de l'indice f.

5. PASSAGE À LA LIMITE ET DÉDUCTION DE LA FORMULE FONDAMENTALE

Examinons à présent les expressions $\Omega_f(w, t)$ et $X_f(z, t)$, introduites dans 2 et 3, pour f suffisamment grands et pour $|t| < T_0 = \min(U, V)$.

En vertu de 4 il existe pour tout f fixé et pour t réel de l'intervalle $-T_0 < t < T_0$ une fonction intérieure

$$a_f(z, t) = a_{1f}(t)z+\ldots, \qquad z \in K(0, 1),\ a_{1f}(t) > 0, \tag{1}$$

holomorphe par rapport à t, vérifiant l'équation correspondante

$$\Omega_f\big(a_f(z, t), t\big) = X_f(z, t), \tag{2}$$

avec la condition

$$a_f(z, 0) = a_f(z). \tag{3}$$

En vertu de 2 et 3, il existe pour $\Omega_f(w, t)$ resp. $X_f(z, t)$ des fonctions

$$w = \psi_f(y, t), \tag{4}$$

resp.

$$z = \varphi_f(x, t), \tag{5}$$

définies et holomorphes au moins pour les variables $y \in Y$, $|t| < T_0$, resp. $x \in X$, $|t| < T_0$ qui sont, comme fonctions de la variable t, solutions des équations différentielles

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -iw\sum_{j=1}^{n}\left(A_{jf}(t)\frac{w+\omega_{jf}(t)}{w-\omega_{jf}(t)} + \hat{A}_{jf}(t)\frac{1+\hat{\omega}_{jf}(t)w}{1-\hat{\omega}_{jf}(t)w}\right), \tag{6}$$

resp.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -iz \sum_{j=1}^{n} \left(B_{jf}(t) \frac{z+\zeta_{jf}(t)}{z-\zeta_{jf}(t)} + \hat{B}_{jf}(t) \frac{1+\hat{\zeta}_{jf}(t)z}{1-\hat{\zeta}_{jf}(t)z} \right), \tag{7}$$

avec les conditions initiales

$$w = y \quad \text{pour } t = 0, \tag{8}$$

resp.

$$z = x \quad \text{pour } t = 0. \tag{9}$$

Les fonctions (4) et (5) sont pour t, $|t| < T_0$, arbitraire, fixé, univalentes comme fonctions des variables y resp. x dans les domaines Y resp. X.

En même temps, pour t, $|t| < T_0$, arbitraire, fixé, et pour $x \in X$ variable l'image du domaine X par la fonction (5) couvre le domaine Z. Il existe donc une fonction

$$x = \varphi_f^{-1}(z, t), \tag{10}$$

inverse de (5) au moins pour $z \in Z$. Cette fonction est holomorphe pour $z \in Z$, $|t| < T_0$ et elle vérifie l'inégalité

$$|\varphi_f^{-1}(z, t) - z| \leqslant M_2 |t|. \tag{11}$$

Enfin les fonctions (4) resp. (5) satisfont aux relations

$$\Omega_f\big(\psi_f(y, t), t\big) = \Omega_f(y), \tag{12}$$

resp.

$$X_f\big(\varphi_f(x, t), t\big) = X_f(x) \tag{13}$$

pour $y \in Y$, $|t| < T_0$ resp. $x \in X$, $|t| < T_0$.

Comme les suites de fonctions holomorphes

$$\{\omega_{jf}(t)\}, \quad \{\hat{\omega}_{jf}(t)\}, \quad \{A_{jf}(t)\}, \quad \{\hat{A}_{jf}(t)\}, \tag{14}$$

resp.

$$\{\zeta_{jf}(t)\}, \quad \{\hat{\zeta}_{jf}(t)\}, \quad \{B_{jf}(t)\}, \quad \{\hat{B}_{jf}(t)\}, \tag{15}$$

figurant dans les équations (6) resp. (7), considérées pour $|t| < T_0$, sont bornées, d'après (22, 2) et (27, 2) resp. (29, 3) et (34, 3), nous pouvons supposer qu'elles convergent presque uniformément vers des limites

$$\omega_j(t), \quad \hat{\omega}_j(t), \quad A_j(t), \quad \hat{A}_j(t), \tag{14'}$$

resp.

$$\zeta_j(t), \quad \hat{\zeta}_j(t), \quad B_j(t), \quad \hat{B}_j(t), \tag{15'}$$

holomorphes pour $|t| < T_0$. Alors les suites des solutions (4) resp. (5), considérées dans les domaines

$$\{y, t\colon\ y \in Y,\ |t| < T_0\}, \tag{16}$$

resp.

$$\{x, t\colon\ x \in X,\ |t| < T_0\}, \tag{17}$$

convergent presque uniformément vers les fonctions

$$w = \psi(y, t), \tag{18}$$

resp.

$$z = \varphi(x, t), \tag{19}$$

holomorphes dans ces domaines, qui sont, comme fonctions de la variable t, solutions des équations

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -iw \sum_{j=1}^{n} \left(A_j(t) \frac{w + \omega_j(t)}{w - \omega_j(t)} + \hat{A}_j(t) \frac{1 + \hat{\omega}_j(t) w}{1 - \hat{\omega}_j(t) w} \right), \tag{20}$$

resp.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -iz \sum_{j=1}^{n} \left(B_j(t) \frac{z + \zeta_j(t)}{z - \zeta_j(t)} + B_j(t) \frac{1 + \hat{\zeta}_j(t) z}{1 - \hat{\zeta}_j(t) z} \right), \tag{21}$$

avec les conditions initiales

$$w = y \quad \text{pour } t = 0, \tag{22}$$

resp.

$$z = x \quad \text{pour } t = 0. \tag{23}$$

En effet, la convergence des suites (14) resp. (15) vers (14′) resp. (15′) entraîne facilement que les seconds membres de (6) resp. (7) convergent presque uniformément vers les seconds membres (20), resp. (21), dans (16) resp. (17). Ensuité, de même que dans 3, I, il résulte de (22, 2) et (27, 2) resp. (29, 3) et (34, 3) et des définitions des domaines Y et X, que les seconds membres (6) resp. (7) sont bornés uniformément par les nombres $\frac{48}{\varrho^3} nC_1A$ resp. $\frac{48}{\tau^3} nC_2B$. L'application de la méthode des fonctions majorantes [10], p. 16-29, montre également que les solutions (4) resp. (5) sont bornées uniformément dans les domaines (16) resp. (17), donc elles forment des suites normales. Ce qui précède, conjointement avec l'unicité des solutions des équations (20), (22) resp. (21), (23) et avec le fait simple que les limites des suites partielles arbitraires, extraites des suites des solutions (4) resp. (5), sont solutions des équations limites (20) resp. (21), mène de façon connue à la remarque précédente.

Les fonctions (18) et (19) sont évidemment, pour t arbitraire, fixé, des fonctions univalentes comme fonctions de y resp. x dans les domaines Y resp. X (comp. [10], p. 97).

En même temps, pour t arbitraire, fixé, et pour $x \in X$ variable l'image du domaine X par la fonction (19) couvre le domaine Z. Il existe donc au moins pour $z \in Z$ une fonction

$$x = \varphi^{-1}(z, t) \tag{24}$$

inverse de (19). Cette fonction est holomorphe pour $z \in Z$, $|t| < T_0$, elle satisfait à l'inégalité

$$|\varphi^{-1}(z, t) - z| \leqslant M_2 |t| \tag{25}$$

et

$$\varphi^{-1}(z, t) \in K^*(0, 1) \quad \text{pour } z \in K^*(0, 1) \text{ et } t \text{ réel, } t \in (-T_0, T_0), \tag{26}$$

$$\varphi^{-1}(z, t) \in K(0, 1) \quad \text{pour } z \in K(0, 1) \text{ et } t \text{ réel, } t \in (-T_0, T_0). \tag{27}$$

En continuant, nous observons que la suite des fonctions inverses (10), considérées dans le domaine

$$\{z, t\colon z \in Z, |t| < T_0\}, \tag{28}$$

converge presque uniformément vers la fonction (24).

En effet, de la convergence en tout point des fonctions (5), admettant des inverses, vers la limite inversible (19), il résulte d'une façon évidente la convergence en tout point des fonctions inverses (10) vers la fonction inverse (24); la suite des fonctions (10) étant normale, car les valeurs des fonctions (10) appartiennent à l'ensemble borné X, la convergence mentionnée est presque uniforme, [18], p. 52.

Remarquons à présent que la frontière G^* du domaine $G = b\big(K(0, 1)\big)$ est située dans le domaine Y, donc la distance $\varrho(G^*, Y')$ est positive. Remarquons ensuite que l'univalence de la fonction $b(z)$ entraîne immédiatement qu'il existe un anneau R tangent intérieurement à la circonférence $K^*(0, 1)$, assez étroit pour que $R \subset X$ et que son image $b(R)$ est arbitrairement proche de la frontière G^* au sens de Hausdorff, et, par suite, $\overline{b(R)} \subset Y$. Remarquons enfin que, vu (26), (27) et (25), il existe pour la fonction (24) un entourage réel $I^* = (-T^*, T^*)$, $T^* < T_0$, du point $t = 0$, assez petit et un anneau ouvert $P = \{z\colon r_0 < |z| < 1\} \subset Z$, assez étroit pour que

$$\varphi^{-1}(z, t) \in R \tag{29}$$

dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in P, t \in I^*\}. \tag{30}$$

En nous basant sur ce qui précède, nous pouvons définir dans l'ensemble (30) la fonction

$$\hat{b}(z, t) = \psi\Big(b\big(\varphi^{-1}(z, t)\big), t\Big). \tag{31}$$

Mais, en vertu de ce qui a été dit plus haut, la fonction (24) est définie au moins dans l'ensemble ouvert des variables complexes

$$\{z, t\colon z \in P,\ |t| < T^*\}, \tag{32}$$

contenant l'ensemble (30); ensuite, comme l'image de ce dernier par la fonction (24) est, en vertu de (29), contenue dans R, on peut trouver un ensemble ouvert E des variables complexes z et t, contenu dans l'ensemble (32) et contenant l'ensemble (30), tel que la relation (29) ait lieu également dans l'ensemble E, plus large que (30).

En même temps, d'après ce qui précède, la fonction (18) est définie au moins dans l'ensemble des variables complexes

$$\{y, t\colon y \in b(R),\ |t| < T^*\}. \tag{33}$$

Récapitulant ce qui précède, nous constatons que le second membre de (31) est défini et holomorphe au moins dans l'ensemble E et dans la suite nous allons considérer la fonction (31) dans cet ensemble.

Remarquons enfin que, vu (31), (22) et (23), on a

$$\hat{b}(z, 0) = b(z). \tag{34}$$

Soit maintenant $K^*(0, r)$, où $r_0 < r < 1$, une circonférence arbitraire, fixée, située dans P et soit $I = (-T, T)$ un entourage arbitraire, réel du point $t = 0$, contenu avec sa fermeture dans l'entourage précédent I^*. Nous avons alors pour la fonction (1) la représentation

$$a_f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K^*(0,r)} \frac{a_f(\mathfrak{z}, t)}{\mathfrak{z} - z}\, d\mathfrak{z} \tag{35}$$

pour $z \in K(0, r)$, $t \in I$ et pour tout f. D'autre part, désignant par $\varepsilon(r)$ la distance euclidienne de l'ensemble $\{z, t\colon z \in K^*(0, r),\ t \in \bar{I}\}$ à la frontière de l'ensemble E, nous voyons que la fonction (31) est, pour tout $z \in K^*(0, r)$ fixé, holomorphe par rapport à la variable complexe t dans le rectangle ouvert $Q(r)$ de côtés parallèles aux axes de coordonnées, à la médiane I et à la hauteur $\frac{2}{3}\varepsilon(r)$.

Posons

$$S_r = \{z, t\colon z \in K^*(0, r),\ t \in \overline{Q(r)}\}. \tag{36}$$

Nous avons d'abord, vu la définition de l'ensemble S_r,

$$S_r \subset E \tag{37}$$

et, par conséquent, vu la définition de l'ensemble E et (12, $*$),

$$\varphi^{-1}(S_r) \subset \varphi^{-1}(E) \subset R. \tag{38}$$

Les fonctions (10) étant définies au moins dans l'ensemble (32) et y tendant presque uniformément vers la limite (24), les images $\varphi_f^{-1}(S_r)$

de l'ensemble fermé (36), contenu dans (32), tendent dans le sens de Hausdorff vers l'image $\varphi^{-1}(S\ ) = \overline{\varphi^{-1}(S_r)} \subset R$; par conséquent, pour f suffisamment grand les images $\varphi_f^{-1}(S_r)$ sont contenues dans un ensemble fermé $R_1 \subset R$. En même temps, vu la convergence (14, 1), les images $a_f(R_1)$ tendent dans le sens de Hausdorff vers l'image $F_1 = b(R_1) = \overline{b(R_1)} \subset b(R)$ et, par conséquent, pour f suffisamment grand les images $a_f(R_1)$ sont contenues dans un ensemble fermé $F_2 \subset b(R)$. Enfin les fonctions (4) sont définies au moins dans l'ensemble (33).

Récapitulant ce qui précède, nous constatons en définitive que pour f suffisamment grand les fonctions composées

$$\hat{b}_f(z, t) = \psi_f\big(a_f(\varphi_f^{-1}(z, t), t)\big) \tag{39}$$

sont définies au moins dans l'ensemble fermé S_r; comme $\varphi_f^{-1}(z, t)$, $a_f(\zeta)$ et $\psi_f(y, t)$ sont définies resp. au moins dans les ensembles ouverts E, $K(0, 1)$ et (33), contenant resp. S_r, R et $\{y, t\colon y \in F_2, |t| < T^*\}$, il est facile de constater que les fonctions (39) sont définies au moins dans un ensemble ouvert $\mathfrak{S}_r$ tel que $S_r \subset \mathfrak{S}_r \subset E$ et, de même que la fonction (31), elles sont holomorphes dans $\mathfrak{S}_r$; par conséquent, ce qui suffira dans la suite, elles sont continues dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K^*(0, r), t \in Q(r)\} \subset S_r \subset \mathfrak{S}_r \tag{40}$$

et holomorphes par rapport à t pour z fixé. En même temps, de la convergence presque uniforme des suites des fonctions $\varphi_f^{-1}(z, t)$, $a_f(\zeta)$ et $\psi_f(y, t)$ resp. dans les ensembles E, $K(0, 1)$ et (33) resp. vers les limites $\varphi^{-1}(z, t)$, $b(\zeta)$ et $\psi(y, t)$, il résulte que

$$\hat{b}_f(z, t) \to \hat{b}(z, t) \tag{41}$$

presque uniformément dans $\mathfrak{S}_r$; par conséquent, la convergence (41) est uniforme dans S_r et, à plus forte raison, dans l'ensemble (40). De plus, dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K^*(0, r), t \in \bar{I}\} \subset S_r \subset \mathfrak{S}_r \tag{42}$$

l'égalité

$$\hat{b}_f(z, t) = a_f(z, t) \tag{43}$$

a lieu.

En effet, vu (39), (12), (4, 3) et (13),

$$\begin{aligned} \Omega_f\big(b_f(z, t), t\big) &= \Omega_f\Big(\psi_f\big(a_f(\varphi_f^{-1}(z, t)), t\big)\Big) = \Omega_f\big(a_f(\varphi_f^{-1}(z, t))\big) \\ &= X_f\big(\varphi_f^{-1}(z, t)\big) = X_f\big(\varphi_f(\varphi_f^{-1}(z, t), t), t\big) = X_f(z, t) \end{aligned} \tag{44}$$

et, vu (39), (9), (8) et (43, 4), on a

$$\hat{b}_f(z, 0) = a_f(z, 0); \tag{45}$$

d'où l'on déduit que pour tout $z \in K^*(0, r)$, fixé, tel que $\Omega'_{fw}(\hat{b}_f(z, 0), 0) \neq 0$, en vertu de (44), (2) et (45) et du théorème sur l'unicité des fonctions implicites, aura lieu l'égalité (43), d'abord pour les t de l'intervalle $\bar{I}$ suffisamment proches de zéro, et ensuite, à cause de l'analycité des deux membres par rapport à t dans cet intervalle, l'égalité (43) aura lieu dans tout l'intervalle; enfin, pour $z \in K^*(0, r)$ tel que

$$\Omega'_{fw}(\hat{b}_f(z, 0), 0) = 0, \tag{46}$$

l'égalité (43) résulte de ce qui précède, de la continuité des deux membres de (43) et du fait que l'ensemble des points où a lieu (46) est isolé.

Considerons maintenant l'expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r)} \frac{\hat{b}_f(\mathfrak{z}, t)}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z} \tag{47}$$

dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K(0, r), t \in Q(r)\}; \tag{48}$$

nous déduisons facilement des propriétés de la fonction (39) dans l'ensemble (40) que l'expression examinée (47) est une fonction holomorphe des variables z et t dans l'ensemble (48). En outre la convergence uniforme (41) dans (40) entraîne immédiatement que la suite (47) converge presque uniformément vers l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r)} \frac{\hat{b}(\mathfrak{z}, t)}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z}. \tag{49}$$

L'expressions (49) est évidemment une fonction holomorphe au moins dans l'ensemble (48).

D'autre part, nous observons que pour $z \in K(0, r)$ et $t \in Q(r)$, réel, c.-à-d. dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K(0, r), t \in I\}, \tag{50}$$

on a, vu (43) et (35),

$$a_f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r)} \frac{\hat{b}_f(\mathfrak{z}, t)}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z}. \tag{51}$$

Mais, puisque la suite des expressions (47) est, comme on l'a constaté plus haut, convergente presque uniformément dans (48), la suite (1) est convergente, pour tout $t \in I$, fixé, en tout point du cercle $K(0, r)$. Donc, comme les fonctions (1) sont pour $t \in I$, fixé, définies, univalentes et bornées dans tout le cercle $K(0, 1)$ et, par conséquent, y forment une suite normale, il résulte, en définitive, de ce qui précède et de la convergence de la suite

(1) aux points du cercle $K(0, r)$, que pour $t \in I$, fixé, la suite (1) converge presque uniformément dans tout le cercle $K(0, 1)$ vers une fonction

$$b(z, t) = b_1(t)z + \ldots, \tag{52}$$

définie dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K(0, 1), t \in I\}, \tag{53}$$

univalente et bornée comme fonction de z pour t fixé.

Il résulte de la formule (51) et des convergences de (1) vers (52) et de (47) vers (49), établies plus haut, qu'on peut écrire la fonction (52) dans l'ensemble (50) sous la forme

$$b(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r)} \frac{\hat{b}(\mathfrak{z}, t)}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z}. \tag{54}$$

Mais, comme on l'a remarqué, les expressions (47) et (49) étant des fonctions holomorphes des variables z et t de l'ensemble (48), les formules (51) et (54) permettent de prolonger les fonctions (1) et (52) comme fonctions holomorphes également à l'ensemble (48); de plus, prenant les prolongements, mentionnés plus haut, pour tous les ensembles (48) correspondant aux nombres r, $r_0 < r < 1$, nous remarquons qu'ils déterminent dans la somme de ces ensembles

$$\bigcup_{r_0 < r < 1} \{z, t\colon z \in K(0, r), t \in Q(r)\} \supset \{z, t\colon z \in K(0, 1), t \in I\} \tag{55}$$

certaines fonctions holomorphes qui sont les prolongements des fonctions (1) et (52). Ces fonctions sont ainsi définies d'une façon univoque. En effet, désignant par $b_r(z, t)$ la fonction définie par la formule (54), prenons deux valeurs différentes $r_1 < r_2$ et soit z, t un point fixé du produit $\{z, t\colon z \in K(0, r_1), t \in Q(r_1)\} \cap \{z, t\colon z \in K(0, r_2), t \in Q(r_2)\}$; alors $z \in K(0, r_1) \cap \cap K(0, r_2)$ et $t \in Q(r_1) \cap Q(r_2)$ et, vu (54) et les égalités des intégrales curvilignes correspondantes, on a

$$b_{r_2}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r_2)} \frac{\hat{b}(\mathfrak{z}, t)}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r_1)} \frac{\hat{b}(\mathfrak{z}, t)}{\mathfrak{z} - z} d\mathfrak{z} = b_{r_1}(z, t),$$

ce qui prouve l'unicité des prolongements mentionnés des fonctions (52) à la somme (55). On peut faire le même raisonnement pour les fonctions (1), en y remplacant la formule (54) par la formule (51). Les fonctions (1) et (52), ainsi prolongées à l'ensemble ouvert (55), seront désignées dans la suite par les mêmes symboles $a_l(z, t)$ et $b(z, t)$.

Nous prouverons à présent que la fonction $b(z, t)$ de (52) remplit les conditions de notre théorème.

En effet, le fait que la fonction $b(z, t)$ est univalente, bornée et holomorphe a déjà été prouvé plus haut.

La condition (3, 0) est réalisée comme conséquence immédiate de (34) et (54).

Il ne nous reste plus qu'à prouver que dans l'ensemble (53) a lieu l'égalité (4, 0) ainsi que les conditions supplémentaires concernant les propriétés des fonctions $\zeta_j(t)$ et $\beta_j(t)$.

A cet effet remarquons, en premier lieu, que la convergence presque uniforme dans (48) de la suite (47) vers (49), entraîne que pour les fonctions prolongées (1) et (52) a lieu la convergence presque uniforme

$$a_f(z, t) \to b(z, t) \tag{56}$$

dans (48) pour tout r, $r_0 < r < 1$, d'où il résulte facilement que (56) a lieu presque uniformément dans la somme (55), Remarquons ensuite que la convergence presque uniforme de (56) dans (55) entraîne immédiatement les convergences analogues pour les dérivées:

$$a'_{ft}(z, t) \to b'_t(z, t) \tag{57}$$

et

$$a'_{fz}(z, t) \to b'_z(z, t). \tag{58}$$

Prenant enfin des arguments z, t arbitraires, fixés de l'ensemble (53), tels que $z \neq \zeta_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, et, par conséquent, $b(z, t) \neq b(\zeta_j(t), t)$ et, tenant compte du fait que pour f suffisamment grand $z \neq \zeta_{jf}(t)$ et, par conséquent, $a_f(z, t) \neq a_f(\zeta_{jf}(t), t)$, nous déduisons de la convergence des suites (15) vers (15′) et des convergences (56), (57) et (58), en passant à la limite pour f tendant vers l'infini dans les équations (44, 4), la relation de la forme demandée (4, 0) avec fonctions $b(z, t)$, $\zeta_j(t)$ et $\beta_j(t) = iB_j(t)$ définies dans (52) et (15). Ces fonctions, comme on l'a constate plus haut, sont holomorphes. De plus, du fait que $\zeta_j(t) \in Q_j$ il résulte immédiatement que $|\zeta_j(t)| < 1$. Enfin, de (14, 1), (12′, 3), (17, 3) et des relations admises $A_{jf} \to A_j$ (cf. p. 48) il résulte d'abord que

$$B_{jf} \to A_j \left(\frac{b(\zeta_j)}{\zeta_j b'(\zeta_j)} \right)^2;$$

en même temps, il résulte ensuite des relations (57′, 4), (35, 3), (31, 3), (30, 3), de (Δ) et ($\Delta\Delta$) de la page 55 que $\beta_{jf}(0) = iB_{jf}$, et enfin, en vertu de (57′, 4) et de la définition des fonctions $B_j(t)$, que $\beta_{jf}(0) = iB_{jf}(0) \to iB_j(0) = \beta_j(0)$. Récapitulant ce qui précède, nous obtenons

$$\beta_j(0) = iA_j \left(\frac{b(\zeta_j)}{\zeta_j b'(\zeta_j)} \right)^2;$$

vu le caractère arbitraire de A_j, cela prouve que $\beta_j(0)$ peuvent prendre des valeurs arbitraires données d'avance.

Ainsi la démonstration du théorème a été entièrement achevée dans les parties 1-5.

Bibilographie

[1] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Coll. Math. 1 (1948), p. 168–169.

[2] — *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Mat. 2 (1953).

[3] — *Sur les fonctions univalentes algébriques bornées*, ibidem 10 (1955).

[4] — *Fonctions univalentes inverses. Polynomes univalents*, Bull. Soc. Sc. Lettres Łódź 9.7 (1958), p. 1–21.

[5] — *Fonctions algébriques et le théorème de Riemann*, Rozprawy Mat. (à paraitre).

[6] — and J. Ławrynowicz, *On the coefficients of univalent polynomials*, Coll. Math. 16 (1967), p. 27–33.

[7] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, New York and London 1960.

[8] P. L. Duren and M. Schiffer, *The theory of the second variation in extremum problems for univalent functions*, J. Analyse Math. 10 (1962), p. 193–252.

[9] I. Dziubiński, *Equation générale de Löwner*, Bull. Soc. Sc. Lettres Łódź 11.4 (1960), p. 1–8.

[10] В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, Москва-Ленинград 1950.

[11] Г. М. Голузин, *Метод вариаций в конформном отображении, I*, Мат. сб. 19 (61): 2 (1946), p. 203–236.

[12] — *Метод вариаций в конформном отображен ии,II*, ibidem 21(63): 1 (1947), p. 83—117.

[13] — *Метод вариаций в конформном отображении, III*, ibidem 21 (63): 1 (1947), p. 119–132.

[14] — *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва 1966.

[15] J. Janikowski, *Méthodes algébriques et équation de Löwner*, Bull. Soc. Sc. Lettres Łódź 12.16 (1961), p. 1–9.

[16] J. Ławrynowicz, *On the coefficient problem for univalent polynomials*, Proc. Camb. Phil. Soc. 64 (1968), p. 87–98.

[17] H. L. Royden, *The coefficient problem for bounded functions*, Proc. Nat. Ac. Sc. USA (1949), p. 657–662.

[18] S. Saks and A. Zygmund, *Analytic functions*, Monografie Mat. 28, Warszawa 1965.

[19] A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, *The coefficients of schlicht functions I*, Duke Math. J. 10 (1943), p. 611–635; *II*, ibidem 12 (1945), p. 107–125; *III*, Proc. Nat. Ac. Sc. Wash. 32 (1946), p. 111–116.

[20] — *A variational method in conformal mapping*, Duke Math. J. 14 (1947), p. 949–966.

[21] — *Coefficient regions for schlicht functions*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 35 (1950).

[22] M. Schiffer, *A method of variation within the family of simple functions*, Proc. London Math. Soc. 44 (1938), p. 432–449.

[23] M. Schiffer, *Variation of the Green's function and theory of the p-valued functions*, Amer. J. Math. 65 (1943), p. 341–360.

[24] L. Siewierski, *Sur les fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan*, Bull. Soc. Sc. Lettres Łódź 7.4 (1956), p. 1–17.

[25] — *Sur la variation locale des fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan*, ibidem 8.3 (1957), p. 1–16.

[26] — *Sur les fonctions extrémales dans les familles des fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan*, ibidem 8.9 (1957), p. 1–30.

[27] J. Śladkowska, *Polynômes quasi-univalents et univalents. Variations élémentaires et polynômes extrémaux*, Soc. Sc. Łódź. 64 (1960), p. 1–36.

[28] R. Zawadzki, *Sur les fonctions univalentes, algébriques*, Bull. Soc. Sc. Lettres, Łódź 8.1 (1957), p. 1–21.

[29] — *Les équations des fonctions extrémales dans les familles des fonctions univalentes, algébriques, non-bornées*, ibidem 8.10 (1957), p. 1–21.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ