COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXVII 1973 FASC. 2

ÜBER FUNKTIONALGLEICHUNGEN ZAHLENTHEORETISCHER FUNKTIONEN

VON

KLAUS WOHLFAHRT (HEIDELBERG)

ERNST WITT
ZUM 60. GEBURTSTAGE
GEWIDMET

Es seien $\boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{N}$ beziehungsweise die Mengen der ganzen rationalen und der natürlichen Zahlen. Wir setzen $\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{Z} - \{0\}$ und $\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. $\chi\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}^*$ sei multiplikativ, also $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ $(m, n \in \boldsymbol{N})$, und $F\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}_0$ sei eine zahlentheoretische Funktion, die

$$F(m)F(n) = \sum_{t|(m,n)} \chi(t) F\left(\frac{mn}{t^2}\right) \qquad (m, n \in \boldsymbol{N}) \tag{1}$$

genügt. Solche Funktionen hat Rankin [1] *χ-multiplikativ* genannt. Durch

$$f(m) = \sum_{d^2|m} \mu(d) F\left(\frac{m}{d^2}\right), \qquad F(m) = \sum_{d^2|m} f\left(\frac{m}{d^2}\right) \qquad (m \in \boldsymbol{N}) \tag{2}$$

mit der Moebiusschen Funktion μ erhält man eine zahlentheoretische Funktion f, deren Zusammenhang mit F sich formal durch Dirichletsche Reihen beschreiben läßt:

$$\zeta(2s) \sum_m \frac{f(m)}{m^s} = \sum_m \frac{F(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - F(p)p^{-s} + \chi(p)p^{-2s}\right)^{-1}.$$

Im Euler-Produkt kommen dabei die Gleichungen (1) zum Ausdruck.

Wir werden zeigen, daß f einer Funktionalgleichung

$$f(m)f(n) = \sum_{t|(m,n)} c(m, n, t, \chi) \chi(t) f\left(\frac{mn}{t^2}\right) \qquad (m, n \in \boldsymbol{N}) \tag{3}$$

genügt und ihre Koeffizienten bestimmen. Aus (1) und (2) hat man dazu

$$
(4) \qquad f(m)f(n) = \sum_{\substack{g^2 \mid m,\, h^2 \mid n, \\ d \mid (m/g^2,\, n/h^2)}} \mu(g)\mu(h)\chi(d) \sum_{l^2 \mid (mn/g^2h^2d^2)} f\left(\frac{mn}{(ghdl)^2}\right)
$$

$$
= \sum_{t^2 \mid mn} \left(\sum_{d \mid (m,n,t)} \left(\sum_{\substack{g^2 \mid (m \mid d),\, h^2 \mid (n/d), \\ gh \mid (t/d)}} \mu(g)\mu(h) \right) \chi(d) \right) f\left(\frac{mn}{t^2}\right).
$$

Vor allem sind daher die Zahlen

$$
(5) \qquad K(m,n;t) = \sum_{g^2 \mid m,\, h^2 \mid n,\, gh \mid t} \mu(g)\mu(h) \qquad (t^2 \mid mn)
$$

zu ermitteln. Hier braucht nur über quadratfreie g und h summiert zu werden. Wir schreiben $k(n)$ für den quadratfreien Kern einer natürlichen Zahl n und dürfen dann $k(g) = g$ und $k(h) = h$ voraussetzen. Danach können m und n auf der rechten Seite von (5) beziehungsweise durch m_0^2 und n_0^2 mit

$$
(6) \qquad m_0 = \prod_{p^2 \mid m} p, \qquad n_0 = \prod_{p^2 \mid n} p
$$

ersetzt werden, wo p stets für Primzahlen stehe. Das gibt

$$
(7) \qquad K(m,n;t) = \sum_{\substack{g \mid (m_0, t), \\ (n_0, t/g) = 1}} \mu(g).
$$

Lemma. *Für natürliche Zahlen m, n, t mit $t^2 \mid mn$ ist die Summe*

$$
K(m,n;t) = \sum_{g^2 \mid m,\, h^2 \mid n,\, gh \mid t} \mu(g)\mu(h)
$$

dann und nur dann von Null verschieden, wenn t ein quadratfreier, gemeinsamer Teiler von m und n ist und überdies

$$
(8) \qquad (m/t, t) = (n/t, t)
$$

gilt. In diesem Fall ist

$$
K(m,n;t) = \mu\big((m/t, t)\big).
$$

Zum Beweise sei $\mu(g)$ ein von Null verschiedener Summand rechts in (7) und also g eine quadratfreie natürliche Zahl mit $g \mid (m_0, t)$ und $(n_0, t/g) = 1$. Weil n_0 und t/g relativ prim sind, geht jeder gemeinsame Primteiler q von n_0 und t in g auf. Weil n_0 quadratfrei ist, folgt $(n_0, t) \mid g$. Wegen $g \mid (m_0, t)$ hat man $(n_0, t) \mid (m_0, t)$ und aus Symmetriegründen dann sogar

$$
(9) \qquad (n_0, t) = (m_0, t).
$$

Übrigens ist $g = (m_0, t)$, und in (7) tritt also höchstens ein von Null verschiedener Summand auf. Für Primzahlen q gilt in diesem Fall die Implikation

$$q \mid (n_0, t) \to q^2 \nmid t. \tag{10}$$

Wenn nämlich $q^2 \mid t$ gilt, so ist $q \mid (t/g)$, weil g quadratfrei ist, und dann kann wegen $(n_0, t/g) = 1$ nicht auch noch $q \mid n_0$ sein.

Nun sei q eine Primzahl und $q^e \mid t$ mit einer natürlichen Zahl e. Wir nehmen einmal an, daß q^e in m nicht aufgehe. Wegen $t^2 \mid mn$ ist dann $q^{e+1} \mid n$, also $q \mid (n_0, t)$. Nach (10) ist $q^2 \nmid t$ und also $e = 1$. Nach (9) ist aber $q \mid m_0$, daher $q^2 \mid m$ und eben doch $q^e \mid m$, entgegen der Annahme. Mithin ist t ein Teiler von m und dann sicher auch von n.

Darüber hinaus ist t quadratfrei. Wäre nämlich $q^2 \mid t$ für eine Primzahl q, so wäre wegen $t \mid n$ auch $q^2 \mid n$ und also $q \mid n_0$, im Widerspruch zu (10).

Weil nun t quadratfrei ist, gilt $(m_0, t) = (m/t, t)$; denn beide Seiten sind quadratfrei und enthalten die gleichen Primteiler. Damit ist das Lemma in der einen Richtung bewiesen.

Jetzt sei t ein quadratfreier, gemeinsamer Teiler von m und von n und $(m/t, t) = (n/t, t)$. Dann ist $g = (m/t, t)$ ein quadratfreier Teiler von (m_0, t) und überdies

$$(n_0, t/g) = (n_0, t, t/g) = (g, t/g) = 1.$$

Daher ist $\mu(g)$ ein von Null verschiedener Summand in (7). Wir haben bereits gezeigt, daß es höchstens einen solchen geben kann, und damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Die Bedingung $t^2 \mid mn$ in (4) darf nun durch $t \mid (m, n)$ ersetzt werden, wonach man (3) mit

$$c(m, n, t, \chi) = \sum_{d \mid t} \chi^{-1}\left(\frac{t}{d}\right) K\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}; \frac{t}{d}\right)$$

erhält. Geht man in der Summation zu den Komplementärteilern $j = t/d$ über, so gibt das Lemma

$$c(m, n, t, \chi) = \sum_{\substack{j \mid t, k(j)=1, \\ (m/t, j)=(n/t, j)}} \chi^{-1}(j)\mu\big((m/t, j)\big).$$

Wegen

$$(m/t, j) = (n/t, j) \tag{11}$$

zerfallen die Primteiler q der quadratfreien Zahl j in zwei Klassen: es ist entweder $q \mid (m/t, n/t)$ oder $q \nmid (mn/t^2)$. Es sei r das Produkt der Primzahlen der ersten, s das der der zweiten Klasse. Dann sind r und s relativ prime Teiler von t. Man sieht leicht, daß die quadratfreien Teiler j von t, welche (11) genügen, sich umkehrbar eindeutig in der Form $j = gh$ mit $g|r$ und $h|s$ ergeben, wobei noch $g = (m/t, j)$ gilt. Daher wird schließlich

$$\begin{aligned} c(m, n, t, \chi) &= \sum_{g|r} \chi^{-1}(g)\mu(g) \sum_{h|s} \chi^{-1}(h) \\ &= \prod_{p|t, p|(m/t, n/t)} \left(1-\chi^{-1}(p)\right) \prod_{p|t, p\nmid(mn/t^2)} \left(1+\chi^{-1}(p)\right). \end{aligned}$$

Wir geben zwei Beispiele. Zuerst sei $F = \sigma$ die erste Teilersumme, also $\sigma(m) = \sum_{d|m} d$. Bekanntlich ist

$$\sigma(m)\sigma(n) = \sum_{t|(m,n)} t\sigma\left(\frac{mn}{t^2}\right).$$

Hier wird $f = \psi$ die Funktion von Dedekind, also

$$\psi(m) = m \prod_{p|m} (1+p^{-1}).$$

Für sie erhält man also (vgl. [2])

$$\psi(m)\psi(n) = \sum_{t|(m,n)} \begin{bmatrix} m, n \\ t \end{bmatrix} t\psi\left(\frac{mn}{t^2}\right)$$

mit

$$\begin{bmatrix} m, n \\ t \end{bmatrix} = \prod_{p|t, p|(m/t, n/t)} (1-p^{-1}) \prod_{p|t, p\nmid(mn/t^2)} (1+p^{-1}).$$

Zweitens sei $f = \varphi$ die Eulersche Funktion. Die zugehörige Dirichlet-Reihe konvergiert,

$$\sum_m \frac{\varphi(m)}{m^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)},$$

und man hat

$$\sum_m \frac{F(m)}{m^s} = \zeta(2s) \sum_m \frac{\varphi(m)}{m^s} = \prod_p \left(1-\varphi(p)p^{-s}-pp^{-2s}\right)^{-1}.$$

Hier ist also $\chi(n) = n\lambda(n)$ mit Liouvilles Funktion λ, und man bekommt

$$\varphi(m)\varphi(n) = \sum_{t|(m,n)} \begin{Bmatrix} m, n \\ t \end{Bmatrix} t\lambda(t)\varphi\left(\frac{mn}{t^2}\right)$$

mit

$$\begin{Bmatrix} m, n \\ t \end{Bmatrix} = \prod_{p|t, p|(m/t, n/t)} (1+p^{-1}) \prod_{p|t, p\nmid(mn/t^2)} (1-p^{-1}).$$

LITERATURNACHWEIS

[1] R. A. Rankin, ***Multiplicative functions and operators of Hecke type***, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 13 (1962), S. 81-89.

[2] K. Wohlfahrt, ***Über Operatoren Heckescher Art bei Modulformen reeller Dimension***, Mathematische Nachrichten 16 (1957), S. 233-256.

Reçu par la Rédaction le 2. 10. 1971