ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Un problème mixte pour l'équation aux dérivées partielles du second ordre du type parabolique à argument fonctionnel

K. ZIMA (Katowice)

Le but de ce travail est d'étendre au cas des équations aux dérivées partielles à argument fonctionnel quelques théorèmes contenus dans le chapitre VIII de la monographie de Szarski [1].

1. Notations et définitions. Soit dans l'espace euclidien E^{n+1} des points $P(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un ensemble D^* du type C (v. [1], p. 103) et supposons que la projection de l'ensemble D^* sur l'axe des t soit l'intervalle $\langle p, T)$. Soit encore t_0 un point fixé de l'intervalle (p, T). Considérons les deux sous-ensembles suivants de l'ensemble D^*:

$$(1) \qquad D^0 = \{(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^*: \ t \in \langle p, t_0\rangle\}, \qquad D = D^* \setminus D^0 \quad (D^* = D^0 \cup D).$$

L'ensemble D est évidemment du type C. Désignons par Σ la surface latérale de l'ensemble D. Si l'on définit sur l'ensemble Σ une fonction, p. ex. $a(t, X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nous désignerons par Σ_a l'ensemble des points $(t, X) \in \Sigma$ tels que $a(t, X) \neq 0$.

En rapport avec les ensembles D^0 et D nous aurons à considérer, dans ce qui suit

1° Les transformations A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, qui transforment l'ensemble D en l'ensemble D^* de telle façon que $P^* = (t^*, X^*) \in D$, $\widetilde{P} = (\widetilde{t}, \widetilde{X}) \in D^*$ et $\widetilde{P} = A_{ij}(P^*)$ entraînent $\widetilde{t} \leqslant t^*$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

2° Les fonctions $a_i(P)$ et les directions $l_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, définies sur la surface latérale Σ et satisfaisant aux conditions A, formulées dans la monographie [1] (v. [1], p. 134).

3° Les fonctions $\psi_i(P)$ définies sur Σ et les fonctions $\beta_i(P)$ définies sur les ensembles Σ_{a_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$, et telles que $\beta_i(P) > B_i \geqslant 0$.

4° Les fonctions $\varphi_i(P)$, définies sur l'ensemble D^0.

5° Les fonctions $f_i(t, X, U, Q, R) = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, q_1, \ldots$ $\ldots, q_n, r_{11}, \ldots, r_{nn})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, définies pour $(t, X) \epsilon D$ et U, Q, R quelconques.

Cela admis, nous allons considérer le problème mixte suivant:

$$(2)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial u_i(P)}{\partial t} = f_i\big(P, u_1(A_{i1}(P)), u_2(A_{i2}(P)), \ldots, u_m(A_{im}(P)), Q(u_i), R(u_i)\big) && \text{pour } P \epsilon D,\\
&u_i(P) = \varphi_i(P), \qquad i = 1, 2, \ldots, m && \text{pour } P \epsilon D^0,\\
&\beta_i(P) u_i(P) - a_i(P) \frac{du_i(P)}{dl_i} = \psi_i(P) && \text{pour } P \epsilon \Sigma_{a_i},\\
&u_i(P) = \psi_i(P) && \text{pour } P \epsilon \Sigma \setminus \Sigma_{a_i}
\end{aligned}$$

où

$$Q(u_i) = \left\{\frac{\partial u_i(P)}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_n}\right\},$$

$$R(u_i) = \left\{\frac{\partial^2 u_i(P)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u_i(P)}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_i(P)}{\partial x_n^2}\right\}.$$

Le système des m fonctions $\{u_1(P), u_2(P), \ldots, u_m(P)\}$ sera appelé (v. [1], p. 134) solution Σ_a-régulière du problème mixte (2) si ces fonctions sont continues dans la fermeture de l'ensemble D^*, admettent des dérivées partielles continues du 1^er^ et du 2^e^ ordre dans l'ensemble D, satisfont à toutes les quatre égalités (2) et admettent des dérivées $du_i(P)/dl_i$ suivant les directions l_i en tout point P de l'ensemble Σ_{a_i}.

2. Définitions de l'ellipticité et de la parabolicité. Nous rappellerons ici, en les modifiant quelque peu, les définitions de l'ellipticité et de la parabolicité données par Szarski (v. [1], pp. 132-133). Cette modification est devenue nécessaire à cause des transformations A_{ij} qui interviennent dans le problème (2).

Définition de l'ellipticité. Supposons que les fonctions $\{u_1(P), u_2(P), \ldots$ $\ldots, u_m(P)\}$, définies dans l'ensemble D^*, admettent des dérivées partielles du 1^er^ ordre au point $\widetilde{P} \epsilon D$. Nous dirons que les fonctions $f_i(P, U, Q, R)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, qui interviennent dans le problème (2), sont *elliptiques par rapport à la fonction vectorielle* $U(P) = \{u_1(P), u_2(P), \ldots, u_m(P)\}$ *au point* $\widetilde{P}$ *sous les transformations* A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, si pour tout couple de suites numériques $R = (r_{11}, \ldots, r_{nn})$, $\widetilde{R} = (\widetilde{r}_{11}, \ldots, \widetilde{r}_{nn})$ telles que la forme $\sum_{j,k=1}^{n}{}' (r_{jk} - \widetilde{r}_{jk}) \lambda_j \lambda_k$ des variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ satisfait à l'inégalité

$$\text{(i)} \qquad \sum_{j,k=1}^{n} (r_{jk} - \widetilde{r}_{jk}) \lambda_j \lambda_k \leqslant 0$$

on a l'inégalité

$$(3)\qquad f_i\big(\widetilde{P}, u_1\big(A_{i1}(\widetilde{P})\big), \ldots, u_m\big(A_{im}(\widetilde{P})\big), Q\big(u_i(\widetilde{P})\big), R\big)$$
$$\leqslant f_i\big(\widetilde{P}, u_1\big(A_{i1}(\widetilde{P})\big), \ldots, u_m\big(A_{im}(\widetilde{P})\big), Q\big(u_i(\widetilde{P})\big), \widetilde{R}\big) .$$

Si l'inégalité (3) a lieu pour tout point $\widetilde{P} \in D$, nous dirons que les fonctions $f_i(P, U, Q, R)$ sont *elliptiques dans l'ensemble D par rapport à la fonction vectorielle $U(P) = \{u_1(P), \ldots, u_m(P)\}$ sous les transformations A_{ij}.*

Définition d'une solution parabolique. Nous dirons, avec J. Szarski, que la solution $\{\widetilde{u}_1(P), \widetilde{u}_2(P), \ldots, \widetilde{u}_m(P)\}$ du problème (2) dans l'ensemble D est *parabolique* dans D si les fonctions $f_i(P, U, Q, R)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, qui interviennent dans les équations (2) sont elliptiques dans l'ensemble D par rapport aux fonctions $\{\widetilde{u}_1(P), \widetilde{u}_2(P), \ldots, \widetilde{u}_m(P)\}$ sous les transformations A_{ij}.

3. Quelques théorèmes sur le problème (2). Nous établirons dans ce numéro quelques théorèmes qui constituent une généralisation de certains résultats démontrés par J. Szarski dans le chapitre VIII de la monographie [1].

THÉORÈME 1. *Admettons au sujet du problème* (2) *les hypothèses suivantes:*

1*. *Les fonctions $f_i(P, U, Q, R)$ satisfont à l'inégalité*

$$|f_i(P, U, 0, 0)| \leqslant \sigma_i(t, |u_1|, |u_2|, \ldots, |u_m|) ,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m , \quad t \in \langle 0, T) ,$$

où les fonctions $\sigma_i(t, v_1, v_2, \ldots, v_m)$ sont continues, non négatives et non décroissantes par rapport aux variables $v_1, v_2, \ldots, v_m$ dans l'ensemble $\{t \in \langle 0, T),\ v_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$.

2*. *Les fonctions $\beta_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, satisfont à l'inégalité $\beta_i(P) > B_i \geqslant 0$.*

3*. *Les fonctions initiales $\varphi_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, satisfont à l'inégalité $|\varphi_i(P)| \leqslant \eta_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $P \in D^0$, où $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ sont des nombres non négatifs fixés.*

Enfin, soit $\{\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_m(t)\}$ l'intégrale supérieure à droite du système d'équations

$$(\mathrm{ii})\qquad \begin{aligned} &y_i'(t) = \sigma_i\big(t, y_1(t), \ldots, y_m(t)\big) , \\ &y_i(0) = \eta_i , \quad i = 1, 2, \ldots, m , \end{aligned}$$

dans l'intervalle $\langle 0, \delta)$.

Dans ces conditions, si $\widetilde{U}(P) = \{\widetilde{u}_1(P), \widetilde{u}_2(P), \ldots, \widetilde{u}_m(P)\}$ est une solution Σ_a-régulière parabolique du problème (2) et si

$$\begin{aligned} &\left|\beta_i(P)\widetilde{u}_i(P) - a_i(P)\frac{d\widetilde{u}_i(P)}{dl_i}\right| \leqslant B_i\widetilde{\omega}_i(t) \quad \text{pour } P \in \Sigma_{a_i},\ P = (t, X), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad |\widetilde{u}_i(t)| \leqslant \widetilde{\omega}_i(P) \quad \text{pour } P \in \Sigma\setminus\Sigma_{a_i}, \end{aligned} \tag{4}$$

où $\widetilde{\omega}_i(t) = \eta_i + \int\limits_0^t \sigma_i(\tau, \eta_1, \ldots, \eta_m)d\tau$, alors

$$|\widetilde{u}_i(t, X)| \leqslant \omega_i(t) \quad \text{pour } t \in \langle 0, \delta) \frown \langle 0, T),\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Démonstration du théorème 1. Admettons les notations suivantes:

$$\begin{aligned} &W_i(t) = \max_{x \in S_t} |\widetilde{u}_i(t, x)|, \quad t \in \langle p, T),\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ &M_i(t) = \max_{x \in S_t} \{\widetilde{u}_i(t, x)\}, \quad t \in \langle p, T),\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ &N_i(t) = \max_{x \in S_t} \{-\widetilde{u}_i(t, x)\}, \quad t \in \langle p, T),\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ &\Delta(t) = \{(\tau, x) \in \overline{D}^*:\ p \leqslant \tau \leqslant t\}, \\ &\mathfrak{W}_i(t) = \max_{P \in \Delta(t)} |\widetilde{u}_i(P)|, \quad \mathfrak{W}_{ij}(t) = \sup_{P \in \Delta(t)} \left|u_i\big(A_{ij}(P)\big)\right|, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{6}$$

Si $\tau_i(t)$ désigne (v. [3]) la borne inférieure des nombres $\tau \leqslant t$ tels que $W_i(\tau) = \mathfrak{W}_i(t)$, les fonctions $\tau_i(t)$ sont, en vertu du lemme 2 (v. [3]) non décroissantes dans l'intervalle $\langle p, T)$, continues à gauche et $\tau_i(t) \leqslant t$.

Considérons le système suivant d'équations différentielles avec dérivée gauche:

$$\begin{aligned} &\big(z_i(t)\big)'_- = \sigma_i\Big(t, z_1\big(\tau, (t)\big), z_2\big(\tau_2(t)\big), \ldots, z_m\big(\tau_m(t)\big)\Big) \quad \text{pour } t \in \langle 0, T), \\ &z_i(t) = \eta_i \quad \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{7}$$

Dans le travail [2] nous avons démontré qu'un système de la forme (7) admet — au moins localement — des solutions supérieure et inférieure à droite. On prouve aisément que ces solutions existent dans l'intervalle $\langle 0, \delta)$.

Soit donc $\{\widetilde{z}_1(t), \widetilde{z}_2(t), \ldots, \widetilde{z}_m(t)\}$ l'intégrale supérieure à droite du système d'équations (7) dans l'intervalle $\langle 0, \delta)$. Nous allons d'abord montrer que les fonctions $\widetilde{u}_i(P)$ vérifient l'inégalité

$$|\widetilde{u}_i(t, x)| \leqslant \widetilde{z}_i(t) \quad \text{pour } t \in \langle 0, \delta) \frown \langle 0, T),\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5'}$$

ensuite nous établirons l'inégalité $\widetilde{z}_i(t) \leqslant \omega_i(t)$, d'où résultera l'inégalité (5). Avec les notations admises, on a l'inégalité

$$W_i(0) \leqslant \eta_i = \widetilde{z}_i(0). \tag{8}$$

En vertu du théorème 7 (v. [2]), il suffit donc, pour établir l'inégalité $W_i(t) \leqslant \tilde{z}_i(t)$ pour $t \in \langle 0, \delta)$, de prouver l'implication suivante:

(9) Si pour un point $t^* \in (0, \delta)$ et pour un indice j on a l'inégalité $W_j(t^*) > \tilde{z}_i(t^*)$, alors $D_- W_j(t^*) \leqslant \sigma_j\big(t^*, W_1(\tau_1(t^*)), W_2(\tau_2(t^*)), \ldots, W_m(\tau_m(t^*))\big)$.

Supposons donc vérifiée l'inégalité $W_j(t^*) > \tilde{z}_j(t^*)$. En vertu du théorème 34.1 ([1], p. 106) il existe sur la section S_{t^*} un point $P^*(t^*, X^*)$ tel que

$$W_j(t^*) = M_j(t^*) = \tilde{u}_j(t^*, X^*) \quad \text{et} \quad D_- W_j(t^*) \leqslant D^- M_j(t^*) , \tag{10}$$

ou bien

$$W_j(t^*) = N_j(t^*) = -\tilde{u}_j(t^*, X^*) \quad \text{et} \quad D_- W_j(t^*) \leqslant D^- N_j(t^*) . \tag{11}$$

Considérons le cas (10) et remarquons d'abord que, les fonctions σ_i étant monotones et non négatives, on a l'inégalité

$$\tilde{\omega}_i(t) \leqslant \tilde{z}_i(t) \quad \text{pour } t \in \langle 0, \delta) . \tag{12}$$

De l'inégalité (12) il résulte que les inégalités (4) seront vérifiées si l'on remplace les fonctions $\tilde{\omega}_i(t)$ par les fonctions $\tilde{z}_i(t)$. On aura donc

$$\begin{aligned} \left|\beta_j(P)\tilde{u}_i(P) - a_j(P)\frac{d\tilde{u}_j(P)}{dl_j}\right| &\leqslant B_j\tilde{z}_j(t) \quad \text{pour } P \in \Sigma_{a_j} , \\ |\tilde{u}_j(P)| &\leqslant \tilde{z}_j(t) \quad \text{pour } P \in \Sigma \setminus \Sigma_{a_j} . \end{aligned} \tag{4*}$$

Les inégalités (4*) et l'inégalité $W_j(t^*) > \tilde{z}_j(t^*)$ prouvent — moyennant le lemme 47.1 ([1], p. 135) — que le point $P^*(t^*, X^*)$ est un point intérieur de l'ensemble D. Evidemment, la fonction $\tilde{u}_j(t, X)$ admet en ce point un maximum local; on a donc les relations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{u}_j(P^*)}{\partial x_i} = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, n; \\ &\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}_j(P^*)}{\partial x_i \partial x_k}\lambda_i\lambda_k \leqslant 0 , \quad \lambda_i, \lambda_k \text{ quelconques} . \end{aligned} \tag{13}$$

D'autre part, en vertu du théorème 33.1 ([1], p. 104), on a

$$D^- M_j(t^*) \leqslant \frac{\partial \tilde{u}_j(P^*)}{\partial t} . \tag{14}$$

En rapprochant (14) et (10), et en tenant compte de la définition des fonctions $\tilde{u}_j(P)$, on obtient

$$\begin{aligned} D_- W_j(t^*) &\leqslant \frac{\partial \tilde{u}_j(P^*)}{\partial t} \\ &= f_j\big(P^*, \tilde{u}_1(A_{j1}(P^*)), \ldots, \tilde{u}_m(A_{jm}(P^*)), 0, R(\tilde{u}_j(P^*))\big) , \end{aligned} \tag{15}$$

d'où, en ajoutant et retranchant le même terme, on déduit l'inégalité

(16) $D_- W_j(t^*)$

$$\leqslant \left[f_j\left(P^*, \ldots, \tilde{u}_i\left(A_{ji}(P^*)\right), \ldots, 0, R\left(\tilde{u}_j(P^*)\right) - f_j\left(P^*, \ldots, \tilde{u}_i\left(A_{ji}(P^*)\right), \ldots, 0, 0\right)\right] +$$
$$+ f_j\left(P^*, \tilde{u}_1\left(A_{ji}(P^*)\right), \ldots, \tilde{u}_m\left(A_{jm}(P^*)\right), 0, 0\right).$$

La solution $\{\tilde{u}_1(P), \ldots, \tilde{u}_m(P)\}$ étant parabolique, l'expression entre crochets dans l'inégalité (16) est non positive. En tenant compte de ce fait et de l'hypothèse 1* on tire de l'inégalité (16)

$$D_- W_j(t^*) \leqslant f_j\left(P^*, \tilde{u}_1\left(A_{j1}(P^*)\right), \ldots, \tilde{u}_m\left(A_{jm}(P^*)\right), 0, 0\right) \tag{17}$$
$$\leqslant \sigma_j\left(t^*, \left|\tilde{u}_1\left(A_{j1}(P^*)\right)\right|, \ldots, \left|\tilde{u}_m\left(A_{jm}(P^*)\right)\right|\right).$$

Un raisonnement tout pareil mène pour le cas (11) à l'inégalité

$$D_- W_j(t^*) \leqslant -f_j\left(P^*, \tilde{u}_1\left(A_{j1}(P^*)\right), \ldots, \tilde{u}_m\left(A_{jm}(P^*)\right), 0, 0\right) \tag{17'}$$
$$\leqslant \sigma_j\left(t^*, \left|\tilde{u}_1\left(A_{j1}(P^*)\right)\right|, \ldots, \left|\tilde{u}_m\left(A_{jm}(P^*)\right)\right|\right).$$

Dans les deux cas on a donc pour le point P^* l'inégalité

$$D_- W_j(t^*) \leqslant \sigma_j\left(t^*, \left|\tilde{u}_1\left(A_{j1}(P^*)\right)\right|, \ldots, \left|\tilde{u}_m\left(A_{jm}(P^*)\right)\right|\right). \tag{18}$$

Enfin, en tenant compte de l'inégalité évidente $\left|u_j\left(A_{ji}(P)\right)\right| \leqslant \mathcal{W}_i(t) = W_i\left(\tau_i(t)\right)$ et du fait que les fonctions σ_j sont monotones par rapport aux variables spatiales, on obtient:

$$D_- W_j(t^*) \leqslant \sigma_j\left(t^*, W_1\left(\tau_1(t^*)\right), W_2\left(\tau_2(t^*)\right), \ldots, W_m\left(\tau_m(t^*)\right)\right). \tag{19}$$

L'inégalité (19) établit l'implication (9) et l'inégalité (5*) se trouve ainsi démontrée.

D'autre part, les fonctions $\tilde{z}_i(t)$ étant non décroissantes, on a $\tilde{z}_i\left(\tau_i(t)\right) \leqslant \tilde{z}_i(t)$, d'où, en tennant compte du fait que les fonctions σ_i sont monotones, on déduit l'inégalité

$$\left(\tilde{z}_i(t)\right)'_- = \sigma_i\left(t, \tilde{z}_i\left(\tau_1(t)\right), \ldots, \tilde{z}_m\left(\tau_m(t)\right)\right) \leqslant \sigma_i\left(t, \tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t), \ldots, \tilde{z}_m(t)\right) \tag{20}$$

et, de plus, $\tilde{z}_i(0) = \omega_i(0) = \eta_i$.

En vertu des théorèmes de comparaison correspondants on tire de l'inégalité (20) la suivante:

$$\tilde{z}_i(t) \leqslant \omega_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; t \in \langle 0, \delta), \tag{21}$$

où $\{\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_m(t)\}$ est l'intégrale supérieure à droite, mentionnée plus haut, du système (ii). En rapprochant les inégalités (21) et (5*) on obtient l'inégalité (5), c'est-à-dire la conclusion du théorème 1.

Remarque 1. Si $A_{ii}(P) \equiv P$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$, il suffit de prendre, au lieu de la condition 1*, la condition plus faible:

1**. $f_i(P, U, 0, 0) \cdot \operatorname{sgn} u_i \leqslant \sigma_i(t, |u_1|, |u_2|, \ldots, |u_m|)$ ([1], p. 136) .

Des considérations analogues permettent d'établir le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Supposons donné, outre le système $f_i(P, U, Q, R)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, le système de fonctions $g_i(P, U, Q, R)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, définies pour $P \in D$ et U, Q, R quelconques, et supposons vérifiée l'inégalité*

$$(22)\quad |f_i(P, U, Q, R) - g_i(P, \bar{U}, Q, R)| \leqslant \sigma_i(t, |u_1 - \bar{u}_1|, |u_2 - \bar{u}_2|, \ldots, |u_m - \bar{u}_m|),$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, où les fonctions σ_i ont les mêmes propriétés que dans le théorème 1. Admettons que $\{u_1(P), u_2(P), \ldots, u_m(P)\}$ soit une solution parabolique Σ_a-régulière du problème (2) et la fonction $V(P) = \{v_1(P), v_2(P), \ldots, v_m(P)\}$ une solution Σ_a-régulière du système

$$(23)\quad \frac{\partial v_i(P)}{\partial t} = g_i\big(P, v_1(A_{i1}(P)), \ldots, v_m(A_{im}(P)), Q(v_i(P)), R(v_i(P))\big), \qquad P \in D,$$

avec des conditions initiales et aux limites convenables.

Dans ces conditions, si les inégalités

$$(24)\quad \begin{aligned} &|u_i(P) - v_i(P)| \leqslant \eta_i && \text{pour } P \in D^0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ &\left|\beta_i(P)\{u_i(P) - v_i(P)\} - a_i(P)\frac{d\{u_i(P) - v_i(P)\}}{dl_i}\right| \leqslant \beta_i \tilde{\omega}_i(t) && \text{pour } P \in \Sigma_{a_i}, \\ &|u_i(P) - v_i(P)| \leqslant \tilde{\omega}_i(t) && \text{pour } P \in \Sigma \setminus \Sigma_{a_i}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\omega}_i(t) = \eta_i + \int_0^t \sigma_i(\tau, \eta_1, \ldots, \eta_m)\,d\tau$, sont vérifiées, on a la limitation

$$(25)\quad |u_i(t, x) - v_i(t, x)| \leqslant \omega_i(t), \quad t \in \langle 0, \delta), \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

où $\{\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_m(t)\}$ est l'intégrale supérieure à droite du système d'équations (ii) dans l'intervalle $\langle 0, \delta)$.

Remarque 2. En supposant de plus que $\sigma_i(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$ et que l'intégrale unique du système (ii) avec la condition $y_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, est la fonction vectorielle identiquement nulle, on obtient comme conséquences du théorème 2 un théorème sur l'unicité de la solution du problème 2 et un théorème sur la dépendance continue de cette solution des fonctions initiales $\varphi_i(P)$ et des conditions aux limites.

4. Dépendance continue de la solution du problème (2) des transformations A_{ij}. Supposons données, outre les transformations A_{ij} qui interviennent dans le problème (2), des transformations $\tilde{A}_{ij}$ définies sur l'ensemble D et telles que $(t, X) \in D$ entraîne $\tilde{A}_{ij}(t, X) \in \Delta(t)$ (v. (6)). Soit donc la fonction $\{\tilde{u}_1(P), \tilde{u}_2(P), \ldots, \tilde{u}_m(P)\}$ une solution Σ_a-régulière du problème

$$
(2^*)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i(P)}{\partial t} = f_i\Big(P, u_2\big(\tilde{A}_{i1}(P)\big), \ldots, u_m\big(\tilde{A}_{im}(P)\big), Q\big(u_i(P)\big), R\big(u_i(P)\big)\Big) && \text{pour } P \in D,\\
&u_i(P) = \varphi_i(P) && \text{pour } P \in D^0,\\
&\beta_i(P)u_i(P) - a_i(P)\frac{du_i(P)}{dl_i} = \psi_i(P) && \text{pour } P \in \Sigma_{a_i},\\
&u_i(P) = \psi_i(P) && \text{pour } P \in \Sigma \setminus \Sigma_{a_i},
\end{aligned}
$$

et la fonction $\{u_1(P), u_2(P), \ldots, u_m(P)\}$ une solution parabolique Σ_a-régulière du problème (2).

Si

$$\varkappa_i \overset{\text{def}}{=} \max\Big\{\sup_{P \in \Delta(T_0)} \big|u_i\big(\tilde{A}_{ij}(P)\big) - u_i\big(A_{ij}(P)\big)\big|\Big\}, \qquad 0 < T_0 < T,$$

on a la limitation

$$(26)\qquad |\tilde{u}_i(t, x) - u_i(t, x)| \leqslant \bar{\omega}_i(t) \qquad \text{pour } t \in \langle 0, \bar{\delta}), \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

où $\{\bar{\omega}_1(t), \ldots, \bar{\omega}_m(t)\}$ est l'intégrale supérieure à droite dans l'intervalle $\langle 0, \delta^*)$ du système (ii) avec la condition initiale $y_i(0) = \varkappa_i$. Le nombre $\bar{\delta}$ désigne $\min(\delta^*, T_0)$.

La démonstration de l'inégalité (26) est analogue à celle du théorème 1. Dans le cas où il est possible de déterminer (ou de limiter) effectivement les nombres $\varkappa_i$ et l'intégrale supérieure $\{\bar{\omega}_i(t), \bar{\omega}_i(t), \ldots, \bar{\omega}_m(t)\}$, l'inégalité (26) peut servir à la résolution approchée du problème (2).

Travaux cités

[1] J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

[2] K. Zima, *Sur un système d'équations différentielles avec dérivée à gauche*, ce fascicule, pp. 37-47.

[3] — *Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à argument fonctionnel*, ce fascicule, pp. 49-59.

Reçu par la Rédaction le 20. 9. 1967

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Une remarque sur des notes de Razumichin et Krasovskij sur la stabilité asymptotique

par Z. Mikołajska (Kraków)

Envisageons le système suivant d'équations différentielles avec paramètre retardé

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\big(t, x(t), x(t-h)\big) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

où $x = x_1, \dots, x_n$.

Dans la note [3] Razumichin a donné pour la stabilité asymptotique la condition suivante:

Hypothèses H. *Il existe une fonction $V(t, x)$ positivement définie dont la dérivée totale par rapport à* (1) *est*

$$\frac{dV}{dt_{(1)}} = V_t(t, x) + V_x(t, x) X(t, x, y) = U(t, x, y),$$

telle que

$$U(t, x, y) \leqslant -\varphi(x)$$

pour tous les (t, x, y) tels que

$$V(\tau, y) \leqslant V(t, x) \qquad \textit{pour } \tau \leqslant t,$$

où $\varphi(x) > 0$ pour $x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ étant continue.

Razumichin se propose de démontrer que sous les hypothèses H la solution $x \equiv 0$ du système (1) est asymptotiquement stable. Dans la présente note nous construirons un exemple d'une équation de la forme (1) qui prouve que les hypothèses H ne sont pas suffisantes pour la stabilité asymptotique de la solution $x \equiv 0$ du système (1).

§ 1. Exemple. Envisageons la fonction $f(t, x, y)$ définie de la façon suivante:

$$
(2) \qquad f(t,x,y)=\begin{cases} -x & \text{pour } x^2 \geqslant y^2 , \\ -a(t)x & \text{pour } x^2 \exp\left(2\int\limits_{t-h}^{t} a(s)ds\right) \leqslant y^2 , \\ -x+\dfrac{1-a(t)}{\left(\exp 2\int\limits_{t-h}^{t} a(s)ds-1\right)x}\cdot(y^2-x^2) & \\ \qquad\qquad \text{pour } x^2\leqslant y^2 \leqslant x^2 \exp 2\int\limits_{t-h}^{t} a(s)ds , \ x^2>0 , \end{cases}
$$

où

$$
(3) \qquad 1>a(t)>0 \quad \text{pour } t\geqslant -h , \ h>0 , \ h=\text{const};
$$

$a(t)$ est continue et

$$
(4) \qquad \int\limits_0^{\infty} a(t)dt = a < \infty .
$$

Nous démontrons que pour l'équation

$$
(5) \qquad x'(t)=f\big(t, x(t), x(t-h)\big) , \qquad t\geqslant 0 ,
$$

ainsi définie les solutions $x(t)$, telles que $x(t)\not\equiv 0$ dans l'intervalle $[-h, 0]$ ne tendent pas vers zéro pour $t\to\infty$ (c'est-à-dire la solution $x\equiv 0$ n'est pas asymptotiquement stable) et que les hypothèses H sont satisfaites.

Envisageons la fonction $V(x)=x^2$. Pour chaque solution $x(t)$ de (5) la fonction $v(t)=V\big(x(t)\big)$ satisfait à la relation suivante:

$$
\frac{dV}{dt_{(5)}}=\begin{cases} -2V(x) & \text{pour } x^2\geqslant y^2 , \\ -2a(t)V(x) & \text{pour } y^2\geqslant x^2\exp 2\int\limits_{t-h}^{t} a(s)ds , \\ -2V(x)+\big(1-a(t)\big)\left(\exp 2\int\limits_{t-h}^{t} a(s)ds-1\right)^{-1}\cdot 2\big(V(y)-V(x)\big) & \\ \qquad\qquad \text{pour } V(x)\leqslant V(y)\leqslant V(x)\exp 2\int\limits_{t-h}^{t} a(s)ds & \end{cases}
$$

et par suite, en vertu de (3), on a $v'(t)\leqslant -2a(t)v(t)$ pour $t\geqslant 0$, d'où il vient

$$
v(s)\geqslant v(t)\exp 2\int\limits_t^s -a(u)du \qquad \text{pour } 0\leqslant s\leqslant t .
$$

Pour $s = t-h$ on obtient

$$v(t-h) \geqslant v(t) \exp 2 \int_{t-h}^{t} a(s)ds \text{ . pour } t \geqslant h \text{ .} \tag{6}$$

De la définition de $f(t, x, y)$ et (6) il vient que $v'(t) = -2a(t)v(t)$ pour $t \geqslant h$ et par suite

$$v(t) = v(h) \exp \left(-2 \int_{h}^{t} a(s)ds\right) > v(h)e^{-2a} > 0 \text{ .}$$

Pour démontrer que les hypothèses H sont satisfaites, envisageons la dérivée totale de $V(x) = x^2$ dans l'ensemble où $x^2 \geqslant y^2$. On a

$$\frac{dV}{dt_{(5)}} = 2xf(t, x, y) = -2x^2 \quad \text{pour } V(x) \geqslant V(y);$$

on peut ainsi poser $\varphi(x) = 2V(x) = 2x^2$, et par suite la condition de Razumichin n'est pas suffisante pour la stabilité asymptotique.

§ 2. Envisageons la condition de Krasovskij [1].

HYPOTHÈSES H_1. *Il existe une fonction positivement définie $V(t, x)$ et des fonctions $\varphi(x)$ et $f(r)$ telles que*

$$V_t(t, x)+V_x(t, x)X(t, x, y) = U(t, x, y) \leqslant -\varphi(x) \tag{2.1}$$

pour (t, x, y) tels que

$$V(s, y) \leqslant f(V(t, x)) \text{ ,} \quad t-h \leqslant s \leqslant t \text{ ,} \tag{2.2}$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $f(r)$ sont continues et telles que

$$\varphi(x) > 0 \quad \textit{pour } x \neq 0 \text{ , } \varphi(0) = 0 \text{ ,} \tag{2.3}$$

$$f(r) > r \quad \textit{pour } r \neq 0 \text{ ,} \tag{2.4}$$

$f(r)$ étant croissante.

Krasovskij démontre que sous les hypothèses H_1 la solution $x \equiv 0$ du système (1) est asymptotiquement stable.

Remarque 1. Notre exemple démontre que l'hypothèse (2.4) du théorème de Krasovskij est essentielle. Dans ce cas on a $f(r) = r$.

Remarque 2. Notre exemple montre aussi que dans la note [2] de Mansurov la démonstration (et peut être aussi les théorèmes) doit être modifiée. Au lieu du théorème de Razumichin c'est le théorème de Krasovskij qui doit être appliqué (par exemple avec $f(r) = ar$, où $a > 1$).

Travaux cités

[1] Н. Н. Красовский, *Об асимптотической устойчивости систем с последействием*, Прикладная математика и механика 20, 4 (1956).

[2] К. Мансуров, *Об устойчивости линейных систем с запаздываниями и их применения*, Академия Наук Казахской ССР (1965).

[3] Б. С. Разумихин, *Об устойчивости систем с запаздыванием*, Прикладная математика и механика 20, 4 (1956).

Reçu par la Rédaction le 5. 10. 1967