ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Über die Objekte der stetigen Transformationsgruppen

von A. Moór (Szeged)

Herrn Professor S. Gołąb
zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung. Im n-dimensionalen Punktraum $\mathfrak{X}_n$ sollen $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ die Koordinaten eines Punktes P bezeichnen. Ein geometrisches Objektenfeld p-ter Klasse mit m Komponenten im $\mathfrak{X}_n$-Raum ist ein System von m Funktionen $Z^i(\xi^a)$ (1) ($a = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, m$), das bei einer mindestens p-mal stetig differenzierbaren Koordinatentransformation

$$(1) \qquad \bar{\xi}^a = \psi^a(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$$

in einem beliebigen, aber bestimmten Punkte $\xi^a_{(0)}$ mit Hilfe der Transformationsformel

$$(2) \qquad \bar{Z}^i = f^i(Z^j, \xi^a, \psi^a, \psi^a_{\lambda_1}, \psi^a_{\lambda_1\lambda_2}, \ldots, \psi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p})\big|_{\xi^a=\xi^a_{(0)}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

transformiert wird, wo

$$\psi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_s} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^s\psi^a(\xi)}{\partial\xi^{\lambda_1}\ldots\partial\xi^{\lambda_s}} \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

ist, und die Form f^i von der Koordinatentransformation schon unabhängig ist.

Im folgenden wollen wir einige Probleme für solche Objekte $Z^i(\xi)$ untersuchen, die den Objektencharakter — d. h. das Transformationsgesetz (2) — statt für die Transformationen von der Form (1) — nur für

(1) Wenn nicht anders gesetzt wird, werden im folgenden die griechischen Indizes — mit der Ausnahme von ϱ — immer die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen. Durch die lateinischen Indizes $a, b, \ldots, l$ bezeichnen wir die Komponenten der geometrischen Objekte, und durch den Index ϱ ($\varrho = 1, \ldots, r$) die Parameter der Transformationsgruppen.

die Transformationen einer r-parametrigen Gruppe G_r mit den Transformationsformeln

$$\bar{\xi}^{a} = \varphi^{a}(\xi^{1}, \ldots, \xi^{n};\ a_1, \ldots, a_r) \equiv \varphi^{a}(\xi;\ a) \tag{3}$$

behalten. Wir bemerken, dass der Typ (3) ein Spezialfall von (1) ist, da in der Formel (3) nur die Parameter a_ϱ beliebig gewählt werden können, während in (1) die $\varphi^a(\xi)$ alle p-mal stetig differenzierbaren Funktionen bedeuten. Bezüglich der Parameter a_ϱ wollen wir jetzt und im folgenden immer annehmen, dass sie alle wesentlich sind, d. h. ihre Zahl durch eine Parametertransformation von der Form

$$a_\varrho = a_\varrho^*(b_1, \ldots, b_t) \qquad (t < r)$$

nicht vermindert werden kann. Die genaue Definition des Gruppenobjektes ist nun die folgende:

Definition. *Ein Gruppenobjekt (kurz Objekt) von p-ter Klasse der r-parametrigen und durch die Formeln* (3) *bestimmten Transformationsgruppe G_r ist ein System der Funktionen $Z^i(\xi^a)$ $(i = 1, \ldots, m)$ die bei einer beliebigen Transformation* (3) *von G_r die Transformationsformel* (2) *erfüllen, wo jetzt die Funktionen $\varphi^a_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$*

$$\varphi^{a}_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^k \varphi^a(\xi^\beta;\ a_\varrho)}{\partial \xi^{\lambda_1} \ldots \partial \xi^{\lambda_k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{3a}$$

bedeuten. Z^i ist von genau p-ter Klasse, wenn f^i in (2) *nicht in allen $\varphi^\beta_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ konstant ist.*

(m ist selbstverständlich wieder die Komponentenzahl des Gruppenobjekts.)

Im folgenden werden wir bezüglich der Transformationsgruppe G_r die folgenden Bezeichnungen benützen: a_ϱ^0 $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ (²) soll die Parameterwerte der identischen Transformation bezeichnen. Es ist also

$$\varphi^{a}(\xi^{1}, \ldots, \xi^{n};\ a_1^0, \ldots, a_n^0) = \xi^a . \tag{4}$$

Die Parameterwerte der inversen Transformation bezeichnen wir mit a_ϱ^{-1}, d. h. es ist:

$$\varphi^{a}(\bar{\xi};\ a^{-1}) = \varphi^{a}(\varphi(\xi;\ a);\ a^{-1}) = \varphi^{a}(\xi;\ a^{0}) = \xi^{a} . \tag{5}$$

Die Formel (5) bestimmt also im Wesentlichen die Lösung der Gleichungen (3) bezüglich ξ^a.

(²) Der Buchstabe ϱ wird im folgenden immer die Zahlen $1, 2, \ldots, r$ durchlaufen.

Auf Grund der Gruppeneigenschaft hat man:

$$\varphi^\alpha(\varphi^\beta(\xi^\gamma;\, a_\varrho);\, b_\varrho) = \varphi^\alpha(\xi^\beta;\, c_\varrho(a_\varrho, b_\varrho)) . \tag{6}$$

Die Funktionen c_ϱ genügen den folgenden Relationen:

$$c_\varrho(\overset{0}{a}_\varrho, b_\varrho) = c_\varrho(b_\varrho, \overset{0}{a}_\varrho) = b_\varrho . \tag{7a}$$

Aus (6) und (7a) folgt für $b_\varrho = a_\varrho^{-1}$ auf Grund von (5)

$$c_\varrho(a_\varrho, a_\varrho^{-1}) = \overset{0}{a}_\varrho, \qquad c_\varrho(a_\varrho^{-1}, a_\varrho) = \overset{0}{a}_\varrho . \tag{7b}$$

Unsere folgenden Untersuchungen werden sich in erster Reihe auf solche Objekte beziehen, die bezüglich einer Transformationsgruppe (3) einen einfacheren Charakter haben, als bezüglich der allgemeinen Transformationen (1). In manchen Fällen können die Transformationsgruppen — wie wir es sehen werden — eben durch diese Objekte gekennzeichnet werden. Z. B. bilden die affinen Übertragungsparameter $\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$ bezüglich der linearen Transformationsgruppe

$$G_N^{(1)}\colon\ \bar{\xi}^\alpha = a^\alpha_\beta \xi^\beta + a^\alpha , \qquad a^\alpha_\beta,\, a^\alpha\colon \text{ konst.}$$

einen gemischten Tensor dritter Stufe (vgl. § 2, Satz 2.) und $G_N^{(1)}$ kann eben dadurch charakterisiert werden.

Für ähnliche Charakterisierung der affinen Gruppe $G_N^{(1)}$ vgl. die Aufsätze von S. Gołąb und M. Kucharzewski [1] und [2], Satz 1.

Bezüglich des Problems, ob ein Objekt von gegebenem Typ bei einer gegebenen Gruppe vorkommen kann, bemerken wir folgendes:

Sind die Funktionen $\varphi^\alpha(\xi;\, a)$ *in der Umgebung von* $\xi^\alpha_{(0)}$ *in die Potenzreihe*

$$\varphi^\alpha(\xi;\, a) = \varphi^\alpha(\xi_{(0)};\, a) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \varphi^\alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_j}(\xi_{(0)};\, a)(\xi^{\lambda_1} - \xi^{\lambda_1}_{(0)})\ldots(\xi^{\lambda_j} - \xi^{\lambda_j}_{(0)}) \tag{7}$$

entwickelbar und kommen in dieser Potenzreihe die Glieder

$$\varphi^\alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_j}(\xi_{(0)};\, a)(\xi^{\lambda_1} - \xi^{\lambda_1}_{(0)})\ldots(\xi^{\lambda_j} - \xi^{\lambda_j}_{(0)}) \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

vor, so enthält die Gruppe (3) *Objekte aller Klasse bis zu der p-ten Klasse.*

Solche Probleme werden wir in § 3 untersuchen.

Das letzte Problem, das wir in dieser Arbeit behandeln, betrifft diejenigen Gruppen, bezüglich welcher die ko- und kontravarianten Vektoren übereinstimmen. Wir gelangen im Satz 4 zu einer Gruppe, für die

$$\varphi^\varkappa_\lambda(\xi_{(0)};\, a) = \varphi^\lambda_\varkappa(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1}) \qquad \text{und} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi^\varkappa_\lambda(\xi_{(0)};\, a)\varphi^\varkappa_\mu(\xi_{(0)};\, a) = \delta_{\lambda\mu} \text{ (3)}$$

---

(3) Das Summationszeichen haben wir jetzt ausgeschrieben, da beide $\varkappa$ in kontravarianter Stellung stehen. $\delta_{\lambda\mu}$: Kroneckersches δ.

äquivalent sind. (Vgl. den Beweis des Satzes 4.) Bezüglich dieses Problemkreises vgl. [3].

§ 2. Charakterisierung gewisser Transformationsgruppen durch Gruppenobjekte. Wir wollen in diesem Paragraphen gewisse Transformationsgruppen durch die Eigenschaften ihrer Gruppenobjekte charakterisieren. Der folgende Satz charakterisiert die n-parametrige Translationsgruppe:

SATZ 1. *Es sei durch die Formeln*

$$G_n\colon\ \bar{\xi}^a = \varphi^a(\xi^1, \ldots, \xi^n;\ a_1, \ldots, a_n) \tag{8}$$

eine n-parametrige Transformationsgruppe G_n angegeben. Es sei ferner $X^i(\xi)$ $(i = 1, \ldots, n^2)$ ein Objektenfeld erster Klasse mit der Transformationsformel

$$\overline{X^i} = f^i\left(X^k, \frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial\xi^\beta}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n^2) \tag{9}$$

in Bezug auf alle Transformationen der Klasse C^1, wo die Funktionen f^i bezüglich der $\partial\bar{\xi}^a/\partial\xi^\beta$ eindeutig auflösbar sind.

Sind nun die X^i bezüglich der Transformationsgruppe G_n invariant, so ist die durch (8) *bestimmte Transformationsgruppe die n-parametrige Translationsgruppe*:

$$G_n^{(0)}\colon\ \bar{\xi}^a = \xi^a + a^a\,. \tag{10}$$

Beweis. Wegen der eindeutigen Auflösbarkeit von (9) bezüglich $\partial\bar{\xi}^a/\partial\xi^\beta$ wird

$$\varphi^\varkappa_\lambda(\xi;\, a) = F^\varkappa_\lambda(\overline{X}^k, X^m)\,, \qquad \varphi^\varkappa_\lambda \equiv \frac{\partial\bar{\xi}^\varkappa}{\partial\xi^\lambda} \tag{11}$$

bestehen, falls man in (9) statt $\partial\bar{\xi}^a/\partial\xi^\beta$ die durch (8) bestimmten Funktionen $\varphi^\varkappa_\lambda$ einsetzt und das Gleichungssystem (9) bezüglich $\varphi^\varkappa_\lambda$ löst. Da aber nach unserer Annahme die X^i bezüglich der durch (8) bestimmten Gruppe G_n Invarianten sind, hat man $\overline{X}^i = X^i$ und aus (11) wird

$$\varphi^\varkappa_\lambda(\xi;\, a) = F^\varkappa_\lambda\big(X^k(\xi), X^m(\xi)\big)\,.$$

$\varphi^\varkappa_\lambda(\xi;\, a)$ ist nach unserer letzten Formel allein von den ξ^a abhängig, und von den $a_\varkappa$ unabhängig. Nach Integration wird somit

$$\bar{\xi}^\varkappa = \varphi^\varkappa(\xi;\, a) = g^\varkappa(\xi) + \hat{a}^\varkappa(a_1, \ldots, a_n) \tag{12}$$

bestehen.

Sind nun die $\overset{0}{a}_\varkappa$ die Parameter der Identität, so folgt aus der Formel (12) für $a_\varkappa = \overset{0}{a}_\varkappa$:

$$g^\varkappa(\xi) = \xi^\varkappa - \hat{a}^\varkappa(\overset{0}{a}_1, \ldots, \overset{0}{a}_n)\,. \tag{12*}$$

Substituieren wir die in dieser Weise bestimmten Funktionen $g^{\varkappa}(\xi)$ in der Formel (12), so geht (12) nach der Bezeichnung

$$a^{\varkappa} \overset{\text{def}}{=} \hat{a}^{\varkappa}(a_1, \ldots, a_n) - \hat{a}^{\varkappa}(a_1^0, \ldots, a_n^0)$$

eben in die Formel (10) über. Das beweist unseren Satz.

Jetzt gehen wir zu einer Charakterisierung der allgemeinen linearen Transformationsgruppe $G^{(1)}_{n(n+1)}$ über. Es ist der folgende Satz gültig:

Satz 2. *G_N bedeute eine $N = n(n+1)$-parametrige Transformationsgruppe, für die der Wertbereich von mindestens einer der Funktionen*

$$\varphi^{\varkappa}_{\lambda\lambda}(\xi;\, a) \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \ (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \ (\textit{nicht summieren über } \lambda)$$

entweder einen n-dimensionalen zusammenhängenden Punktbereich B_n bedeckt, oder aber alle $\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}(\xi;\, a)$ Konstanten sind. Es seien ferner die $Z^i(\xi)$ $(i = 1, \ldots, \frac{1}{2}n^2(n+1))$ die Komponenten eines Objektenfelds, die bei einer zweimal differenzierbaren Koordinatentransformation der Transformationsformel

$$\overline{Z}^i = f^i\left(Z^k, \frac{\partial\bar{\xi}^{\alpha}}{\partial\xi^{\beta}}, \frac{\partial^2\bar{\xi}^{\alpha}}{\partial\xi^{\beta}\partial\xi^{\gamma}}\right) \qquad (i, k = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}n^2(n+1)) \tag{13}$$

genügen, wo die Funktionen f^i so beschaffen sind, dass (13) bezüglich der $\partial^2\bar{\xi}^{\alpha}/\partial\xi^{\beta}\partial\xi^{\gamma}$ eindeutig auflösbar sind.

Ist nun Z^i bezüglich G_N ein rein differentielles Objektenfeld von erster Klasse, so ist G_N entweder die allgemeine lineare Gruppe, oder aber sind die $\varphi^{\varkappa}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ $(s = 2, 3, \ldots)$ durch φ^{α}_{β} bestimmbar.

Bemerkung. Ein klassisches Beispiel für solche Objektenfelder sind die affinen Übertragungsparameter $\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}$, da die $\partial\xi^{\alpha}/\partial\bar{\xi}^{\beta}$ und die $\partial^2\xi^{\alpha}/\partial\bar{\xi}^{\beta}\partial\bar{\xi}^{\gamma}$ wegen

$$\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial\bar{\xi}^{\beta}}\frac{\partial\bar{\xi}^{\beta}}{\partial\xi^{\gamma}} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$$

bekanntlich durch $\partial\bar{\xi}^{\alpha}/\partial\xi^{\beta}$ und $\partial^2\bar{\xi}^{\alpha}/\partial\xi^{\beta}\partial\xi^{\gamma}$ ausdrückbar sind.

Beweis des Satzes. Nach der Annahme ist $Z^i(\xi)$ bezüglich G_N ein rein differentielles Objektenfeld von erster Klasse, d. h. es ist

$$\overline{Z}^i = g^i\big(Z^k, \varphi^{\varkappa}_{\lambda}(\xi;\, a)\big) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}n^2(n+1))\,. \tag{14}$$

Da (13) bezüglich $\partial^2\bar{\xi}^{\alpha}/\partial\xi^{\beta}\partial\xi^{\gamma}$ eindeutig auflösbar ist, folgt nach Auflösung und nach Einsetzen von (14) für $\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ eine Formel

$$\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}(\xi;\, a) = h^{\varkappa}_{\lambda\mu}\big(Z^k(\xi), \varphi^{\varkappa}_{\lambda}(\xi;\, a)\big)\,. \tag{15}$$

$\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ ist aber von den Komponenten Z^k unabhängig, somit muss statt der letzten Formel eine Relation von der Form:

$$(16)\qquad \varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}(\xi;\, a) = H^{\varkappa}_{\lambda\mu}\big(\varphi^{\alpha}_{\beta}(\xi;\, a)\big)$$

bestehen. Aus dieser Formel folgt nun nach einer partiellen Ableitung nach ξ^{ν}, wenn dabei (16) wieder beachtet wird:

$$\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu\nu}(\xi;\, a) = H^{\sigma}_{\tau\nu}\big(\varphi^{\delta}_{\varepsilon}(\xi;\, a)\big)\frac{\partial}{\partial\varphi^{\sigma}_{\tau}} H^{\varkappa}_{\lambda\mu}\big(\varphi^{\alpha}_{\beta}(\xi;\, a)\big)\,.$$

Diese Formel zeigt schon, dass $\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu\nu}$ durch die φ^{α}_{β} ausdrückbar ist, falls $\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}(\xi;\, a) \neq$ konst. ist ([4]). Wenn wir diese Methode in ähnlicher Weise fortführen, so ergibt sich, dass die höheren Ableitungen $\varphi^{\varkappa}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ alle durch die $\varphi^{\varkappa}_{\lambda}$ ausdrückbar sind, was die erste Hälfte des Satzes beweist.

Es sei nun $\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ von den ξ^{α} unabhängig. d.h.:

$$(17^c)\qquad \varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}(\xi;\, a) = d^{\varkappa}_{\lambda\mu}(a_1, \ldots, a_N)\,, \qquad d^{\varkappa}_{\lambda\mu} = d^{\varkappa}_{\mu\lambda}\,.$$

In diesem Falle hat man nach zweimaliger Integration

$$(17)\qquad \bar{\xi}^{\varkappa} = \tfrac{1}{2}\, d^{\varkappa}_{\lambda\mu}(a)\,\xi^{\lambda}\xi^{\mu} + a^{\varkappa}_{\lambda}(a)\,\xi^{\lambda} + a^{\varkappa}(a)\,.$$

Nach einer neuen Koordinatentransformation vom Typ (17) und mit den Parametern b_{ϱ} wird nach (17)

$$(18)\qquad \bar{\bar{\xi}}^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\, d^{\alpha}_{\beta\gamma}(b)\,\bar{\xi}^{\beta}\bar{\xi}^{\gamma} + a^{\alpha}_{\beta}(b)\,\bar{\xi}^{\beta} + a^{\alpha}(b)\,.$$

Setzen wir die Werte von $\bar{\xi}^{\beta}$ von der Gleichung (17) in (18) ein, so wird:

$$(19)\qquad \bar{\bar{\xi}}^{\alpha} = \tfrac{1}{8}\, d^{\alpha}_{\beta\gamma}(b)\, d^{\beta}_{\varkappa\lambda}(a)\, d^{\gamma}_{\varrho\sigma}(a)\,\xi^{\varkappa}\xi^{\lambda}\xi^{\varrho}\xi^{\sigma} + \ldots\,,$$

wo die Punkte solche Glieder bedeuten, die in den ξ^{β} höchstens von dritter Ordnung sind.

Wegen des Gruppencharakters muss aber ein Parametersystem $c_{\varrho}(a, b)$ existieren, so dass

$$(20)\qquad \bar{\bar{\xi}}^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\, d^{\alpha}_{\beta\gamma}(c)\,\xi^{\beta}\xi^{\gamma} + a^{\alpha}_{\beta}(c)\,\xi^{\beta} + a^{\alpha}(c)$$

gültig sei. Aus (19) und (20) folgt aber dass

$$(21)\qquad d^{\alpha}_{\beta\gamma}(b)\, d^{\beta}_{\varkappa\lambda}(a)\, d^{\gamma}_{\varrho\sigma}(a)\,\xi^{\varkappa}\xi^{\lambda}\xi^{\varrho}\xi^{\sigma} = 0$$

besteht. Nehmen wir jetzt an, dass nach der Bedingung des Satzes der Wertbereich der n Funktionen $d^{\beta}_{11}(a)$ einen n-dimensionalen zusammen-

---

([4]) Für $\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu} =$ konst. (unabhängig von ξ^{α}) ist selbstverständlich $\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu\nu} = 0$.

hägenden Punktbereich B_n bedeckt. Da das Polynom (21) identisch verschwindet, muss der Koeffizient von $(\xi^1)^4$, d.h.

$$d^\alpha_{\beta\gamma}(b)\,d^\beta_{11}(a)\,d^\gamma_{11}(a) \equiv 0 \tag{22}$$

sein. Die linke Seite der Formel (22) ist aber offenbar ein Polynom der $d^\beta_{11}(a)$ $(\beta = 1, \ldots, n)$, die nach unserer Annahme als n Veränderliche betrachtet werden können. (22) bedeutet aber dann, dass

$$d^\alpha_{\beta\gamma}(b) \equiv 0 \tag{23}$$

ist. Da die b_ϱ beliebige Parameterwerte bedeuten können, ist (23) für $\beta = \gamma = 1$ ein Widerspruch bezüglich unserer Annahme über d^α_{11}.

Die $d^\alpha_{\beta\gamma}$ sind also Konstanten. Wählen wir jetzt in (17) für die a_ϱ die Parameterwerte $\overset{0}{a}_\varrho$ der identischen Transformation, so folgt unmittelbar, dass $d^\varkappa_{\lambda\mu} \equiv 0$ ist. G_N ist also auf Grund von (17) die lineare Gruppe $G^{(1)}_N$.

Sind endlich die Funktionen $\varphi^\varkappa_{\lambda\mu}$ in den Formeln (16) allein von den ξ^α abhängig, und von den Parametern unabhängig, so erhält man auch in diesem Falle die lineare Gruppe $G^{(1)}_N$ und man kann jetzt die Bedingung über die Funktionen $\varphi^\varkappa_{11}, \ldots, \varphi^\varkappa_{nn}$ fallen lassen. Es wird nämlich aus (16) nach zweimaliger Integration:

$$\bar{\xi}^\varkappa = g^\varkappa(\xi) + a^\varkappa_\lambda \xi^\lambda + a^\varkappa\,, \tag{24}$$

wo die $a^\varkappa_\lambda$ und $a^\varkappa$ Funktionen der Parameter a_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, N)$ sind. Für die Parameter $\overset{0}{a}_\varrho$ der identischen Transformation folgt aus (24)

$$\xi^\varkappa = g^\varkappa(\xi) + a^\varkappa_\lambda(\overset{0}{a}_\varrho)\,\xi^\lambda + a^\varkappa(\overset{0}{a}_\varrho)\,,$$

d.h. $g^\varkappa(\xi)$ ist in den ξ^α linear. Aus (24) folgt dann, dass auch $\bar{\xi}^\alpha$ von den $\xi^\varkappa$ linear abhängig ist.

Sind die Bedingungen des Satzes 2 nur für ein bestimmtes Objektenfeld $Z^i_0(\xi)$ gültig, so können die Komponenten Z^k in (15) nicht als Veränderliche betrachtet werden. Die angewandte Schlussweise kann auch jetzt in unveränderter Form durchgeführt werden, statt (16) wird aber jetzt nach (15) $\varphi^\varkappa_{\lambda\mu}$ von ξ^α und $\varphi^\varkappa_\lambda(\xi;\, a)$ abhängig sein, d.h.

$$\varphi^\varkappa_{\lambda\mu}(\xi;\, a) = H^{**\varkappa}_{\lambda\mu}\big(\xi^\alpha, \varphi^\alpha_\beta(\xi;\, a)\big)\,. \tag{25}$$

Auf Grund der Formel (25) besteht der Satz 2 offenbar in folgender, etwas veränderter Form:

Satz 2*. *Sind die Bedingungen des Satzes 2 nur für ein bestimmtes Objektenfeld $Z^i_0(\xi)$ gültig, so ist die Behauptung des Satzes 2 mit dem einzigen Unterschied gültig, dass jetzt die Grössen $\varphi^\varkappa_{\lambda_1\ldots\lambda_s}(\xi;\, a)$ durch ξ^α und $\varphi^\alpha_\beta(\xi;\, a)$ ausdrückbar sind.*

Wir wollen noch darauf hinweisen, dass die im Satze 2 über die Funktionen $\varphi^{\varkappa}_{11}(\xi; a), \dots, \varphi^{\varkappa}_{nn}(\xi; a)$ gestellten Forderungen auch durch schwächere ersetzt werden können. Für die Gültigkeit des Satzes 2 sind auch folgende Bedingungen für die Funktionen $\varphi^{\varkappa}_{\alpha\beta}$ hinreichend:

Entweder bedeckt der Wertbereich der Funktionen

$$\eta^{\varkappa} \overset{\text{def}}{=} \varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}(\xi; a)\, \xi^{\lambda} \xi^{\mu} \tag{26}$$

einen n-dimensionalen zusammenhängenden Punktbereich B_n, oder aber sind alle $\varphi^{\varkappa}_{\lambda\mu}(\xi; a)$ Konstanten.

Den Beweis des Satzes 2 müssen wir in diesem Falle nur von der Formel (21) ab etwas verändern. Die Relation (21) schreiben wir in die Form

$$d^{\alpha}_{\beta\gamma}(b)\, \eta^{\beta} \eta^{\gamma} = 0\,, \tag{27}$$

wo nach (26) und (17°)

$$\eta^{\varkappa} \overset{\text{def}}{=} d^{\varkappa}_{\lambda\mu}(a)\, \xi^{\lambda} \xi^{\mu}$$

bedeutet. Da die linke Seite von (27) ein Polynom in den n Veränderlichen η^{β} ist, muss nach (27) $d^{\alpha}_{\beta\gamma}(b) = 0$ sein, d.h. die Relation (23) ist wieder gültig. Der Beweis des Satzes geht weiter analog zu dem des Satzes 2.

Mit dem im Satze 2 vorkommenden Typ der Objekte zweiter Klasse kann auch die projektive Gruppe leicht charakterisiert werden. Es besteht das folgende

KOROLLAR. *Genügt ein Objektenfeld $Z^{i}(\xi)$ $(i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n^{2}(n+1))$ bezüglich der zweimal differenzierbaren Transformationen der Transformationsformel* (13), *wo die Funktionen f^{i} bezüglich der $\partial^{2}\bar{\xi}^{\alpha}/\partial\xi^{\beta}\partial\xi^{\gamma}$ eindeutig auflösbar sind, und hat $Z^{i}(\xi)$ bezüglich einer Transformations-Gruppe G_r die Transformationsformel:*

$$\bar{Z}^{i} = f^{i}\left(Z^{k}, \frac{\partial\bar{\xi}^{\alpha}}{\partial\xi^{\beta}}, \frac{\partial\bar{\xi}^{\alpha}}{\partial\xi^{\beta}} \frac{\partial\theta}{\partial\xi^{\gamma}} + \frac{\partial\bar{\xi}^{\alpha}}{\partial\xi^{\gamma}} \frac{\partial\theta}{\partial\xi^{\beta}}\right) \qquad (i, k = 1, \dots, \tfrac{1}{2}n^{2}(n+1))\,, \tag{28}$$

$$\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1} \operatorname{Det}\left(\frac{\partial\bar{\xi}^{\alpha}}{\partial\xi^{\beta}}\right),$$

so ist G_r die projektive Gruppe:

$$G_p\colon\; \bar{\xi}^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta} + a^{\alpha}}{a^{*}_{\beta}\xi^{\beta} + a^{*}}\,.$$

Beweis. Aus (28) und (13) folgt wegen der Auflösbarkeit von f^i auf $\partial^2\bar{\xi}^\varkappa/\partial\xi^\lambda\partial\xi^\mu$:

$$\frac{\partial^2\bar{\xi}^a}{\partial\xi^\beta\partial\xi^\gamma} = \frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi^\gamma} + \frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial\xi^\gamma}\frac{\partial\theta}{\partial\xi^\beta}.$$

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems führt aber eben auf die Gruppe G_p. (Vgl. etwa [4], § 39, S. 107-109).

§ 3. Gruppenobjekte von erster Klasse. Die Transformationsformel eines Gruppenobjektes ist durch die Formel (2) angegeben, wo die $\varphi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ durch (3a) bestimmt sind. Die Funktionen f^i in (2) können nicht bliebig sein, sie müssen einem charakteristischen Funktionalgleichungssystem genügen. Transformieren wir nämlich die Koordinaten $\bar{\xi}^a$ durch eine Transformation mit den Parametern b_ϱ der Fundamentalgruppe G_r, so bekommt man nach der allgemeine Transformationsformel (2):

$$\bar{\bar{Z}}^i = f^i(\bar{Z}^j, \bar{\xi}^a, \bar{\varphi}^a, \bar{\varphi}^a_{\lambda_1}, \ldots, \bar{\varphi}^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p})\big|_{\bar{\xi}^a = \bar{\xi}^a_{(0)}}, \tag{29}$$

wo

$$\bar{\bar{\xi}}^a = \bar{\varphi}^a \equiv \varphi^a(\bar{\xi}; b), \quad \bar{\varphi}^a_{\lambda_1} = \varphi^a_{\lambda_1}(\bar{\xi}; b), \quad \ldots, \quad \bar{\varphi}^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \varphi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p}(\bar{\xi}; b) \tag{29a}$$

ist. Die von $\bar{\xi}^a = \varphi^a(\xi; a)$, $\bar{\bar{\xi}}^a = \varphi^a(\bar{\xi}; b)$ zusammengesetzte Transformation kann aber wegen der Gruppeneigenschaft und auf Grund von (6) durch die einzige Transformation:

$$\bar{\bar{\xi}}^a = \varphi^a\big(\xi^\beta; c_\varrho(a_\varrho, b_\varrho)\big) \tag{30}$$

dargestellt werden. Auf Grund von (30) wird die Transformationsformel (2) in

$$\bar{\bar{Z}}^i = f^i\big(Z^j, \xi^a, \varphi^a(\xi; c), \ldots, \varphi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p}(\xi; c)\big) \tag{31}$$

übergehen. Aus den Formeln (29) und (31) bekommt man im Hinblick auf (2) für die Funktionen f^i das charakteristische Funktionalgleichungssystem

$$\begin{aligned} f^i\big(f^j\big(Z^k, \xi^a, \varphi^a(\xi; a), \ldots, \varphi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p}(\xi; a)\big), \ \bar{\xi}^a, \varphi^a(\bar{\xi}; b), \ldots, \varphi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p}(\bar{\xi}; b)\big) \\ = f^i\big(Z^j, \xi^a, \varphi^a(\xi; c), \ldots, \varphi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p}(\xi; c)\big), \quad c_\varrho = c_\varrho(a, b). \end{aligned} \tag{32}$$

Nach unserer am Ende der Einleitung formulierten Bemerkung existieren bezüglich jeder r-parametrigen Gruppe G_r Vektoren und Tensoren, falls $\varphi^a_\beta(\xi; a) \neq 0$, da jetzt in (7) die linearen Glieder sicher vorhanden sind.

In diesem Paragraphen wollen wir die Bedingung der Existenz der Vektoren und Tensoren bezüglich einer Transformationsgruppe genau angeben, und dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Übereinstimmung der ko- und kontravarianten Vektoren bestimmen. Wir beweisen erstens den

Satz 3. *Ist für die r-parametrige Transformationsgruppe G_r*

$$\varphi^{\alpha}_{\beta}(\xi;\, a) \neq \delta^{\alpha}_{\beta} \qquad (\delta\text{: Kroneckersches } \delta^{\alpha}_{\beta})\,, \tag{33}$$

so existieren bezüglich dieser Transformationsgruppe kontra- und kovariante Vektoren (Objekte von genau erster Klasse). Ist (33) *nicht erfüllt, so sind die Vektorkomponenten trivialerweise Invarianten.*

Bemerkung. *Wenn für eine Gruppe G_r die φ^{α}_{β} Konstanten sind, dann ist nur $\varphi^{\alpha}_{\beta} \equiv \delta^{\alpha}_{\beta}$ möglich.* Angenommen, dass

$$\varphi^{\alpha}_{\beta}(\xi;\, a) = d^{\alpha}_{\beta}\,, \qquad d^{\alpha}_{\beta}\text{: konst.}$$

wäre, würde nach Integration

$$\bar{\xi}^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(\xi;\, a) = d^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta} + a^{\alpha}(a_1, \ldots, a_r)$$

bestehen. Wählen wir jetzt für die Parameter a_ϱ die Parameter $\overset{0}{a}_\varrho$ der identischen Transformation, so wird

$$\xi^{\alpha} = d^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta} + a^{\alpha}(\overset{0}{a}_1, \ldots, \overset{0}{a}_r)$$

gültig sein, woraus wegen der Willkürlichkeit der ξ^{α}

$$d^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,, \qquad a^{\alpha}(\overset{0}{a}_1, \ldots, \overset{0}{a}_r) = 0$$

folgt, w.z.b.w.

Beweis des Satzes. Ein kontravarianter Vektor hat bezüglich der Koordinatentransformation (3) im Punkte $\xi^{\alpha}_{(0)}$ die Transformationsformel:

$$\bar{v}^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}_{\lambda}(\xi_{(0)};\, a)v^{\lambda}\,. \tag{34}$$

Wir zeigen, dass $v^{\varkappa}$ ein Gruppenobjekt ist. Vergleichen wir (34) mit der Transformationsformel (2) der Objekte, so sieht man, dass jetzt

$$f^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}_{\lambda}(\xi_{(0)};\, a)v^{\lambda}$$

ist. Diese Funktionen müssen dem für die Gruppenobjekte charakteristischen Funktionalgleichungssystem (32) genügen. In diesem Falle lautet dieses charakteristische Funktionalgleichungssystem:

$$\varphi^{\alpha}_{\lambda}(\bar{\xi}_{(0)};\, b)\varphi^{\lambda}_{\beta}(\xi_{(0)};\, a)v^{\beta} = \varphi^{\alpha}_{\beta}\big(\xi_{(0)};\, c(a, b)\big)v^{\beta}\,. \tag{35}$$

Differenzieren wir aber die Formel (6), die für jede Gruppe G_r besteht partiell nach ξ^{β} und überschieben wir dann die erhaltene Relation mit v^{β}, so bekommen wir eben die Formel (35), da nach (3)

$$\varphi^{\varkappa}(\xi_{(0)};\, a) = \bar{\xi}^{\varkappa}_{(0)}$$

gültig ist. Für die Grössen mit der Transformationsformel (34) ist also (35) bzw. in diesem Falle das mit (35) äquivalente charakteristische Funktionalgleichungssystem (32) immer erfüllt, d.h. $v^\varkappa$ ist ein Gruppenobjekt. Damit haben wir die Existenz der kontravarianten Vektoren gezeigt.

Die kovarianten Vektoren haben bezüglich der Transformationen von G_r nach (5) die Transformationsformel

$$\bar{w}_\beta = \varphi^\alpha_\beta(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1})\, w_\alpha \,. \tag{36}$$

Der Beweis, dass die kovarianten Vektoren auch Gruppenobjekte sind, geht analog zum Falle der kontravarianten Vektoren, nur müssen wir jetzt die charakteristischen Relationen (6) in der Form

$$\varphi^\lambda\big(\varphi^\beta(\bar{\bar{\xi}};\, b^{-1});\, a^{-1}\big) = \varphi^\lambda\big(\bar{\bar{\xi}};\, c^{-1}(a,b)\big)\,, \qquad c^{-1}(a,b) = c(b^{-1}, a^{-1})$$

benützen. Eine partielle Ableitung nach $\bar{\bar{\xi}}^\alpha$ und eine darauffolgende Überschiebung mit w_λ gibt für $\xi^\alpha = \xi^\alpha_{(0)}$ die Relation

$$\varphi^\lambda_\varkappa(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1})\,\varphi^\varkappa_\alpha(\bar{\bar{\xi}}_{(0)};\, b^{-1})\, w_\lambda = \varphi^\lambda_\alpha(\bar{\bar{\xi}}_{(0)};\, c^{-1})\, w_\lambda\,,$$

die eben das charakteristische Funktionalgleichungssystem der kovarianten Vektoren ist, wie das im Hinblick auf (36) leicht bestätig werden kann.

Aus dem Satze 3 folgt, dass bezüglich einer Gruppe G_r auch Tensoren und — falls die Jacobische Determinante von (3) von 1 verschieden ist — Dichten existieren, da aus Vektoren und Skalaren immer Tensoren gebildet werden können. Man kann aber durch einen, zum Beweis des Satzes 3 vollständig analogen Beweis leicht unmittelbar zeigen, dass bezüglich der Gruppe G_r Tensoren von beliebiger Valenz existieren, wenn die Bedingung (33) erfüllt ist.

Wir wollen jetzt diejenigen Bedingungen bestimmen, die notwendig und hinreichend sind für die Übereinstimmung der kontra- und kovarianten Vektoren bezüglich einer Gruppe G_r, falls bezüglich G_r unendlich viele verschiedene kontra- bzw. kovariante Vektorfelder existieren. Es ist der folgende Satz gültig:

Satz 4. *Notwendig und hinreichend für die Übereinstimmung der kontra- und kovarianten Vektoren im Punkte $\xi^\alpha_{(0)}$ bezüglich einer Transformationsgruppe G_r ist das Bestehen der Relationen:*

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi^\varkappa_\lambda(\xi_{(0)};\, a)\,\varphi^\varkappa_\mu(\xi_{(0)};\, a) = \delta_{\lambda\mu}\ (^5)\,. \tag{37}$$

Beweis. Der in der Umgebung des Punktes $\xi^\alpha_{(0)}$ definierte Vektor $v^\varkappa$ — aufgefasst als kontravarianter Vektor — hat bezüglich der

(5) Das Summationszeichen haben wir jetzt ausgeschrieben, da beide in kontravarianter Stellung stehen. $\delta_{\lambda\mu}$: Kroneckersches δ.

Transformation (3) die Transformationsformel:

$$\bar{v}^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}_{\lambda}(\xi_{(0)};\, a) v^{\lambda}\,. \tag{38}$$

Der Vektor $v^{\varkappa}$ — aufgefasst als kovarianter Vektor — hat bezüglich der Transformation (3) im Punkte $\xi^{a}_{(0)}$ die Transformationsformel:

$$\bar{v}^{\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi^{\lambda}_{\varkappa}(\xi_{(0)};\, a^{-1}) v^{\lambda}\,. \tag{39}$$

Aus den Formeln (38) und (39) folgt nun wegen der Willkürlichkeit von v^{λ}

$$\varphi^{\varkappa}_{\lambda}(\xi_{(0)};\, a) = \varphi^{\lambda}_{\varkappa}(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1})\,, \tag{40}$$

wo $\bar{\xi}^{a}_{(0)} = \varphi^{a}(\xi_{(0)};\, a)$ ist. Offenbar ist die Bedingung (40) notwendig und hinreichend für die Übereinstimmung der kontra- und kovarianten Vektoren. Wir zeigen, dass (40) mit der Relation (37) äquivalent ist. Aus den Formeln (5) folgt nach einer partiellen Ableitung nach ξ^{μ} und dann nach Einsetzen von $\xi^{a}_{(0)}$

$$\varphi^{\lambda}_{\varkappa}(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1}) \varphi^{\varkappa}_{\mu}(\xi_{(0)};\, a) = \delta^{\lambda}_{\mu}\,. \tag{41}$$

Eliminiert man aus den Formeln (41) mit Hilfe von (40) die Funktionen $\varphi^{\lambda}_{\varkappa}(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1})$, so bekommt man unmittelbar die Relationen (37). Damit haben wir die Notwendigkeit von (37) bewiesen.

Nehmen wir jetzt an, dass die Relationen (37) gültig sind. Wir werden zeigen, dass aus (37) die Relationen (40) folgen. Eine Kontraktion von (37) mit $\varphi^{\lambda}_{\nu}(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1})$ gibt die Formeln:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi^{\lambda}_{\nu}(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1}) \varphi^{\varkappa}_{\lambda}(\xi_{(0)};\, a) \varphi^{\varkappa}_{\mu}(\xi_{(0)};\, a) = \varphi^{\mu}_{\nu}(\bar{\xi}_{(0)};\, a^{-1})\,. \tag{42}$$

Aus den Formeln (3) und (5) folgt:

$$\varphi^{\varkappa}\big(\varphi(\bar{\xi};\, a^{-1});\, a\big) = \bar{\xi}^{\varkappa}\,.$$

Partielle Differentiation nach $\bar{\xi}^{\nu}$ ergibt:

$$\varphi^{\varkappa}_{\lambda}\big(\varphi(\bar{\xi};\, a^{-1});\, a\big) \varphi^{\lambda}_{\nu}(\bar{\xi};\, a^{-1}) = \delta^{\varkappa}_{\nu}\,.$$

Beachten wir jetzt wieder die Formeln (5), so wird:

$$\varphi^{\varkappa}_{\lambda}(\xi;\, a) \varphi^{\lambda}_{\nu}(\bar{\xi};\, a^{-1}) = \delta^{\varkappa}_{\nu}\,. \tag{43}$$

Setzen wir in (43) $\xi^{a} = \xi^{a}_{(0)}$, so wird auch $\bar{\xi}^{a} = \bar{\xi}^{a}_{(0)}$ bestehen, und substituieren wir dann (43) in die Formeln (42), so gehen diese Formeln eben in (40) über, die — wie das schon bemerkt wurde — für die Übereinstimmung der kontra- und kovarianten Vektoren notwendig und hinreichend ist.

Damit haben wir den Satz 3 vollständig bewiesen.

BEISPIEL. Die euklidische Bewegungsgruppe

$$\bar{\xi}^{\varkappa} = a^{\varkappa}_{\lambda}\xi^{\lambda} + a^{\varkappa} \qquad (a^{\varkappa}_{\lambda},\ a^{\varkappa}\text{: konst.})$$

— wo die Matrix $(a^{\varkappa}_{\lambda})$ orthogonal und normal ist — befriedigt offenbar die Bedingungen (37) und selbstverständlich auch (40), da (40) — wie wir das gezeigt haben — eine Folgerung von (37) ist.

Aus (37) folgt noch unmittelbar das

KOROLLAR. *Enthält die Gruppe* (3) *die in* ξ^{a} *linearen Glieder, so stimmen in einem Punkte* $\xi^{a}_{(0)}$ *die kontra- und kovarianten Vektoren dann und nur dann überein, falls die Gruppe lokal euklidisch ist.*

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb und M. Kucharzewski, *Zur Theorie der geometrischen Objekte*, Annales Polonici Mathematici 2 (1955), S. 250-253.

[2] — *Über den Begriff der Pseudogrössen*, Tensor 8 (1958), S. 79-89.

[3] — *Über die Invarianz gewisser Eigenschaften von Affinoren bei Transformation der entsprechenden Untergruppen der allgemeinen affinen Gruppe*, Tensor 8 (1958), S. 1-7.

[4] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. VIII, 1927.

Reçu par la Rédaction le 28. 9. 1961