ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
VIII (1965)

W. SOBIESZEK (Gliwice)

O PEWNEJ KLASIE WARUNKOWYCH ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH

W pracy formułuje się i udowadnia trzy proste twierdzenia oraz definiuje klasę Ω warunkowych zagadnień ekstremalnych dla funkcji n zmiennych. Zagadnienia klasy Ω występują często w badaniach operacyjnych (por. [7]), a udowodnione twierdzenia mają zastosowanie przy rozwiązywaniu i badaniu struktury rozwiązań tych zagadnień. Rozważany w pracy przykład zagadnienia klasy Ω wyjaśnia, w jaki sposób stosuje się te twierdzenia.

Na wstępie podamy kilka pojęć i oznaczeń.

Literą R będziemy dalej oznaczali obszar płaski

$$R = \underset{x,y}{E}\{x \in I,\ a(x) \leqslant y \leqslant b(x)\}, \tag{1}$$

gdzie o funkcjach $a(x)$ i $b(x)$ założymy, że są ciągłe w przedziale I i spełniają nierówność $a(x) \leqslant b(x)$.

Zauważmy, że każdy przekrój zbioru R prostą prostopadłą do osi x jest odcinkiem domkniętym

$$R_x = \underset{y}{E}\{a(x) \leqslant y \leqslant b(x)\}. \tag{1'}$$

Zbiór punktów

$$Q = \underset{x,y}{E}\{x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2,\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2;\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

będziemy nazywali *odcinkiem* łączącym punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

Zbiór R będziemy nazywali *wypukłym*, jeżeli dla każdych jego dwu punktów (x_1, y_1), (x_2, y_2) łączący je odcinek Q zawarty jest w zbiorze R.

Funkcję $f(x)$ będziemy nazywali *wypukłą* w przedziale $\langle a, b\rangle$, jeżeli dla każdych dwóch liczb $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ i dla każdej liczby $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ spełniona jest nierówność

$$f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Funkcję $f(x)$ będziemy nazywali *wklęsłą*, gdy w analogicznych warunkach lewa strona jest niemniejsza od prawej. Z wypukłości funkcji w przedziale $\langle a, b\rangle$ wynika jej ciągłość w przedziale (a, b) (por. [3]).

Silną wypukłość (wklęsłość) definiujemy żądając dodatkowo, aby dla $x_1 \neq x_2$ i $\lambda \in (0, 1)$ zachodziła ostra nierówność.

Funkcję $F(x, y)$ będziemy nazywali *wypukłą w obszarze R*, jeżeli dla każdych dwu punktów (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in R$ i każdej liczby $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ spełniona jest nierówność

$$F[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2, (1-\lambda)y_1+\lambda y_2] \leqslant (1-\lambda)F(x_1, y_1)+\lambda F(x_2, y_2).$$

Funkcja *wklęsła w obszarze R* spełnia nierówność przeciwną. Przy definicji *silnej wypukłości (wklęsłości) w obszarze R* dodatkowo żądamy, żeby dla $x_1 \neq x_2$ lub $y_1 \neq y_2$ i $\lambda \in (0, 1)$ zachodziła ostra nierówność. Funkcję $F(x, y)$ nazwiemy *wypukłą względem zmiennej y w obszarze R*, jeżeli dla każdych dwu punktów (x_0, y_1), $(x_0, y_2) \in R$ i każdego $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ zachodzi nierówność

$$F[x_0, (1-\lambda)y_1+\lambda y_2] \leqslant (1-\lambda)F(x_0, y_1)+\lambda F(x_0, y_2).$$

Postulując przeciwną nierówność uzyskamy definicję *wklęsłości funkcji $F(x, y)$ względem y*. Analogicznie definiujemy *wypukłość* i *wklęsłość funkcji $F(x, y)$ względem zmiennej x*. Łatwo zauważyć, że z wypukłości (wklęsłości) funkcji wynika jej wypukłość (wklęsłość) względem każdej ze zmiennych, ale nie odwrotnie.

Niech $G(x, y)$ będzie funkcją ciągłą w obszarze R. Funkcję

$$f(x) = \min_{y \in R_x} G(x, y)$$

będziemy nazywali *funkcją minimalną*. Każdą funkcję $y(x)$(1) spełniającą warunek

$$f(x) = G[x, y(x)]$$

nazwiemy *minimalną funkcją rozdziału*. Analogicznie definiuje się *funkcję maksymalną* i *maksymalną funkcję rozdziału*.

Obecnie sformułujemy i udowodnimy zapowiedziane wyżej

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli $G(x, y)$ jest funkcją ciągłą w obszarze R, to funkcje minimalna i maksymalna są ciągłe w przedziale I.*

Dowód przeprowadzimy tylko dla funkcji minimalnej. Niech x_0 będzie dowolną, ale chwilowo ustaloną liczbą z przedziału I, a ciąg x_n dowolnym ciągiem liczb z przedziału I, zbieżnym do x_0. Przyporządkujmy ciągowi x_n ciąg $y(x_n)$ w ten sposób, aby

(2) $$y(x_n) \in R_{x_n};$$

(3) $$f(x_n) = G[x_n, y(x_n)] \leqslant G(x_n, y_n) \quad \text{dla każdego } y_n \in R_{x_n};$$

(4) $$f(x_0) = G(x_0, y_0) \leqslant G(x_0, y) \quad \text{dla każdego } y \in R_{x_0}.$$

(1) W przypadku ciągłości funkcji $G(x, y)$ w obszarze R istnienie funkcji $y(x)$ jest zagwarantowane.

Niech $\bar{x}_n$ będzie ciągiem liczb z przedziału I zbieżnym do x_0 i takim, że

(5) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = \lim_{n\to\infty} G[\bar{x}_n, y(\bar{x}_n)].$$

Ciąg $y(\bar{x}_n)$ spełnia nierówność

(6) $$a(\bar{x}_n) \leqslant y(\bar{x}_n) \leqslant b(\bar{x}_n),$$

gdzie $a(\bar{x}_n)$ i $b(\bar{x}_n)$, na mocy ciągłości funkcji $a(x)$ i $b(x)$, są ciągami zbieżnymi odpowiednio do liczb $a(x_0)$ i $b(x_0)$. Z ograniczoności ciągu $y(\bar{x}_n)$ i z (6) wynika istnienie podciągu $y(\bar{x}_{n_k})$ zbieżnego do pewnej liczby $\bar{y} \in R_{x_0}$. Na mocy ciągłości funkcji $G(x, y)$ otrzymujemy

(7) $$\lim_{k\to\infty} G[\bar{x}_{n_k}, y(\bar{x}_{n_k})] = G(x_0, \bar{y}).$$

Do ciągu $\bar{x}_{n_k}$ można dobrać ciąg $\bar{y}_{n_k} \to y_0$ taki, że $\bar{y}_{n_k} \in R_{\bar{x}_{n_k}}$. Z (3) wynika

(8) $$G[\bar{x}_{n_k}, y(\bar{x}_{n_k})] \leqslant G(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}),$$

a z ciągłości funkcji $G(x, y)$

(9) $$\lim_{k\to\infty} G(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) = G(x_0, y_0).$$

Z (7), (8) i (9) wynika

(10) $$G(x_0, \bar{y}) \leqslant G(x_0, y_0).$$

Uwzględniając (4) i (10) mamy

$$G(x_0, \bar{y}) = G(x_0, y_0).$$

Ponieważ ciąg $G[\bar{x}_{n_k}, y(\bar{x}_{n_k})]$ jest podciągiem ciągu zbieżnego $G[\bar{x}_n, y(\bar{x}_n)]$, więc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) = G(x_0, y_0) = f(x_0).$$

Rozumując analogicznie można wykazać, że

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) = G(x_0, y_0) = f(x_0),$$

co oznacza ciągłość funkcji $f(x)$ w przedziale I.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli*

(a) $a(x)$ *jest funkcją wypukłą w przedziale* I;

(b) $b(x)$ *jest funkcją wklęsłą w przedziale* I;

(c) $G(x, y)$ *jest funkcją wypukłą w obszarze* R,

to funkcja minimalna $f(x) = \min_{y \in R_x} G(x, y)$ *jest funkcją wypukłą w przedziale* I (²).

(²) Analogiczne twierdzenie orzekające wklęsłość funkcji maksymalnej $f(x) = \max_{y \in R_x} G(x, y)$ jest prawdziwe po zastąpieniu założenia (c) założeniem

(c′) $G(x, y)$ jest funkcją wklęsłą w obszarze R.

Dowód. Weźmy dowolne dwie liczby $x_1, x_2 \epsilon I$ i liczbę $\lambda \epsilon \langle 0, 1 \rangle$. Z założenia (c) wynika istnienie liczb y_1, y_2 takich, że

$$f(x_1) = G(x_1, y_1) \quad \text{i} \quad (x_1, y_1) \epsilon R,$$
$$f(x_2) = G(x_2, y_2) \quad \text{i} \quad (x_2, y_2) \epsilon R.$$

Z założeń (a) i (b) wynika wypukłość obszaru R. Z wypukłości funkcji $G(x, y)$ mamy

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) = (1-\lambda)G(x_1, y_1) + \lambda G(x_2, y_2) \geqslant$$
$$\geqslant G[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2].$$

Z wypukłości zbioru R wynika, że odcinek łączący punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2) należy do zbioru R. Stąd na mocy założenia (c) wynika, że

$$G[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] \geqslant f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2]$$

i ostatecznie

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geqslant f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2].$$

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli*

(a) *$G(x, y)$ jest funkcją ciągłą w obszarze R;*

(b) *$y(x)$ jest jedyną*(3) *minimalną funkcją rozdziału lub jedyną maksymalną funkcją rozdziału,*

to $y(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale I.

Dowód przeprowadzimy dla minimalnej funkcji rozdziału. Przypuśćmy, że $y(x)$ jest nieciągła w punkcie $x_0 \epsilon I$. Wówczas istnieje ciąg x'_n punktów przedziału I, oraz pewna liczba $\varepsilon' > 0$, takie, że

$$x'_n \to x_0, \tag{11}$$
$$|y(x'_n) - y(x_0)| \geqslant \varepsilon' \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Z nierówności $a(x'_n) \leqslant y(x'_n) \leqslant b(x'_n)$ wynika istnienie podciągu $y(x'_{n_k})$ zbieżnego do pewnej liczby $y' \epsilon \langle a(x_0), b(x_0) \rangle$. Z ciągłości funkcji minimalnej wynika, że

$$G(x_0, y') = G[x_0, y(x_0)] = f(x_0). \tag{13}$$

Z (12) i (13) wynika istnienie dwóch różnych punktów $(x_0, y(x_0))$ i (x_0, y'), w których funkcja $G(x, y)$ osiąga minimum, co sprzeczne jest z jednowartościowością funkcji $y(x)$ w punkcie x_0.

Obecnie podamy definicję klasy Ω. Każde warunkowe zagadnienie ekstremalne dla funkcji n zmiennych będzie należało do klasy Ω wtedy i tylko wtedy, gdy

(3) Jedyność funkcji $y(x)$ może być zagwarantowana przez założenie np. silnej wypukłości (wklęsłości) lub różnowartościowości funkcji $G(x, y)$ względem zmiennej y.

(a) operację ekstremum warunkowego dla funkcji n zmiennych da się zastąpić superpozycją cząstkowych operacji ekstremów warunkowych funkcji jednej zmiennej;

(b) k-ta operacja cząstkowa ma postać

$$\max_{a_k(x)\leqslant y\leqslant b_k(x)} G_k(x,y) \quad \text{lub} \quad \min_{a_k(x)\leqslant y\leqslant b_k(x)} G_k(x,y),$$

gdzie $G_k(x,y)$ jest funkcją ciągłą w obszarze

$$R^{(k)} = \underset{x,y}{E}\{x\in I_k,\ a_k(x)\leqslant y\leqslant b_k(x)\},$$

gdzie $a_k(x)$ i $b_k(x)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale I_k.

Klasa Ω jest węższa od klasy warunkowych zagadnień ekstremalnych rozważanych w ujęciu programowania dynamicznego (por. [1],[2]). Zanim wyjaśnimy dokładniej celowość wprowadzenia definicji klasy Ω, rozważmy następujący przykład.

Znaleźć

$$f_n(x) = \min_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \tag{14}$$

przy spełnieniu warunków

$$\begin{gathered} a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, \quad i=1,2,\ldots,n,\\ \sum_{i=1}^{n}\psi_i(x_i) = x. \end{gathered} \tag{15}$$

Dla ustalonego $x\in\langle\sum_{i=1}^{n}\psi_i(a_i), \sum_{i=1}^{n}\psi_i(b_i)\rangle$ zagadnienie polega na znalezieniu minimum funkcji $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)$ w zbiorze będącym częścią wspólną prostopadłościanu $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ z hiperpowierzchnią $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x_i)=x$. Gdy x będzie parametrem przebiegającym przedział $\langle\sum_{i=1}^{n}\psi_i(a_i), \sum_{i=1}^{n}\psi_i(b_i)\rangle$, minimum będzie funkcją (14). Już szczególne przypadki tego zagadnienia znajdują szereg ciekawych zastosowań. Przytoczymy dwa z nich.

Problem minimalnych kosztów produkcji([4]). Produkuje się jakieś dobro materialne w czasie n okresów. W końcu n-tego okresu ma być wyprodukowany zapas S. Niech x_i oznacza ilość jednostek wyprodukowanych w i-tym okresie, $\varphi_i(x_i)$ — koszta produkcji, b_i — zdolność produkcyjną. Trzeba znaleźć taki plan produkcji $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, aby

a) łączne koszta produkcji $\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)\right)$ były najmniejsze,

([4]) Problem ten rozważał M. Klein [6].

b) nie przekroczyć w żadnym okresie zdolności produkcyjnej ($0 \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$),

c) suma produkcji w poszczególnych okresach była równa zaplanowanej z góry wielkości S $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = S\right)$.

Problem oszczędności materiałów substytucyjnych(⁵). Niech M_1 i M_2 będą dwoma materiałami wzajemnie zastępowalnymi, potrzebnymi do produkcji dóbr $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Niech x_i oznacza ilość jednostek materiału M_1 zużywaną przy produkcji dobra z_i, y_i ilość jednostek materiału M_2. Niech $y_i = \varphi_i(x_i)$ będzie i-tą funkcją zapotrzebowania odpowiednio na materiały M_1 i M_2 (zależność $y_i = \varphi_i(x_i)$ ustala się ze znajomości technologii procesu produkcji). Ilość x_i nie może przekraczać pewnej liczby b_i (warunki technologiczne), zaś $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$, gdzie x jest zapasem materiału M_1. Należy zminimalizować łączne zużycie $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)$ materiału M_2.

Wracając do ogólnego zagadnienia (14) załóżmy, że dane funkcje φ_i i ψ_i są ciągłe w przedziałach $\langle a_i, b_i \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a funkcje ψ_i są ponadto ściśle rosnące. Stosując zasadę optymalności (por. [1]) mamy

$$f_1(x) = \varphi_1[\psi_1^{-1}(x)],$$

$$f_k(x) = \min_{x_k} \{\varphi_k[\psi_k^{-1}(x_k)] + f_{k-1}(x - x_k)\}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n,$$

gdzie przy ustalonym argumencie x minimum po prawej stronie jest wzięte w zbiorze określonym nierównościami

$$\psi_k(a_k) \leqslant x_k \leqslant \psi_k(b_k),$$

$$x - \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i(b_i) \leqslant x_k \leqslant x - \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i(a_i).$$

Dzięki tej rekurencyjnej definicji ciągu $\{f_k\}$ łatwo już zauważyć, że rozważane zagadnienie ekstremalne należy do klasy zagadnień Ω. Stosując zasadę indukcji względem k i korzystając z twierdzeń 1, 2 i 3 łatwo wykazać, przy odpowiednich założeniach o danych funkcjach φ_i i ψ_i, ciągłość i wypukłość funkcji $f_n(x)$ oraz ciągłość funkcji $x_n(x)$ w przedziale $\left\langle \sum_{i=1}^{n} \psi_i(a_i), \sum_{i=1}^{n} \psi_i(b_i) \right\rangle$.

Udowodnione w tej pracy twierdzenia oraz wprowadzone pojęcie klasy Ω uwalniają nas od konieczności badania odpowiednich własności szczególnych zagadnień ekstremalnych klasy Ω (por. [1], [5]).

(⁵) Analogiczne zagadnienie rozważał Z. Galas [4].

Prace cytowane

[1] R. Bellman, *Dynamic programming*, Princeton 1957.

[2] — i S. Dreyfus, *Applied dynamic programming*, Princeton 1962.

[3] N. Bourbaki, *Les structures fondamentales de l'analyse* (Livre IV: *Fonctions d'une variable réelle*), Paris 1951.

[4] Z. Galas, *Wyznaczanie optymalnego planu produkcji materiałów substytucyjnych*, Przegląd Statystyczny 7 (1960), str. 127-142.

[5] W. Karusch, *A theorem in convex programming*, Naval Research Logistics Quarterly 6 (1959), str. 245-260.

[6] M. Klein, *Some production planning problems*, Naval Research Logistics Quarterly 4 (1957), str. 269-286.

[7] W. Sadowski, *Teoria podejmowania decyzji*, Warszawa 1960.

Praca wpłynęła 10. 1. 1964

В. СОБЕШЕК (Гливице)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УСЛОВНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

РЕЗЮМЕ

В работе автор формулирует и доказывает три простые утверждения. Принимающая в этих утверждениях участие область R и отрезок R_x определены формулами (1) и (1'). О функциях $a(x)$ и $b(x)$ предполагается, что они непрерывны в интервале I и удовлетворяют неравенству $a(x) \leqslant b(x)$.

Теорема 1. *Если $G(x,y)$ является непрерывной функцией в области R, то функции*

$$f(x) = \min_{y\in R_x} G(x,y) \quad \text{и} \quad f(x) = \max_{y\in R_x} G(x,y)$$

непрерывны в I.

Теорема 2. *Если*

а) *$a(x)$ выпуклая функция в интервале I,*

б) *$b(x)$ вогнутая функция в интервале I,*

в) *$G(x,y)$ выпуклая функция в области R,*

то функция $f(x) = \min_{y\in R_x} G(x,y)$ является выпуклой функцией в интервале I.

Верно аналогичная теорема о вогнутости функции $f(x) = \max_{y\in R_x} G(x,y)$ если заменить предположение в) предположением

в') $G(x,y)$ вогнутая функция в области R.

Теорема 3. *Если*

а) *$G(x,y)$ непрерывная функция в области R,*

б) *$y(x)$ единственная функция, удовлетворяющая условию*

$$G(x,y(x)) = \min_{y\in R_x} G(x,y) \quad \text{при} \quad x\in I$$

или единственная функция, удовлетворяющая условию

$$G(x,y(x)) = \max_{y\in R_x} G(x,y) \quad \text{при} \quad x\in I$$

то $y(x)$ непрерывная функция в интервале I.

Эти теоремы применяются при решении и исследованию структуры класса Ω (определенного в этой работе) условных экстремальных задач для функции n переменных.

Каждая условная экстремальная задача для функции n переменных принадлежит к классу Ω тогда и только тогда, когда

а) операции условного экстремума для функции n переменных можно заменить суперпозицией частных операций условных экстремов функций одной переменной,

б) k-тая частная операция имеет вид

$$\max_{a_k(x)\leqslant y\leqslant b_k(x)} G_k(x,y) \quad \text{или} \quad \min_{a_k(x)\leqslant y\leqslant b_k(x)} G_k(x,y),$$

где $G_k(x,y)$ непрерывная функция в области

$$R^{(k)} = \underset{x,y}{E}\{x\in I_k,\ a_k(x)\leqslant y\leqslant b_k(x)\}.$$

Класс Ω уже класса условных экстремальных задач, рассматриваемых в смысле динамического програмирования ([1], [2]). Однако введение этого класса целесообразно, так как дает возможность избежать доказательства частных случаев теорем 1, 2, 3 для конкретных экстремальных задач класса Ω (см. например [1], стр. 37, или [5], стр. 255).

W. SOBIESZEK (Gliwice)

ON A CERTAIN CLASS OF CONDITIONAL EXTREMAL PROBLEMS

SUMMARY

The author formulates and proves three simple theorems. The domain R and the segment R_x occurring in those theorems are defined by formulas (1) and (1′). The functions $a(x)$ and $b(x)$ are assumed to be continuous in the interval I and to satisfy the inequality $a(x)\leqslant b(x)$.

THEOREM 1. *If $G(x,y)$ is a continuous function in the domain R, then the functions*

$$f(x) = \min_{y\in R_x} G(x,y) \quad \textit{and} \quad f(x) = \max_{y\in R_x} G(x,y)$$

are continuous in the interval I.

THEOREM 2. *If*

(a) *$a(x)$ is a convex function in the interval I;*

(b) *$b(x)$ is a concave function in the interval I;*

(c) *$G(x,y)$ is a convex function in the domain R;*

then the function $f(x) = \min_{y\in R_x} G(x,y)$ is a convex function in the interval I.

An analogous theorem stating the concavity of the function $f(x) = \max_{y\in R_x} G(x,y)$ is true if we replace assumption (c) by the assumption:

(c′) *$G(x,y)$ is a concave function in the domain R.*

THEOREM 3. *If*

(a) *$G(x,y)$ is a continuous function in the domain R;*

(b) *$y(x)$ is the only function satisfying the condition*

$$G(x,y(x)) = \min_{y\in R_x} G(x,y) \quad \textit{for} \quad x\in I$$

or the only function satisfying the condition

$$G(x, y(x)) = \max_{y \in R_x} G(x, y) \quad \textit{for} \quad x \in I,$$

then $y(x)$ *is a continuous function in the interval* I.

These theorems can be used in solving and investigating the structure of the class Ω, defined in the paper, of conditional extremal problems for a function of n variables.

Every conditional extremal problem for a function of n variables belongs to class Ω if and only if

(a) the operation of conditional extremum for a function of n variables can be replaced by a superposition of partial operations of conditional extrema of a function of one variable.

(b) the k-th partial operation is of the form

$$\max_{a_k(x) \leqslant y \leqslant b_k(x)} G_k(x, y) \quad \text{or} \quad \min_{a_k(x) \leqslant y \leqslant b_k(x)} G_k(x, y)$$

where $G_k(x, y)$ is a continuous function in the domain

$$R^{(k)} = \underset{x,y}{E}\{x \in I_k,\ a_k(x) < y < b_k(x)\}.$$

The class Ω is narrower than the class of conditional extremal problems considered from the point of view of dynamic programming ([1], [2]). Its introduction, however, is advisable since it permits us to avoid proving particular cases of theorems 1, 2, 3 for concrete extremal problems of the class Ω (cf. [1] p. 37 or [5], p. 255).