ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVII, 1 (1980)

Й. КАЧМАРЧИК (Краков)

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПРОГОНКИ К НАХОЖДЕНИЮ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим алгебраическую систему

$$L_i y_i = a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i \quad (i = 1, \ldots, N-1), \tag{1}$$

$$y_0 - \theta y_N = \alpha, \tag{2}$$

$$y_k = \beta, \tag{3}$$

где

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i \geqslant a_i + b_i \quad (i = 1, \ldots, N-1), \tag{4}$$

α, β, θ — любые числа, $\theta > 0$, а k — фиксированный индекс $(0 \leqslant k \leqslant N)$.

Если $k = 0$ (или $k = N$), то из (2) следует $y_N = \beta - \alpha$ $(y_0 = \beta + \alpha)$ и получаем систему, которую можно решить обычным методом прогонки [1]. В дальнейшем будем предполагать, что $1 \leqslant k \leqslant N-1$.

Систему (1)-(3) получаем напр. при решении приближенными методами задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in D = (0,1) \times (0,T),$$

$$u(0,t) - \theta(t) u(1,t) = \alpha(t), \quad t \in [0,T],$$

$$u\big(G(t), t\big) = \beta(t), \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1],$$

где $G\colon [0,T] \to (0,1)$.

Введем в $\overline{D}$ сетку (см. фигуру)

$$S = \{(x_i, t_j)\colon x_i \in [0,1],\ i = 0, \ldots, N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1,$$
$$x_i < x_{i+1},\ i = 0, \ldots, N-1;\ t_j \in [0,T],\ j = 0, \ldots, M,\ t_0 = 0,\ t_M = T,$$
$$t_j < t_{j+1},\ j = 0, \ldots, M-1\}$$

так, чтобы кривая G пересекала прямую $t = t_j$ в узлах сетки.

Заменяя в дифференциальном уравнении производные соответствующими разностными производными ($u_{\bar{t}}$ — левой разностной производной, $u_{\bar{x}x}$ — второй разностной производной), получаем систему линейных уравнений

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau^j} = \frac{a^2}{\bar{h}_i}\left(\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h_i} - \frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h_{i-1}}\right)+f_i^{j+1}$$

$$(i=1,\ldots,N-1;\ j=0,\ldots,M-1),$$

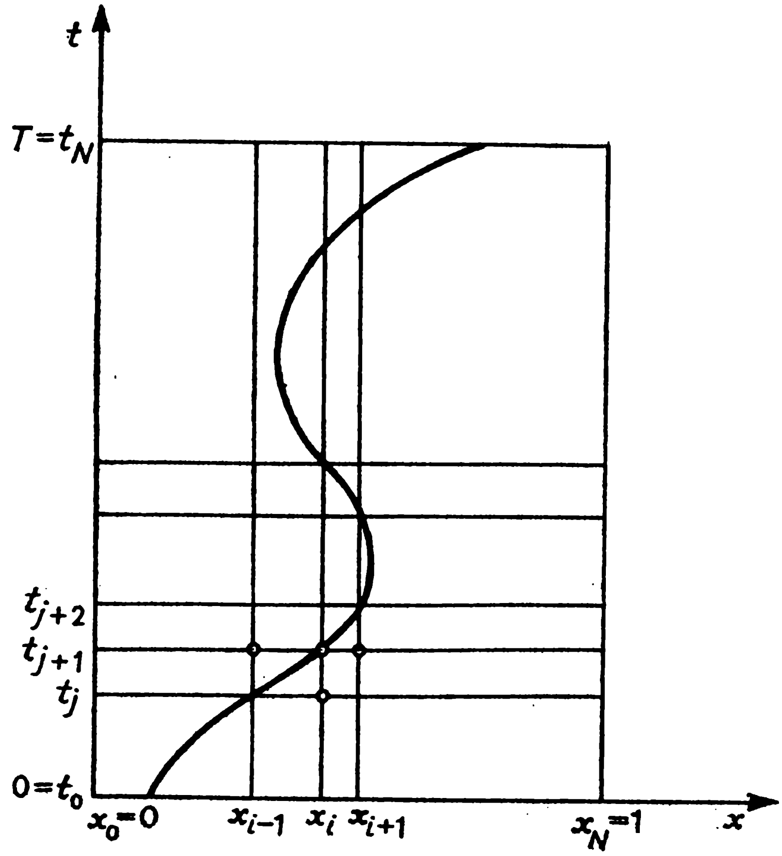
где u_i^j — значение приближенного решения в точке (x_i, t_j),

$$f_i^j = f(x_i, t_j), \qquad \tau_j = t_{j+1}-t_j, \qquad h_i = x_{i+1}-x_i, \qquad \bar{h}_i = \frac{1}{2}(h_i+h_{i-1}).$$

Остальные условия на слое j запишем в виде

$$u_0^j - \theta^j u_N^j = \alpha^j, \qquad u_k^j = \beta^j,$$

где $\alpha^j = \alpha(t_j)$, $\beta^j = \beta(t_j)$, $\theta^j = \theta(t_j)$, $x_k = G(t_j)$.



Принимая обозначения

$$a_i = \frac{\tau_j a^2}{\bar{h}_i h_{i-1}}, \qquad b_i = \frac{\tau_j a^2}{\bar{h}_i h_i}, \qquad c_i = \frac{\tau_j a^2}{\bar{h}_i}\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i-1}}\right)+1,$$

$$f_i = \tau_j f_i^{j+1} + u_i^j, \qquad a = a^{j+1}, \qquad \beta = \beta^{j+1}, \qquad \theta = \theta^{j+1}, \qquad y_i = u_i^{j+1},$$

получаем — при фиксированном j — систему уравнений (1)-(3), которая удовлетворяет условиям (4).

Докажем, что система (1)-(3) при условиях (4) имеет единственное решение, представим алгоритм решения и покажем его устойчивость.

Лемма 1. *Единственным решением однородной системы*

(1′) $$L_i y_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, N-1),$$

(2′) $$y_0 = \theta y_N,$$

(3′) $$y_k = 0$$

при условиях (4) *является нулевое решение.*

Доказательство. Легко видеть, что $y_i = 0$ ($i = 0, \ldots, N$) решение системы (1′)-(3′).

Предположим, что существует ненулевое решение $\bar{y}_i$ системы (1′)-(3′). Возможны тогда два случая:

1° $\bar{y}_{k+1} = 0$.

Легко тогда показать, используя определение L_i, что $\bar{y}_0 = \ldots = \bar{y}_{k-1} = \bar{y}_{k+2} = \ldots = \bar{y}_N = 0$, а так как $\bar{y}_{k+1} = 0$ и (3′), $\bar{y}_i = 0$ для $i = 0, \ldots, N$.

2° $\bar{y}_{k+1} \neq 0$.

Допустим, что $\bar{y}_{k+1} > 0$. Докажем, что

(5) $$\bar{y}_j > \bar{y}_{j-1}, \quad \bar{y}_j > 0 \quad (j = k+1, \ldots, N),$$

(6) $$\bar{y}_j < \bar{y}_{j+1}, \quad \bar{y}_j < 0 \quad (j = k-1, \ldots, 0).$$

Для $j = k+1$, неравенства (5) справедливы на основании предпосылки и (3′). Допустим их справедливость для фиксированного j. Из (1′), используя определение L_i, вычислим $\bar{y}_{j+1}$:

$$\bar{y}_{j+1} = \frac{c_j\bar{y}_j - a_j\bar{y}_{j-1}}{b_j} = \frac{c_j\bar{y}_j - a_j\bar{y}_{j-1} - (a_j+b_j)\bar{y}_j + (a_j+b_j)\bar{y}_j}{b_j} =$$

$$= \frac{(c_j - a_j - b_j)\bar{y}_j + a_j(\bar{y}_j - \bar{y}_{j-1}) + b_j\bar{y}_j}{b_j} > \frac{b_j\bar{y}_j}{b_j} = \bar{y}_j > 0.$$

Вышеуказанные неравенства правильны на основании (4) и (5) для j. Таким образом, на основании принципа индукции, мы показали справедливость (5).

Для доказания (6) заметим, что

$$\bar{y}_{k-1} = -\frac{b_k}{a_k}\bar{y}_{k+1} < 0 = \bar{y}_k.$$

В дальнейшем доказательство (6) аналогично доказательству неравенств (5). Подставляя $j = N$ в (5), а $j = 0$ в (6), получаем $\bar{y}_N > 0$, $\bar{y}_0 < 0$, что находится в противоречии с (2′), и таким образом не существует ненулевое решение.

В случае, когда $\bar{y}_{k+1} < 0$, доказательство аналогично.

Следствие. *Если* y_i, $\bar{y}_i$ *— решения системы* (1)-(3), *то* $y_i = \bar{y}_i$ $(i = 0, \ldots, N)$.

Введем обозначения:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_k & -c_k & b_k & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{N-1} & -c_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{d}^T = (-\theta, 0, \ldots, b_{N-1}), \qquad \bar{y}^T = (y_0, \ldots, y_{N-1}),$$
$$\bar{b}^T = (-a, f_1, \ldots, f_{N-1}).$$

Систему (1)-(3) можно записать в матричной форме, а затем, применяя метод окаймления [2], получаем

$$\bar{A}\bar{y} + \bar{d}y_N = -\bar{b}, \tag{7}$$

$$y_k = \beta. \tag{8}$$

Решение системы (7)-(8) представим в виде

$$\bar{y} = py_N + q, \tag{9}$$

где p, q — векторы пространства R^N. Вставляя $\bar{y}$ из (9) в (7) получаем

$$\bar{A}(py_N + q) + \bar{d}y_N + \bar{b} = 0,$$

откуда

$$(\bar{A}p + \bar{d})y_N + \bar{A}q + \bar{b} = 0.$$

Вышеуказанное уравнение будет исполнено, если p и q будут решениями систем

$$\bar{A}p = -\bar{d}, \tag{10}$$

$$\bar{A}q = -\bar{b}. \tag{11}$$

k-а координата $\bar{y}$ в (9) равна $y_k = p_k y_N + q_k$, откуда, учитывая (8), получаем

$$y_N = \frac{\beta - q_k}{p_k}.$$

Для решения систем (10), (11) применяем обычный метод прогонки [1].

Алгоритм решения системы (7)-(8), а тем самым системы (1)-(3), реализуется следующим образом:

$$
(12)\quad \begin{cases} \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \theta, \quad \gamma_1 = \alpha, \\ \alpha_{i+1} = \dfrac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \dfrac{a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad \gamma_{i+1} = \dfrac{a_i\gamma_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i} \\ \qquad (i = 1, \ldots, N-2), \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} p_{N-1} = \dfrac{a_{N-1}\beta_{N-1} + b_{N-1}}{c_{N-1} - a_{N-1}\alpha_{N-1}}, \quad q_{N-1} = \dfrac{a_{N-1}\gamma_{N-1} + f_{N-1}}{c_{N-1} - a_{N-1}\alpha_{N-1}}, \\ p_i = \alpha_{i+1}p_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad q_i = \alpha_{i+1}q_{i+1} + \gamma_{i+1} \quad (i = N-2, \ldots, 0), \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} y_N = \dfrac{\beta - q_k}{p_k}, \quad y_i = p_i y_N + q_i \quad (i = 0, \ldots, N-1). \end{cases}
$$

Нам надо еще доказать, что $p_k \neq 0$.

Лемма 2. *При условиях* (4), $p_i > 0$ $(i = 0, \ldots, N-1)$.

Доказательство. Докажем, что $0 < \alpha_i < 1$ и $\beta_i > 0$ для $i = 2, \ldots, N-1$.

Действительно,

$$
0 < \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_1} = \frac{b_1}{c_1} < 1,
$$

ввиду того, что (4) и (12). Так как $\beta_1 = \theta > 0$,

$$
\beta_2 = \frac{a_1\theta}{c_1 - a_1\alpha_1} = \frac{a_1\theta}{c_1} > 0.
$$

Предположим, что $0 < \alpha_i < 1$ и $\beta_i > 0$ для фиксированного i. Тогда

$$
0 < \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i} = \frac{b_i}{c_i - a_i - b_i + a_i(1-\alpha_i) + b_i} < \frac{b_i}{b_i} = 1.
$$

Последнее неравенство следует из предположения и (4).

Очевидно

$$
\beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i} > 0.
$$

Для $i = N-1$ получаем $0 < \alpha_{N-1} < 1$ и $\beta_{N-1} > 0$, а так как $b_{N-1} > 0$,

$$
p_{N-1} = \frac{a_{N-1}\beta_{N-1} + b_{N-1}}{c_{N-1} - a_{N-1}\alpha_{N-1}} > 0.
$$

Если $p_{i+1} > 0$, то учитывая доказаны уже неравенства получаем

$$p_i = a_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1} > 0.$$

Таким образом, на основании принципа индукции, лемма доказана.

Предложенный метод решения системы (1)-(3) является устойчивым (по отношению к ошибкам возникающим в процессе счета), так как метод прогонки для (10), (11) устойчив [1], а $p_k \neq 0$.

Основный результат, который мы получили, можно записать следующим образом:

Теорема. *Система* (1)-(3) *при условиях* (4) *имеет единственное решение, которое получаем применяя метод прогонки, и алгоритм счета является устойчивым.*

Цитированная литература

[1] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Москва 1971.
[2] Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Москва 1963.

Поступило в редакцию 3. 8. 1977;
переработанная версия 18. 7. 1978

J. KACZMARCZYK (Kraków)

O ZASTOSOWANIU METODY PRZEGANIANIA DO ZNAJDYWANIA ROZWIĄZANIA PEWNEGO ALGEBRAICZNEGO UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

STRESZCZENIE

W pracy rozpatruje się układ

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i \quad (i = 1, \ldots, N-1),$$

$$y_0 - \theta y_N = \alpha, \quad y_k = \beta,$$

gdzie a_i, $b_i > 0$, $c_i \geqslant a_i + b_i$ $(i = 1, \ldots, N-1)$, α, β, θ $(\theta > 0)$ – stałe, k – indeks z przedziału $0 \leqslant k \leqslant N$.

Pokazano jednoznaczność rozwiązania tego układu oraz podano sposób jego rozwiązania przy zastosowaniu metody przeganiania.