ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1963)

Zu einem Satz von T. Ważewski

von H. Heuser (Karlsruhe)

In einer kürzlich erschienen Arbeit hat T. Ważewski eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation bewiesen (siehe [2], Théorème 1). Diese Verallgemeinerung besteht weniger darin, dass die Werte der auftretenden Funktionen in einem Banach-Rauch liegen dürfen, als vielmehr darin, dass der Begriff der Ableitung ersetzt wird durch den der approximativen Ableitung. Die Ważewskische Definition lautet: Es sei $f(x)$ eine in einem reellen Intervall J definierte Funktion mit Werten aus einem Banach-Raum B. Gibt es zu der endlichen Zahl $k \geqslant 0$ ein Element g aus B, so dass

$$(1)\qquad \limsup_{h\to+0}\left\|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-g\right\|\leqslant k$$

ist, so heisst g eine k-approximative rechtsseitige Ableitung von $f(x)$ im Punkte x_0 des Intervalles J. Analog wird die k-approximative linksseitige Ableitung definiert. g ist natürlich nicht immer eindeutig bestimmt. Dieser Begriff der approximativen Ableitung findet eine nützliche Anwendung bei der Frage nach den Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen in Banach-Räumen (siehe [3]).

Andererseits hat M. Müller darauf hingewiesen, dass bei der Frage nach der Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation der Begriff der gleichgradigen Differenzierbarkeit einer Funktionenfolge nützliche Dienste leistet und einen besseren Einblick in den Konvergenzmechanismus gewährt (siehe [1]). Wir wollen in dieser Arbeit zeigen, dass man die Müllersche Beweismethode mit nur kleinen Abänderungen auch im Falle approximativer Ableitungen verwenden kann (wobei wir zum Schluss noch ein Lemma von Ważewski benutzen müssen) und beginnen mit einigen Bezeichnungen und Definitionen.

J sei das endliche Intervall $a<x<b$, $f_n(x)$ eine Folge von Funktionen, die in J definiert sind und Werte aus dem Banach-Raum B annehmen. Wir wollen sagen, dass die Folge $f_n(x)$ in $x_0 \in J$ die Eigenschaft (E) besitzt, wenn $f_n(x)$ in x_0 eine k_n-approximative rechtsseitige Ableitung g_n besitzt,

und zwar so, dass es zu jeder positiven Zahl ε eine von n unabhängige Zahl $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ mit

$$(2) \qquad \left\| \frac{f_n(x_0+h)-f(x_0)}{h} - g_n \right\| < k_n + \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < h < \delta\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

gibt. Eigenschaft (E) ist das Analogon zum Begriff der gleichgradigen Differenzierbarkeit.

Für die Anwendungen sind diejenigen Funktionenfolgen mit der Eigenschaft (E) von besonderer Bedeutung, bei denen die „Toleranzen" k_n gegen Null streben. Der folgende Satz 1 wird diese zusätzliche Voraussetzung benutzen.

Satz 1. *Die Folge $f_n(x)$ möge in J gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren und besitze in $x_0 \in J$ die Eigenschaft* (E). *Streben die Toleranzen k_n in* (2) *gegen* 0 *für $n \to \infty$, so besitzt $f(x)$ in x_0 eine rechtsseitige Ableitung $D_+f(x_0)$, und es ist*

$$D_+f(x_0) = \lim_{n\to\infty} g_n\,.$$

Im Beweis, der sich an den Beweis des Satzes 1 in [1] anschliesst, wollen wir die folgenden Abkürzungen benutzen:

$$F_n(x, h) = \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$F(x, h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Wird nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es wegen (E) ein δ, so dass für $n = 1, 2, \ldots$

$$(3) \qquad \|F_n(x_0, h) - g_n\| < k_n + \varepsilon/4 \quad \text{und} \quad \|F_n(x_0, k) - g_n\| < k_n + \varepsilon/4$$

ist, wenn nur $0 < h$, $k < \delta$ gilt. Wegen $k_n \to 0$ gibt es ferner eine Zahl $N = N(\varepsilon)$, so dass

$$(4) \qquad 0 \leqslant k_n < \varepsilon/4 \quad \text{für} \quad n > N$$

ist. Aus (3) und (4) ergibt sich für $0 < h$, $k < \delta$, $n > N$ die Abschätzung

$$\big\| \big(F_n(x_0, h) - g_n\big) - \big(F_n(x_0, k) - g_n\big) \big\| < \varepsilon\,.$$

Wegen

$$F(x_0, h) - F(x_0, k) = \lim_{n\to\infty} \big[\big(F_n(x_0, h) - g_n\big) - \big(F_n(x_0, k) - g_n\big)\big]$$

folgt daraus

$$\|F(x_0, h) - F(x_0, k)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < h\,, \quad k < \delta\,.$$

Es existiert also $\lim_{h\to+0} F(x_0, h) = D_+f(x_0)$, und es ist

$$(5) \qquad \|F(x_0, h) - D_+f(x_0)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < h < \delta\,.$$

Da ferner

$$\|D_+f(x_0)-g_n\| \\ \leqslant \|D_+f(x_0)-F(x_0,h)\|+\|F(x_0,h)-F_n(x_0,h)\|+\|F_n(x_0,h)-g_n\|$$

für alle n gilt, ist wegen (3), (4) und (5) für $0<h<\delta$ und $n>N$

$$(6) \qquad \|D_+f(x_0)-g_n\| \leqslant \tfrac{3}{2}\varepsilon+\|F(x_0,h)-F_n(x_0,h)\| .$$

Schliesslich kann man für ein h_0 mit $0<h_0<\delta$ die Zahl $N_1>N$ so bestimmen, dass

$$\|F(x_0,h_0)-F_n(x_0,h_0)\|<\varepsilon/2 \quad \text{für} \quad n>N_1$$

ist. Dann folgt aus (6), dass

$$\|D_+f(x_0)-g_n\| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{für} \quad n>N_1$$

ausfällt; es gilt also in der Tat

$$D_+f(x_0)=\lim_{n\to\infty} g_n .$$

Wir geben nun wie in [1] zwei Bedingungen an, die für die Eigenschaft (E) hinreichend sind.

Hilfssatz 1. *Wenn*

$$(7) \qquad \limsup_{h\to+0}\left\|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}-g_n\right\| \leqslant k_n \quad \text{für} \quad n=1,2,\dots,$$

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} k_n=0$$

ist und die Folge der Differenzenquotienten $F_n(x_0,h)$ gleichmässig in einem Intervall $0<h<\beta$ konvergiert, so besitzt die Folge $f_n(x)$ in x_0 die Eigenschaft (E).

Wir beweisen zunächst, dass die k_n-approximativen Ableitungen g_n konvergieren. Offenbar ist für alle, n,m und alle h in $0<h<\beta$

$$(9) \quad \|g_n-g_m\| \leqslant \|F_n(x_0,h)-g_n\|+\|F_m(x_0,h)-g_m\|+\|F_n(x_0,h)-F_m(x_0,h)\| .$$

Geben wir nun eine beliebige positive Zahl ε vor, so können wir wegen (7) zu jedem Index n eine positive Zahl $\delta_n<\beta$ so bestimmen, dass

$$(10) \qquad \|F_n(x_0,h)-g_n\|<k_n+\varepsilon/5 \quad \text{für} \quad 0<h<\delta_n$$

ausfällt. Wegen (8) kann man weiter eine Zahl $N_1(\varepsilon)$ so bestimmen, dass $0<k_n<\varepsilon/5$ für alle $n>N_1(\varepsilon)$ ist. Zusammen mit (9) erhalten wir also die Abschätzung

$$(11) \qquad \|F_n(x_0,h)-g_n\|<\tfrac{2}{5}\varepsilon \quad \text{für} \quad n>N_1(\varepsilon) \text{ und } 0<h<\delta_n .$$

Schliesslich gibt es wegen der gleichmässigen Konvergenz der Folge $F_n(x_0,h)$ eine Zahl $N_2(\varepsilon)$, so dass

$$(12) \quad \|F_n(x_0,h)-F_m(x_0,h)\|<\varepsilon/5 \quad \text{für } n,m>N_2(\varepsilon) \text{ und } 0<h<\beta .$$

Setzt man $N_3(\varepsilon) = \mathrm{Max}(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ und $\delta_{nm} = \mathrm{Min}(\delta_n, \delta_m)$, so erhält man aus (9), (11) und (12), dass

$$\|g_n - g_m\| \leqslant \varepsilon \quad \text{für } n, m > N_3(\varepsilon) \text{ und } h \text{ in } 0 < h < \delta_{nm} .$$

Da aber links h nicht auftritt, folgt aus dieser Abschätzung die Konvergenz der Folge g_n.

Als zweites zeigen wir nun, dass es nach Wahl von $\varepsilon > 0$ eine von n unabhängige Zahl $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ gibt, so dass

$$\|F_n(x_0, h) - g_n\| < k_n + \varepsilon \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \text{ und alle } h \text{ in } 0 < h < \delta$$

ist. Wegen der gleichmässigen Konvergenz der Folge $F_n(x_0, h)$, der eben bewiesenen Konvergenz der Folge g_n und der vorausgesetzten Konvergenz der Folge k_n können wir eine Zahl $N(\varepsilon)$ so bestimmen, dass

$$\|F_n(x_0, h) - F_m(x_0, h)\| < \varepsilon/4 \quad \text{für } n, m > N(\varepsilon) \text{ und alle } h \text{ in } 0 < h < \beta ,$$

$$\|g_m - g_n\| < \varepsilon/4 \quad \text{für} \quad n, m > N(\varepsilon) ,$$

$$|k_m - k_n| < \varepsilon/4 , \quad \text{insbesondere also } k_m < k_n + \varepsilon/4 \quad \text{für} \quad n, m > N(\varepsilon)$$

ist. Ferner gibt es für $n = 1, 2, \dots$ positive Zahlen $\delta_n = \delta_n(\varepsilon) < \beta$, so dass

$$\|F_n(x_0, h) - g_n\| < k_n + \varepsilon/4 \quad \text{für} \quad 0 < h < \delta_n$$

ausfällt. Aus

$$\|F_n(x_0, h) - g_n\| \leqslant \|F_n(x_0, h) - F_m(x_0, h)\| + \|F_m(x_0, h) - g_m\| + \|g_m - g_n\|$$

folgt nun zusammen mit den oben gegebenen Abschätzungen

$$\|F_n(x_0, h) - g_n\| < \varepsilon/4 + k_m + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < k_n + \varepsilon \quad \text{für} \quad n, m > N(\varepsilon) , \quad 0 < h < \delta_m .$$

Denken wir uns $m > N(\varepsilon)$ festgehalten, so gilt also die Abschätzung

$$\|F_n(x_0, h) - g_n\| < k_n + \varepsilon \quad \text{in} \quad 0 < h < \delta_m \tag{13}$$

jedenfalls für alle $n \geqslant m$. Setzt man schliesslich $\delta = \mathrm{Min}(\delta_1, \dots, \delta_m)$ so gilt (13) offenbar für alle n, wenn nur $0 < h < \delta$ ist. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es sei R eine abzählbare Untermenge des Intervalles J, die Funktionen $f_n(x)$ seien stetig in J, während die Funktionen $g_n(x)$ und $k_n(x)$ in $J - R$ definiert seien, ohne dort stetig sein zu müssen. In $J - R$ strebe $g_n(x)$ gleichmässig gegen $g(x)$, $k_n(x)$ gleichmässig gegen 0. Ferner sei für $n = 1, 2, \dots$*

$$\limsup_{h \to +0} \left\| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g_n(x) \right\| \leqslant k_n(x) \quad \text{in} \quad J - R .$$

Dann ist für jedes x_0 aus J die Folge der Differenzenquotienten $F_n(x_0, h)$ in $a - x_0 < h < b - x_0$, $h \neq 0$, gleichmässig konvergent.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist im wesentlichen schon im ersten Teil des Beweises zu Théorème 1 in [2] enthalten. Dort wird nämlich unter den Voraussetzungen unseres Hilfssatzes durch Berufung auf das Lemma 2 gezeigt, dass für beliebige Stellen x, y aus J und für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\left\| \left(f_n(y) - f_n(x)\right) - \left(f_m(y) - f_m(x)\right) \right\| \leqslant \varepsilon \|y - x\| \tag{14}$$

gilt, wenn nur $n, m > N(\varepsilon)$ ist. Setzt man hierin $x = x_0$, $y = x_0 + h$ mit $a - x_0 < h < b - x_0$, $h \neq 0$ und dividiert beide Seiten durch $|h|$, so sieht man, dass in der Tat die Differenzenquotienten $F_n(x_0, h)$ in dem angegebenen Bereich gleichmässig konvergieren.

Diese beiden Hilfssätze ermöglichen es, zusammen mit Satz 1 und Hilfssatz 2 in [1] (1), Sätze absteigender Allgemeinheit über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und approximativer Differentiation auszusprechen (2). Wir wollen hier darauf verzichten und statt dessen nur den Satz von Ważewski (Théorème 1 in [2]) aus unseren bisherigen Betrachtungen herleiten.

Satz 2. *Wenn die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt sind und wenn die Funktionenfolge $f_n(x)$ an einer Stelle c des Intervalles J konvergiert, so konvergiert die Folge $f_n(x)$ in ganz J gleichmässig gegen eine (stetige) Funktion $f(x)$; diese Grenzfunktion $f(x)$ ist in $J - R$ rechtsseitig differenzierbar, und es ist*

$$D_+ f(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad in \qquad J - R\,.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist bei beliebigem x_0 aus J die Folge der Differenzenquotienten $F_n(x_0, h)$ für alle von Null verschiedenen h des Intervalles $a - x_0 < h < b - x_0$ gleichmässig konvergent. Zusammen mit der Konvergenz der Folge $f_n(x)$ für $x = c$ folgt daraus zunächst nach [1], Hilfssatz 2, dass $f_n(x)$ gleichmässig in J gegen eine (stetige) Funktion $f(x)$ konvergiert (3). Ferner ergibt sich aus der gleichmässigen Konvergenz der $F_n(x_0, h)$ nach Hilfssatz 1, dass die Folge $f_n(x)$ in x_0 die Eigenschaft (E) besitzt. Ist nun $x_0 \in J - R$, so folgt aus alledem nach Satz 1, dass $D_+ f(x_0)$ existiert und gleich $\lim_{n\to\infty} g_n(x_0)$ ist.

---

(1) Da in diesem Hilfssatz von Ableitungen nicht die Rede ist, lässt er sich unmittelbar übernehmen.

(2) Siehe [1], Satz 2 und 3 für den Fall der Differentiation im engeren Sinne. Entsprechende Sätze lassen sich auch im Falle der approximativen Differenzierbarkeit auf Grund unserer Betrachtungen formulieren.

(3) Die Konvergenz der Folge $f_n(x)$ kann unter den gemachten Voraussetzungen auch unmittelbar aus (14) hergeleitet werden, wie es in [2] getan wird. Wir berufen uns hier auf diesen Hilfssatz, weil man mit ihm auch allgemeinere Sätze als Satz 2 aus unseren Überlegungen in leichter Weise herleiten kann. Siehe obige Fussnote.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass sich unsere Betrachtungen auch durchführen lassen, wenn man den rechtsseitigen limes superior und die rechtsseitige Ableitung durch den linksseitigen limes superior und die linksseitige Ableitung resp. ersetzt.

Literaturverzeichnis

[1] M. Müller, *Über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation*, Jahresber. deutsch. Math. Ver. 50 (1940), p. 93-104.

[2] T. Ważewski, *Sur la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions possédant une dérivée approximative unilatérale (cas de l'espace de Banach)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. et phys. VIII, 5 (1960), p. 295-299.

[3] — *Sur l'existence et l'unicité des intégrales des équations differentielles ordinaires au cas de l'espace de Banach*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. et phys. VIII, 5 (1960), p. 301-305.

KARLSRUHE, MATHEMATISCHES INSTITUT DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE

Reçu par la Rédaction le 4. 8. 1961