

F. MISZTAŁ (Warszawa)

*METODA PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ
RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH*

Równanie o pochodnych cząstkowych, w którym szukana funkcja zależy od n zmiennych, można rozwiązać w przybliżeniu zastępując pochodne względem niektórych zmiennych przez odpowiednie różnice skończone. W przypadku szczególnym, gdy zastąpimy pochodne względem $n-1$ zmiennych przez różnice skończone, równanie sprowadzi się w rozważanym przedziale do równania różniczkowego zwyczajnego.

Dzieląc obszar, w którym jest określone równanie różniczkowe cząstkowe, na skończoną liczbę przedziałów i stosując do każdego z nich opisaną metodę otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych, który można rozwiązać sposobami klasycznymi. Jeśli funkcja określona ściśle przez dane równanie różniczkowe cząstkowe jest ciągła w całym obszarze, to jest ona określona w przybliżeniu przez układ równań otrzymany w podany sposób. Przybliżenie jest tym lepsze, im mniejsze są odchylenia funkcji w przyjętych przedziałach od przebiegu liniowego między jej wartościami na krajach przedziałów.

Proponowaną metodę omówimy szczegółowo na przykładzie¹⁾ następującego równania:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

przyjmując dla uproszczenia, że zachodzi ono w obszarze od $x=0$ do $x=x_0$ i od $y=0$ do $y=y_0$. Dzieląc przyjęty obszar na skończoną liczbę $n+1$ przedziałów (pasków) o szerokości $y_1=y_2-y_1=\dots=y_0-y_n=\Delta y$ i zastępując pochodne cząstkowe względem y wzdłuż każdej z prostych $y=y_i$ przez odpowiednie różnice skończone, otrzymujemy przybliżony układ n równań różniczkowych zwyczajnych

$$(2a) \quad \frac{d^2 z_i}{dx^2} = z_i'' = -a \frac{\Delta^2 z_i}{\Delta y^2} = -\frac{a}{\Delta y^2} (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) = \\ = -a^2 (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

¹⁾ Możliwe jest uogólnienie metody i oszacowanie jej błędu. Zapraszamy Czytelników do zrobienia tych dwóch kroków uzupełniających. (Redakcja.)

gdzie

$$\begin{aligned} k_1 &= p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + 1, & \varrho k_1 &= p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + 2, \\ k_2 &= p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} + 1, & \varrho k_2 &= p_2 - p_1, \\ & \dots & & \dots \\ k_i &= p_i + p_{i+1} + \dots + p_{n-1} + 1, & \varrho k_i &= p_i - p_{i-1}, \\ & \dots & & \dots \\ k_{n-1} &= p_{n-1} + 1, & \varrho k_{n-1} &= p_{n-1} - p_{n-2}, \\ k_n &= 1, & \varrho k_n &= 1 - p_{n-1} \end{aligned}$$

oraz

$$\varrho k_0 \bar{z}_0 = -(p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + 1) z_0 - z^0 = \text{const.}$$

Z warunku postawionego przy równaniu (3) wynika n równań

$$(4) \quad \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + 1}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + 2} = \frac{p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} + 1}{p_2 - p_1} = \dots$$

$$\dots = \frac{p_{n-1} + 1}{p_{n-1} - p_{n-2}} = \frac{1}{1 - p_{n-1}},$$

które dla każdego czynnika p_i wyznaczają n wartości²⁾: $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}$.

Wstawiając te wartości kolejno w równanie (3) otrzymamy n tej samej postaci równań liniowych

$$(5) \quad k_{1j} z_1'' + k_{2j} z_2'' + \dots + k_{nj} z_n'' = \varrho_j \alpha^2 (k_{1j} z_1 + k_{2j} z_2 + \dots + k_{nj} z_n + k_0 \bar{z}_0),$$

czyli

$$\sum_{i=1}^n k_{ij} \frac{d^2 z_i}{dx^2} = \varrho_j \alpha^2 \left(\sum_{i=1}^n k_{ij} z_i + k_0 \bar{z}_0 \right) \quad \text{dla } j=1, 2, \dots, n.$$

Wyrażenie w nawiasie po prawej stronie każdego z równań (5) w tej postaci ($k_0 \bar{z}_0 = \text{const}$) po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem x staje się tożsamościowo równe stronie lewej; podstawiając więc zamiast tego wyrażenia $u_j(x)$ otrzymujemy

$$(6) \quad \frac{d^2 u_j}{dx^2} = u_j'' = \varrho_j \alpha^2 u_j = \alpha_j^2 u_j.$$

²⁾ Metodą tą można sprowadzić dowolny układ równań typu

$$\sum_{i=1}^n A_{ij} \frac{d^2 z_i}{dx^2} = a_{j0} z_0 + \sum_{i=1}^n a_{ij} z_i \quad \text{dla } j=1, 2, \dots, n$$

do jednego równania postaci (3).

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest

$$7) \quad u = C_{1j} e^{\bar{a}_j x} + C_{2j} e^{-\bar{a}_j x}.$$

W ostatecznym więc wyniku, po wyznaczeniu stałych C_{1j} i C_{2j} z warunków brzegowych, otrzymujemy n równań liniowych (dla $j=1, 2, \dots, n$),

$$\begin{aligned} u_j &= k_{1j} z_1 + k_{2j} z_2 + \dots + k_{nj} z_n + k_0 \bar{z}_0 = \sum_{i=1}^n k_{ij} z_i + k_0 \bar{z}_0 = \\ &= C_{1j} e^{\bar{a}_j x} + C_{2j} e^{-\bar{a}_j x} = \Phi_j(x), \end{aligned}$$

z których można wyznaczyć przebieg funkcji $z_i = \Psi_i(x)$ wzdłuż linii (równoległych) $y = y_1, y_2, \dots, y_n$.

W warunkach innych niż w opisanym przypadku, w którym założono, że w równaniach (2) mamy $z_0 = \text{const}$ oraz $z_{n+1} = \text{const}$, rozwiązanie równań (5) będzie zależało od postaci funkcji określającej te wielkości.

Przybliżoną metodę rozpatrzoną na przykładzie równania (1) można stosować, jak to było wspomniane na początku, w ogóle do dowolnych równań o pochodnych cząstkowych różnych rzędów, gdzie szukana funkcja jest zależna od wielu zmiennych. Tak na przykład dla równania

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$

mielibyśmy, podobnie jak w rozpatrzonym przykładzie, układ zwykłych równań różniczkowych

$$\frac{d^2 z_i}{dx^2} + \frac{\Delta^2 z_i}{\Delta y^2} \cdot \frac{dz_i}{dx} + \frac{\Delta^3 z_i}{\Delta y^3} = 0$$

albo

$$\frac{d^2 z_i}{dx^2} + \frac{1}{\Delta y^2} (z_{i+1} - 2z_i - z_{i-1}) + \frac{1}{\Delta y^3} (z_{i+2} - 3z_{i+1} + 3z_i - z_{i-1}) = 0$$

dla $i=1, 2, \dots, n$.

W przypadku równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

kiedy szukana funkcja u jest zależna od trzech zmiennych, dzieląc dany obszar na $n+1$ równych przedziałów (Δy) wzdłuż y i na $m+1$ takich

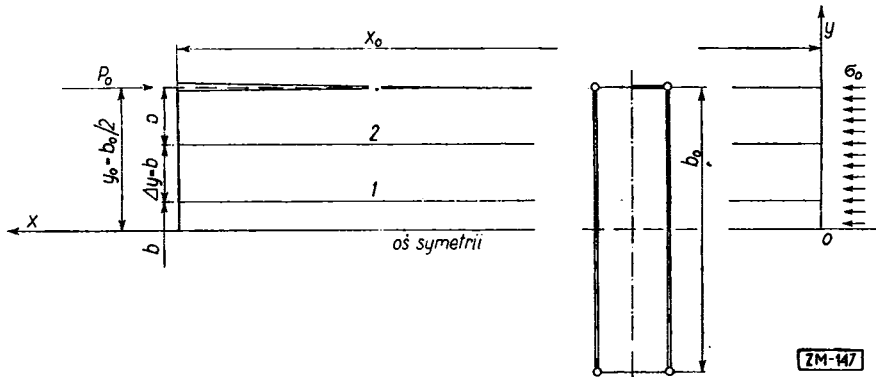
przedziałów (Δz) wzdłuż z , otrzymalibyśmy układ nm zwykłych równań różniczkowych

$$\frac{d^2 u_{ij}}{dx^2} = - \frac{\Delta^2 u_{ij}}{\Delta y^2} - \frac{\Delta^2 u_{ij}}{\Delta z^2} =$$

$$= - \frac{1}{\Delta y^2} (u_{(i+1)j} - 2u_{ij} + u_{(i-1)j}) - \frac{1}{\Delta z^2} (u_{i(j+1)} - 2u_{ij} - u_{i(j-1)})$$

dla $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$, gdzie $u_{ij} = u(x, y_i, z_j)$.

W obydwóch przypadkach warunki brzegowe dają dalsze równania: w pierwszym 2, w drugim $n+m+4$.



Rys. 1. Schemat symetrycznej i symetrycznie obciążonej pryzmatycznej belki cienkościennej o prostokątnym przekroju jednoobwodowym

Opisana przybliżona metoda może być w wielu przypadkach bardzo dogodna, zwłaszcza w uzupełnieniu wykreślnym jako metoda numeryczno-wykreślna. Wyznaczając, np. w rozpatrzonym przypadku równania (1), analitycznie przebieg funkcji $z_i = \Psi_i(x)$ wzdłuż kilku linii równoległych y_1, y_2, \dots można następnie wykreślić wyznaczyć dowolną liczbę krzywych przebiegu $z(x, y)$ wzdłuż dowolnych linii poprzecznych, otrzymując w ten sposób siatkę wykresów określających wielkość $z(x, y)$ w całym obszarze równania (1). Często już rozłożenie równania (1) na dwa lub trzy zwykłe równania różniczkowe daje dostateczną dokładność, co najprościej będzie pokazać na przykładzie liczbowym.

PRZYKŁAD. Za przykład może służyć przypadek z teorii sprężystości przedstawiony na rysunku 1. Jest to cienkościenna belka pryzmatyczna o jednoobwodowym przekroju prostokątnym, z jednej strony podparta sztywnie w czterech punktach narożnych, a z drugiej strony obciążona momentem zginającym w płaszczyźnie xy .

Wobec symetrii konstrukcji i obciążeń można rozpatrywać tylko połowę powłoki, np. wierzchniej, zaznaczonej na rysunku.

W rozpatrywanym przypadku dla naprężeń normalnych (σ) w przekrojach poprzecznych takiej jednolitej powłoki, z warunku ciągłości przemieszczeń wynika (w zakresie stateczności) równanie (zob. [1])

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{G}{E} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0,$$

gdzie E i G oznaczają stałe sprężystości materiału powłoki.

Jeżeli założymy, że powłoka jest zakończona w narożach wzdłużnymi elementami wprowadzającymi siły skupione, tak ukształtowanymi, że zapewniają one stałe naprężenia wzdłuż jej narożnych brzegów równe σ_0 , to otrzymamy dla niej następujące warunki brzegowe:

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma(0, y) &= \sigma_0, & \sigma(x_0, y) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma(x, 0)}{\partial y} &= 0, & \sigma(x, y_0) &= \sigma_0. \end{aligned}$$

Stosując w tym przykładzie opisaną metodę i dzieląc całą powłokę na 5 przedziałów o równych szerokościach b , wyznaczmy przebieg naprężeń σ_1 i σ_2 wzdłuż linii podziału jej symetrycznej połowy 1 i 2 (rys. 1). Rozkładamy więc równanie (9) na dwa zwykłe równania różniczkowe drugiego rzędu:

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_1}{dx^2} &= \sigma_1'' = a^2(\sigma_1 - \sigma_2), \\ \frac{d^2 \sigma_1}{dx^2} + \frac{d^2 \sigma_2}{dx^2} &= \sigma_1'' + \sigma_2'' = a^2(\sigma_2 - \sigma_0), \quad \text{gdzie } a^2 = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{G}{E}. \end{aligned}$$

W tym przypadku, wobec warunku brzegowego $\partial \sigma / \partial y = 0$ dla $y = 0$, odpada w obydwóch równaniach wyraz $\sigma_0 - \sigma_1 = 0$ oraz według warunku $\sigma = \sigma_0$ dla $y = y_0$ ostatni wyraz w drugim równaniu $\sigma_{n+1} = \sigma_3 = \sigma^0 = \sigma_0$.

Mnożąc drugie równanie przez czynnik p oraz dodając obydwa do siebie otrzymujemy

$$(12) \quad (p+1)\sigma_1'' + p\sigma_2'' = a^2(\sigma_1 + (p-1)\sigma_2 - p\sigma_0).$$

Stąd wynika dla czynnika p równanie

$$\frac{p+1}{1} = \frac{1}{p-1}$$

o dwóch pierwiastkach

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,618, \quad p_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0,618.$$

Podstawiając u w równania (12) za wyrażenie w nawiasie i różniczkując je dwukrotnie względem x otrzymujemy

$$(13) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = u'' = \frac{a^2}{p+1} u = \bar{a}^2 u,$$

a stąd rozwiązanie ogólne w postaci

$$u = C_1 e^{\bar{a}x} + C_2 e^{-\bar{a}x}.$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych według (10)

$$\begin{aligned} x=0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0, \quad u=0, \\ x=x_0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0. \quad u = -p\sigma_0, \end{aligned}$$

wstawiając kolejno wartości p_1 i p_2 , dochodzimy do związków

$$(14) \quad \begin{aligned} u_1 = \sigma_1 + (p_1 - 1)\sigma_2 - p_1\sigma_0 &= -p_1\sigma_0 \frac{\sinh \bar{a}_1 x}{\sinh \bar{a}_1 x_0} = -p_1\sigma_0 \Phi_1, \\ u_2 = \sigma_1 + (p_2 - 1)\sigma_2 - p_2\sigma_0 &= -p_2\sigma_0 \frac{\sinh \bar{a}_2 x}{\sinh \bar{a}_2 x_0} = -p_2\sigma_0 \Phi_2. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu ostatnich równań otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} &= 1 - \frac{p_1^2}{p_1 - p_2} \Phi_1 + \frac{p_2^2}{p_1 - p_2} \Phi_2 = 1 - 1,17 \Phi_1 + 0,17 \Phi_2, \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_0} &= 1 - \frac{p_1}{p_1 - p_2} \Phi_1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \Phi_2 = 1 - 0,724 \Phi_1 - 0,276 \Phi_2. \end{aligned}$$

Przyjmując w rozpatrywanym przykładzie całkowitą szerokość powłoki $b_0 = 75$ cm (rys. 1), tj. $b = b_0/5 = 15$ cm, mamy

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{G}{E}} = \frac{1}{15} \sqrt{\frac{3}{8}} \approx 0,0408 \text{ cm}^{-1}, \\ \bar{a}_1 &= \frac{a}{\sqrt{p_1 + 1}} \approx 0,0252 \text{ cm}^{-1}, \quad \bar{a}_2 = \frac{a}{\sqrt{p_2 + 1}} \approx 0,066 \text{ cm}^{-1}. \end{aligned}$$

Równanie (9) można rozwiązać w założonych warunkach brzegowych również metodą rozwinięcia w szereg Fouriera. Dla porównania podamy to rozwiązanie w gotowej postaci (zob. [1]):

$$(16) \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} + 1 + \frac{4}{\pi} \sum \frac{\sinh a_n x}{\sinh a_n x_0} \cdot \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n} \cos \frac{n\pi y}{2y_0},$$

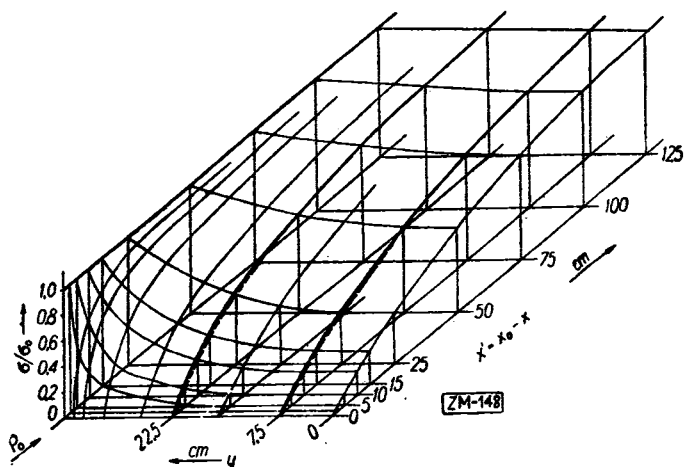
gdzie

$$a_n = \frac{n\pi}{2y_0} \sqrt{\frac{G}{E}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Porównując to rozwiązanie z drugim z równań (15) znajdujemy w rozpatrywanym przypadku ($2y_0 = b_0 = 75$ cm, $y = 22,5$ cm)

$$a_n = \frac{\pi}{122,5} n, \quad \cos \frac{ny}{2y_0} = \cos \frac{3}{10} n.$$

Łatwo można się przekonać, że szereg w równaniu (16) jest powoli zbieżny dla $x = x_0$ i w pobliżu tej wartości, natomiast w dalszych przekrojach jego zbieżność bardzo szybko się polepsza.



Rys. 2. Wykresy naprężeń normalnych (σ) w przekrojach poprzecznych powłoki belki przedstawionej na rysunku 1

— krzywe wyznaczone z równania (16) i proste określone przez warunki brzegowe,

- - - krzywe wyznaczone z równania (15),

— krzywe wyznaczone wykreślnie,

$x_0 \geq 300$ cm

Na rysunku 2 umieszczono razem wykresy naprężeń normalnych (σ/σ_0) w poprzecznych przekrojach powłoki rozpatrywanej w przykładzie belki, wyznaczone z równań (15) i (16) oraz wykreślnie. Widać, że krzywe, wyznaczone metodą przybliżoną na podstawie równań (15), odbiegają tylko nieznacznie na małych odcinkach w pobliżu nieobciążonej krawędzi

powłoki ($x=x_0$) od wykresów otrzymanych z równania (16) będącego ścisłym rozwiązaniem równania (9).

Praca cytowana

[1] F. Misztal, *Wprowadzanie wzdłużnych sił skupionych w cylindrycznych konstrukcjach powłokowych za pomocą elementów o równomiiernej wytrzymałości*, Archiwum Budowy Maszyn I (1955), str. 3-54.

Praca wpłynęła dnia 13. 1. 1955 r.

Ф. МИШТАЛЬ (Варшава)

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

РЕЗЮМЕ

В статье представлен метод, по которому в дифференциальных уравнениях с частными производными, определяющих функцию n переменных, производные по некоторым из этих переменных, в особенности по $n-1$ переменных, можно заменить в определенных пределах соответствующими конечными разностями. В этом частном случае можно, таким образом, получить систему приближенных обыкновенных дифференциальных уравнений, которую уже можно решить классическими методами.

Предлагаемый метод рассмотрен на примере уравнения

$$(*) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

определенного в области $x=0$, $x=x_0$ и $y=0$, $y=y_0$. Деля данную область на $n+1$ равных интервалов, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^r \frac{d^2 z_i}{dx^2} = -\alpha^2 (z_0 - z_1) - (z_r - z_{r+1}) \quad \text{при } r=1, 2, \dots, n.$$

В статье дается метод приведения этой системы к одному уравнению вида

$$\sum_{i=1}^n k_i \frac{d^2 z_i}{dx^2} = \bar{\alpha}^2 (\sum_{i=1}^n k_i z_i + k_0 \bar{z}_0),$$

а затем к системе уравнений вида

$$\sum_{i=1}^n k_{ij} \frac{d^2 z_i}{dx^2} = \bar{\alpha}^2 (\sum_{i=1}^n k_{ij} z_i + k_{j0} \bar{z}_0) \quad \text{при } j=1, 2, \dots, n,$$

общим решением которых является система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n k_{ij} z_i + k_0 \bar{z}_0 = C_{1j} e^{\bar{a}_j x} + C_{2j} e^{-\bar{a}_j x} \quad \text{при } j=1, 2, \dots, n.$$

Приведенный метод иллюстрируется численным примером, причем известно точное решение уравнения (*) при заданных граничных условиях. На этом примере получено по представленному методу удовлетворительное приближенное решение.

F. MISZTAŁ (Warszawa)

METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

The paper presents a method according to which in an equation with partial derivatives defining a function dependent on n variables the derivatives with respect to some variables, and in a particular case with respect to $n-1$ variables, can be replaced in stated intervals by the corresponding finite differences. In this particular case, we obtain a system of approximate ordinary differential equations solvable by means of classical methods.

The method suggested is illustrated on the equation

$$(*) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

given in the region from $x=0$ to $x=x_0$ and from $y=0$ to $y=y_0$. Dividing the given region into $n+1$ equal intervals we obtain a system of n ordinary differential equations of the form

$$\sum_{i=1}^r \frac{d^2 z_i}{dx^2} = -a^2 (z_0 - z_1) - (z_r - z_{r+1}) \quad \text{for } r=1, 2, \dots, n.$$

The paper contains also a method of reducing this system to one equation of the type

$$\sum_{i=1}^n k_i \frac{d^2 z_i}{dx^2} = \bar{a}^2 \left(\sum_{i=1}^n k_i z_i + k_0 \bar{z}_0 \right),$$

and subsequently to a system of the type

$$\sum_{i=1}^n k_{ij} \frac{d^2 z_i}{dx^2} = \bar{a}^2 \left(\sum_{i=1}^n k_{ij} z_i + k_0 \bar{z}_0 \right) \quad \text{for } j=1, 2, \dots, n,$$

whose general solution is the system of linear equations

$$\sum_{i=1}^n k_{ij} z_i + k_0 \bar{z}_0 = C_{1j} e^{\bar{a}_j x} + C_{2j} e^{-\bar{a}_j x} \quad \text{for } j=1, 2, \dots, n.$$

A numerical example for the case where we have the exact solution of equation (*) with given boundary conditions shows that the method presented gives a good approximation to the solution.