ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Sur l'équivalence et les comitants algébriques des objets géométriques abstraits

par S. Midura (Rzeszów)

§ 1. Introduction. Dans la première partie de ce travail nous établissons la relation entre l'équivalence de deux objets géométriques abstraits purement différentiels et l'équivalence des objets géométriques particuliers apparttenant à des objets abstraits donnés (théorèmes 1, 2, 3 et 4).

La seconde partie du travail contient des considérations qui sont analogues à celles de la première, mais se rapportent aux relations entre la notion du comitant algébrique d'un objet géométrique abstrait donné et celle du comitant d'un objet géométrique particulier appartenant à un objet géométrique abstrait donné.

Pour les définitions des notions utilisées dans ce travail nous renvoyons à [2].

I. Equivalence des objets géométriques abstraits

§ 2. Considérons deux objets géométriques abstraits purement différentielles ω et δ avec les lois de transformation:

$$\omega' = F(\omega, l)\,, \quad \omega \in M\,,\ l \in L_n^s\,, \tag{1.1}$$

$$\delta' = G(\delta, l)\,, \quad \delta \in N\,,\ l \in L_n^s\,, \tag{1.2}$$

et dont les fibres sont M et N. Adoptons la définition suivante de l'équivalence des objets géométriques abstraits (voir [2], p. 40):

Définition 1. Les objets géométriques abstraits ω et δ avec les lois de transformation (1.1) et (1.2) s'appellent *équivalents* s'il existe une fonction biunivoque H qui transforme la fibre M en la fibre N

$$\delta = H(\omega)\,, \tag{1.3}$$

telle que la relation (1.3) entraîne

$$\delta' = H(\omega')\,. \tag{1.4}$$

Si nous remplaçons ω' et δ' dans (1.4) par (1.1) et (1.2) nous obtiendrons

$$G[H(\omega), l] = H[F(\omega, l)]\,. \tag{1.5}$$

Comme on le sait (voir [2], p. 44) pour montrer l'équivalence des objets géométriques avec les lois de transformation (1.1) et (1.2) il suffit de prouver que l'équation fonctionnelle (1.5) (où H est la fonction inconnue) possède une solution biunivoque.

Considérons deux objets géométriques particuliers f et g appartenant respectivement aux objets abstraits avec les lois de transformation (1.1) et (1.2). Supposons que ce soient des objets qui, pour un certain système de coordonnées admissible U_0, prennent respectivement les valeurs ω_0 et δ_0, donc

$$f(l) = F(\omega_0, l)\,, \tag{1.1'}$$

$$g(l) = G(\delta_0, l)\,. \tag{1.2'}$$

Si les objets géométriques abstraits avec les lois de transformation (1.1) et (1.2) sont transitifs, dans ce cas les ensembles M et N sont les fibres des objets f et g.

DÉFINITION 2. Deux objets géométriques particuliers f et g sont *équivalents* s'il existe une fonction biunivoque H telle que

$$g(l) = H[f(l)] \tag{1.6}$$

(voir [2], p. 39).

Nous donnerons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour que deux objets géométriques transitifs abstraits soient équivalents.

THÉORÈME 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux objets géométriques abstraits transitifs avec les lois de transformation* (1.1) *et* (1.2) *soient équivalents est qu'il existe deux objets géométriques équivalents particuliers f et g qui appartiennent respectivement aux objets géométriques transitifs abstraits avec les lois de transformation* (1.1) *et* (1.2).

La condition est suffisante. Supposons qu'il existe des objets géométriques équivalents particuliers f et g qui appartiennent respectivement aux objets géométriques abstraits avec les lois de transformation (1.1) et (1.2). Il s'ensuit qu'il existe des éléménts ω_0 et δ_0 qui appartiennent respectivement aux fibres M et N telles que (1.1′) et (1.2′).

Des hypothèses (1.1′) et (1.2′) résulte qu'il existe une fonction biunivoque H qui transforme la fibre M en la fibre N telle que

$$G(\delta_0, l) = H[F(\omega_0, l)] \tag{1.7}$$

pour un l arbitraire de l'ensemble L_n^s. Nous allons montrer que

$$G[H(\omega), l] = H[F(\omega, l)] \tag{1.8}$$

sur l'ensemble $M \times L_n^s$.

Pour un $\bar{\omega}$ arbitraire de la fibre M il existe un élément $\bar{l}$ dans l'ensemble L_n^s tel que

$$(1.9) \qquad \bar{\omega} = F(\omega_0, \bar{l}) \quad \text{et} \quad H(\bar{\omega}) = G(\delta_0, \bar{l}) = \bar{\delta} .$$

De (1.7) résulte que

$$(1.10) \qquad G(\delta_0, l\cdot\bar{l}) = H[F(\omega_0, l\cdot\bar{l})]$$

pour l arbitraire du groupe L_n^s (le signe „$\cdot$" désigne l'opération de groupe dans le groupe L_n^s). Puisque les fonctions F et G remplissent la condition $F[F(\omega, l_1), l_2] = F(\omega, l_2\cdot l_1)$ ou $G[G(\delta, l_1), l_2] = G(\delta, l_2\cdot l_1)$ respectivement sur le ensembles $M\times L_n^s$ et $N\times L_n^s$, il s'ensuit de (1.9) que

$$(1.11) \qquad F(\bar{\omega}, l) = F[F(\omega_0, \bar{l}), l] = F(\omega_0, l\cdot\bar{l}) ,$$

$$(1.12) \qquad G(\bar{\delta}, l) = G[G(\delta_0, \bar{l}), l] = G(\delta_0, l\cdot\bar{l}) .$$

De (1.10), en tenant compte de (1.11), (1.12) et (1.9) nous obtenons que

$$G[H(\bar{\omega}), l] = H[F(\bar{\omega}, l)]$$

sur l'ensemble $M\times L_n^s$. Il s'ensuit de là et du fait que la fonction H est biunivoque et transforme la fibre M en la fibre N que la preuve de la suffisance de la condition est ainsi terminée.

La preuve de la nécessité de la condition résulte immédiatement des définitions 1 et 2.

Nous donnerons maintenant une autre condition nécessaire et suffisante pour que deux objets géométriques abstraits soient équivalentes. Supposonts que les objets géométriques particuliers (1.1′) et (1.2′) appartiennent respectivement aux objets géométriques abstraits avec les lois de transformation (1.1) et (1.2) en prenant dans un certain système de coordonnées U_0 les valeurs ω_0 et δ_0. Désignons par

$$L_1(\omega_0) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{l\colon\ [l \in L_n^s \text{ et } f(l) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(G_0, l) = \omega_0]\} ,$$

$$L_2(\delta_0) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{l\colon\ [l \in L_n^s \text{ et } g(l) \stackrel{\mathrm{df}}{=} G(\delta_0, l) = \delta_0]\} .$$

Les ensembles $L_1(\omega_0)$ et $L_2(\delta_0)$ (ω_0 et δ_0 fixés) sont les sous-groupes du groupe L_n^s (voir [3], théorème 4). Nous les appelons sous-groupes de stabilité des objets géométriques f et g (voir [5]). En utilisant les notations sous-mentionnées nous pouvons formuler le lemme 4 de [4] de la manière suivante:

LEMME 1. *Les objets géométriques particuliers f et g sont équivalents si $L_1(\omega_0) = L_2(\delta_0)$, et dans ce cas seulement.*

Du théorème 1 et du lemme 1 nous obtenons le

THÉORÈME 2. *Les objets géométriques abstraits transitifs avec les lois de transformation* (1.1) *et* (1.2) *sont équivalents s'il existe des éléments* ω_0

et δ_0 appartenant respectivement aux fibres M et N, telles que $L_1(\omega_0) = L_2(\delta_0)$, et dans ce cas seulement.

Remarquons que le théorème 2 donne le critère d'équivalence de deux objets géométriques abstraits transitifs indépendamment de la régularité des lois de transformation de ces objets.

En vertu du théorème 2, pour montrer l'équivalence de deux objets géométriques transitifs abstraits avec les lois de transformation (1.1) et (1.2) il faut et il suffit de trouver deux éléments ω_0 et δ_0 appartenant respectivement aux fibres M et N tels que les solutions des équations

$$F(\omega_0, l) = \omega_0\,, \qquad G(\delta_0, l) = \delta_0$$

(l inconnu) soient identiques.

Example 1. Considérons deux objets géométriques abstraits:

(a) la densité transitive avec la loi de transformation

$$\omega' = y\omega\,, \qquad \omega \in [(-\infty, \infty)\setminus\{0\}]\,, \tag{1.13}$$

(b) la densité transitive de Weyl avec la loi de transformation

$$\delta' = |y|\delta\,, \qquad \delta \in (0, \infty)\,. \tag{1.14}$$

Remarquons que pour un ω_0 arbitraire de l'ensemble $[(-\infty, \infty)\setminus\{0\}]$ et pour un δ_0 arbitraire de l'ensemble $(0, \infty)$ on a $L_1(\omega_0) \neq L_2(\delta_0)$. Alors, en vertu du lemme 1, aucun objet géométrique particulier appartenant à l'objet abstrait avec loi de transformation (1.13) n'est équivalent à aucun objet géométrique particulier qui appartient à l'objet geométrique abstrait dont la loi de transformation est (1.14). Il s'ensuit de là et du théorème 2 que les objets géométriques abstraits obéissant aux lois de transformation (1.13) et (1.14) ne sont pas équivalents. Dans le travail [2], p. 43, pour démontrer que les objets géométriques abstraits avec les lois de transformation (1.13) et (1.14) ne sont pas équivalents, on utilise le fait que les fonctions (1.13) et (1.14) sont régulières au sens de la définition 16 de [2], p. 43. Remarquons que $L_1(\omega_0) \subset L_2(\delta_0)$. Nous profiterons de ce fait dans la seconde partie de notre travail.

Example 2. Considérons deux objets géométriques abstraits de Pensov $\overset{1}{\omega}$ et $\overset{2}{\omega}$ dont lois de transformation sont:

$$\overline{\overset{1}{\omega}} = F_1\left[\frac{a_{11}f_1(\overset{1}{\omega}) + a_{12}}{a_{21}f_1(\overset{1}{\omega}) + a_{22}}\right], \qquad f_1[F_1(t)] = t\,,$$

$$\overline{\overset{2}{\omega}} = F_2\left[\frac{a_{11}f_2(\overset{2}{\omega}) + a_{12}}{a_{21}f_2(\overset{2}{\omega}) + a_{22}}\right], \qquad f_2[F_2(t)] = t$$

(voir [1], p. 65). Il est aisé de remarquer que l'on peut choisir $\overset{1}{\omega}_0$ et $\overset{2}{\omega}_0$ tels que $f_1(\overset{1}{\omega}_0) = f_2(\overset{2}{\omega}_0)$. De cette dernière égalité résulte que les sous-groupes

$$L_1(\overset{1}{\omega}_0) = \left\{(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}):\ F_1\left[\frac{a_{11}f_1(\overset{1}{\omega}_0)+a_{12}}{a_{21}f_1(\overset{1}{\omega}_0)+a_{22}}\right] = \overset{1}{\omega}_0\right\},$$

$$L_2(\overset{2}{\omega}_0) = \left\{(a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}):\ F_2\left[\frac{a_{11}f_2(\overset{2}{\omega}_0)+a_{12}}{a_{21}f_2(\overset{2}{\omega}_0)+a_{22}}\right] = \overset{2}{\omega}_0\right\}$$

sont identiques. Il résulte de là et du théorème 2 que deux objets géométriques de Pensov quelconques $\overset{1}{\omega}$ et $\overset{2}{\omega}$ sont équivalents (voir aussi [1], p. 65, et [4]).

EXAMPLE 3. Vérifions que l'objet géométrique abstrait de Pensov $\overset{1}{\omega}$ n'est pas équivalent à la densité abstraite $\overset{3}{\omega}$ obéissant à la loi de transformation

$$\overline{\overset{3}{\omega}} = F_3[(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\cdot f_3(\overset{3}{\omega})], \qquad f_3[F_3(t)] = t$$

(voir aussi [1], p. 65). Désignons par

$$L_3(\overset{3}{\omega}_0) = \{(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}):\ F_3[(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})f_3(\overset{3}{\omega}_0)] = \overset{3}{\omega}_0\}.$$

Remarquons que pour un $\overset{3}{\omega}_0$ arbitraire de la fibre de l'objet $\overset{3}{\omega}$ $(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 0) \in L_3(\overset{3}{\omega}_0)$, mais pour un $\overset{1}{\omega}_0$ arbitraire appartenant à la fibre de l'objet de Pensov $\overset{1}{\omega}$ on a $(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 0) \notin L_1(\overset{1}{\omega}_0)$. Il s'ensuit de là et du théorème 2 qu'un objet abstrait de Pensov n'est pas équivalent à la densité abstraite $\overset{3}{\omega}$.

§ 3. Supposons maintenant que les objets géométriques abstraits avec les lois de transformation (1.1) et (1.2) ne soient pas transitifs. Supposons que les fibres transitives des fibres M et N ne soient que les ensembles respectifs des familles

$$\{M_t\}_{t\in T}, \tag{1.15}$$

$$\{N_p\}_{p\in P} \tag{1.16}$$

et $\bigcup_{t\in T} M_t = M$, $\bigcup_{p\in P} N_p = N$. Un objet géométrique abstrait avec la loi de transformation (1.1) ((1.2)) réduite à l'ensemble $M_t\times L_n^s$ $(N_p\times L_n^s)$ est un objet géométrique transitif abstrait. Comme un objet géométrique abstrait non transitif est la somme d'une certaine famille d'objets géométriques transitifs il s'ensuit du théorème 1 et de la définition 1:

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux objets géométriques abstraits avec les lois de transformation* (1.1) *et* (1.2) *soient équivalents est qu'il existe une fonction biunivoque h qui transforme l'ensemble T en l'ensemble P, telle que les objets géométriques transitifs avec les lois de transformation* (1.1) *et* (1.2) *réduites respectivement aux ensembles $M_t \times L_n^s$ et $N_{h(t)} \times L_n^s$ sont équivalents pour un t arbitraire de l'ensemble T.*

De là et du théorème 2 nous obtenons le

THÉORÈME 4. *Pour que deux objets géométriques abstraits avec les lois de transformation* (1.1) *et* (1.2) *soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe une fonction biunivoque h transformant l'ensemble T en l'ensemble P telle que dans les fibres transitives M_t et $N_{h(t)}$ on puisse choisir les éléments m_t et n_t de telle manière que les sous-groupes $L_1(m_t)$ et $L_2(n_t)$ soient identiques.*

II. Les comitants algébriques des objets géométriques

§ 4. Soit un objet géométrique abstrait purement différentiel ω avec la loi de transformation

$$\omega' = F(\omega, l), \quad \omega \in M, \; l \in L_n^s \tag{2.1}$$

et la fibre M. Désignons par

$$\delta = \psi(\omega) \tag{2.2}$$

la fonction de l'objet ω et la loi de transformation (2.1) qui ne dépend pas du choix du système de coordonnées. La fonction ψ détermine alors un certain objet δ.

DÉFINITION 3. L'objet δ s'appelle *comitant de l'objet* ω. Si δ est un objet géométrique, nous appellerons δ *comitant géométrique de l'objet* ω (voir [2], p. 47 et 48).

Supposons que δ soit le comitant géométrique de l'objet ω et que

$$\delta' = G(\delta, l) \tag{2.3}$$

soit la loi de transformation de l'objet δ, N étant sa fibre. S'il existe une fonction ψ vérifiant l'équation

$$G[\psi(\omega), l] = \psi[F(\omega, l)], \tag{2.4}$$

alors l'objet géométrique abstrait δ avec la loi de transformation (2.3) est le comitant géométrique de l'objet géométrique abstrait ω dont la loi de transformation est (2.1).

§ 5. Supposons que les fibres M et N des objets ω et δ soient transitives. Dans ce qui va suivre nous allons désigner respectivement par ω et δ les objets géométriques abstraits avec les lois de transformation (2.1) et (2.3).

Considérons les objets géométriques particuliers f et g avec les lois de transformation (2.1) et (2.3) (qui appartiennent respectivement aux objets géométriques abstraits ω et δ) qui prennent dans un certain système de coordonnées admissible U_0 les valeurs ω_0 et δ_0. Alors

$$f(l) = F(\omega_0, l)\,, \tag{2.1'}$$

$$g(l) = G(\delta_0, l)\,. \tag{2.3'}$$

DÉFINITION 4. L'objet géométrique particulier g (2.3') appartenant à l'objet géométrique abstrait δ s'appelle le comitant géométrique de l'objet géométrique f (2.1') appartenant à *l'objet géométrique abstrait* ω s'il existe une fonction ψ transformant la fibre M en la fibre N telle que

$$g(l) = \psi[f(l)]\,. \tag{2.5}$$

Trouvons maintenant la relation entre les comitants algébriques d'un objet géométrique abstrait donné et le comitant algébrique d'un objet géométrique particulier appartenant à l'objet géométrique donné.

THÉORÈME 5. *L'objet géométrique abstrait transitif δ est le comitant algébrique d'un objet géométrique transitif abstrait ω s'il existe des objets géométriques particuliers g et f, appartenant respectivement aux objets géométriques abstraits δ et ω, tels que l'objet géométrique particulier g est le comitant algébrique de l'objet f, et dans ce cas seulement.*

La condition est suffisante. On sait par hypothèse qu'il existe une fonction ψ transformant la fibre transitive M en la fibre N et satisfaisant (2.5).

Puisque les objets géométriques f et g ont comme lois de transformation respectivement (2.1) et (2.3), il s'ensuit qu'il existe des éléments ω_0 et δ_0 dans les fibres M et N que ces objets prennent dans un système des coordonnées U_0. De là nous avons (2.1') et (2.3').

Alors de (2.5) nous obtenons que

$$G(\delta_0, l) = \psi[F(\omega_0, l)]\,. \tag{2.6}$$

Il suffit de montrer que

$$G[\psi(\omega), l] = \psi[F(\omega, l)] \tag{2.7}$$

sur l'ensemble $M \times L_n^s$. La démonstration de (2.7) se fait comme la preuve de (1.8) dans le théorème 1. La condition est ainsi suffisante.

La nécessité de la condition résulte immédiatement des définitions 3 et 4. Désignons par

$$L_1(\omega_0) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{l\colon\ [l \in L_n^s \text{ et } f(l) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(\omega_0, l) = \omega_0]\}\,, \tag{2.8}$$

$$L_2(\delta_0) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{l\colon\ [l \in L \text{ et } g(l) \stackrel{\mathrm{df}}{=} G(\delta_0, l) = \delta_0]\}\,. \tag{2.9}$$

Comme nous l'avons remarqué, les ensembles $L_1(\omega_0)$ et $L_2(\delta_0)$ sont les sous-groupes du groupe L_n^s. En adoptant les notations de [4], le théorème 9 de ce travail, que nous appellerons lemme, peut être formulé comme il suit:

LEMME 2. *L'objet géométrique particulier g avec la loi de transformation (2.3) qui prend dans un certain système U_0 la valeur δ_0 est le comitant algébrique d'un objet géométrique particulier f avec la loi de transformation (2.1) qui prend dans le système U_0 la valeur ω_0 si $L_1(\omega_0) \subset L_2(\delta_0)$, et dans ce cas seulement.*

Du théorème 5 et du lemme 2 nous obtenons le

THÉORÈME 6. *L'objet géométrique transitif abstrait δ de la fibre N est le comitant d'un objet géométrique transitif abstrait ω de la fibre M s'il existe des éléments ω_0 et δ_0 appartenant respectivement aux fibres M et N tels que $L_1(\omega_0) \subset L_2(\delta_0)$, et dans ce cas seulement.*

Nous avons remarqué dans l'exemple 1 que pour les objets géométriques abstraits avec les lois de transformation (1.13) et (1.14) on a l'inclusion $L_1(\omega_0) \subset L_2(\delta_0)$. Il en résulte, en vertu du théorème 6, qu'un objet géométrique abstrait avec le loi de transformation (1.14) est le comitant algébrique de l'objet géométrique abstrait avec la loi de transformation (1.13).

§ 6. Supposons maintenant que les objets géométriques abstraits ω et δ avec les lois de transformation (2.1) et (2.3) ne soient pas transitifs. Supposons encore que les fibres transitives des objets ω et δ ne soient que les ensembles respectifs des familles

$$\{M_t\}_{t\in T}, \tag{2.10}$$

$$\{N_p\}_{p\in P}, \tag{2.11}$$

et $\bigcup_{t\in T} M_t = M$, $\bigcup_{p\in P} N_p = N$. Nous avons déjà remarqué que l'objet géométrique abstrait est la somme d'une certaine famille d'objets géométriques transitifs abstraits. Il s'ensuit de là et du théorème 5:

THÉORÈME 7. *L'objet géométrique abstrait δ est le comitant algébrique de l'objet géométrique abstrait ω s'il existe une fonction biunivoque h transformant l'ensemble P sur T, telle que pour tout $p \in P$ l'objet géométrique transitif avec la loi de transformation (2.3) reduite à l'ensemble $N_p \times L_n^s$ est le comitant algébrique d'un objet géométrique transitif abstrait avec la loi de transformation (2.1) réduite à l'ensemble $M_{h(p)} \times L_n^s$, et dans ce cas seulement.*

En nous basant sur ce dernier théorème et le théorème 6 nous obtenons:

THÉORÈME 8. *L'objet géométrique abstrait δ est le comitant algébrique de l'objet géométrique ω si les conditions suivantes sont remplies:*

(a) *il existe une fonction biunivoque h qui transforme l'ensemble P sur l'ensemble T et*

(b) *pour un p arbitraire de l'ensemble P il existe des éléments n_p et m_p appartenant respectivement aux fibres N_p et $M_{h(p)}$ tels que $L_1(m_p) \subset L_2(n_p)$, et dans ce cas seulement.*

Travaux cités

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Mat. 43 (1964).

[3] S. Midura, *Sur les solutions de l'équation de translation*, Aequationes Mathematicae, vol. I, fasc. 1/2 (1968), pp. 77-84.

[4] — et Z. Moszner, *Quelques remarques au sujet de la notion de l'objet géométrique*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), pp. 323-338.

[5] E. Siwek et A. Zajtz, *Contribution à la théorie des pseudo-objets géométriques*, ibidem 19 (1967), pp. 185-192.

Reçu par la Rédaction le 23. 4. 1968