ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVII (1986)

Sur les oscillations amorties d'une solution de l'équation différentielle à retard

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous démontrons une théorème sur l'existence d'une solution $x(t)$ de l'équation différentielle à retard, oscillante et telle que $x(t) \to 0$ pour $t \to \infty$.

Considérons l'équation

$$x'(t) = F\big(t, x(t), x_t\big) \tag{1}$$

où $x_t(s) = x(t+s)$ pour $-h \leqslant s \leqslant 0$ et la fonction $F(t, x, \varphi)$ satisfait aux hypothèses suivantes:

Hypothèses H.

1° $F(t, x, \varphi)$ est continue dans l'ensemble $D = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times C\,([-1, 0], \boldsymbol{R})$.

2° $F(t, x, \varphi)$ est croissante par rapport à φ, c'est-à-dire que

$$\text{pour } \varphi(s) \leqslant \psi(s) \text{ on a } F(t, x, \varphi) \leqslant F(t, x_1 \psi). \tag{2}$$

3° $F(t, x, \varphi)$ est décroissante par rapport à x, c'est-à-dire que

$$F(t, \bar{x}, \varphi) \geqslant F(t, \bar{\bar{x}}, \varphi) \qquad \text{pour } \bar{x} \leqslant \bar{\bar{x}}. \tag{3}$$

4° $x(t) \equiv 0$ est la solution unique de l'équation (1) avec la condition initiale $x(t) = 0$ pour $-h \leqslant t \leqslant 0$, c'est-à-dire

$$F(t, 0, 0) \equiv 0. \tag{4}$$

5° On admet l'unicité des solutions de l'équation (1) avec la condition initiale

$$x(t, t_0, \varphi) = \varphi(t - t_0) \qquad \text{pour } t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0. \tag{5}$$

6° Pour chaque $\varrho \neq 0$ on a

$$\varrho \cdot F(t, \varrho, \varphi) < 0 \qquad \text{pour } \varphi(s) \equiv \varrho \text{ pour } -h \leqslant s \leqslant 0. \tag{6}$$

7° Pour chaque constante ϱ, μ on a

$$\int_0^\infty F(s, \varrho, \mu)\, ds = K_{\varrho\mu}, \qquad |K_{\varrho\mu}| < +\infty. \tag{7}$$

THÉORÈME T_1. *Sous les hypothèses* H *pour chaque solution* $x(t)$ *de l'équation* (1), *telle que* $|x(t)| \leqslant \varrho < \infty$ *pour* $-h \leqslant t \leqslant 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi$ *existe, et* ξ *est fini* ($|\xi| < \infty$).

Démonstration. I. Sous les hypothèses 1°, 2° et 5° on a l'implication:

$$\varphi \leqslant \psi \to x(t, t_0, \varphi) \leqslant x(t, t_0, \psi) \tag{9}$$

(cf. Laksmikanthan, Leela [1]) et par suite, en vertu de 4° pour φ, ψ quelconques continues telles que $\varphi(s) \leqslant 0 \leqslant \psi(s)$ pour $-h \leqslant s \leqslant 0$ on a

$$x(t, 0, \varphi) \leqslant 0 \leqslant x(t, 0, \psi) \quad \text{pour } t \geqslant 0. \tag{10}$$

II. On vérifie facilement que

$$|\varphi| \leqslant \varrho \to |x(t, 0, \varphi)| \leqslant \varrho \quad \text{pour } t \geqslant -h. \tag{11}$$

Supposons que $x(t, 0, \varphi) \leqslant \varrho$ pour $t \leqslant t_1$

$$x(t_1, 0, \varphi) = \varrho, \quad x(t, 0, \varphi) > \varrho \quad \text{pour } t_1 < t \leqslant t_1+\varepsilon. \tag{12}$$

On a donc, en vertu de (6) et (2)

$$x'(t_1, 0, \varphi) \leqslant F(t_1, \varrho, \varrho) < 0$$

et par suite, en vertu de (12)

$$\varrho < x(t, 0, \varphi) < \varrho = x(t_1, 0, \varphi) \quad \text{pour } t_1 < t \leqslant t_1+\varepsilon$$

d'où il vient que $x(t, 0, \varphi) \leqslant \varrho$ pour $-h \leqslant t < \infty$.

D'une une façon analogue on obtient l'inégalité

$$x(t, 0, \varphi) \geqslant -\varrho \quad \text{pour } -h \leqslant t < \infty$$

et, par suite, pour chaque φ continue telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant \varrho$ on a

$$0 \leqslant x(t, 0, \varphi) = x(t) \leqslant \varrho \tag{13}$$

et pour $0 \geqslant \psi \geqslant -\varrho$

$$0 \geqslant y(t) = x(t, 0, \psi) \geqslant -\varrho. \tag{14}$$

La fonction $F(t, x, \varphi)$ étant croissante par rapport à φ et décroissante par rapport à x, on a

$$F(t, \varrho, 0) \leqslant x'(t) = F(t, x(t), x_t) \leqslant F(t, 0, \varrho)$$

d'où

$$\int_{t_1}^{t} F(s, \varrho, 0)\,ds \leqslant x(t) - x(t_1) \leqslant \int_{t_1}^{t} F(s, 0, \varrho)\,ds.$$

Les intégrales $\int_0^\infty F(s, \varrho, 0)\,ds$ et $\int_0^\infty F(s, 0, \varrho)\,ds$ étant convergentes pour chaque

$\varepsilon > 0$ il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que

(15) $$-\varepsilon \leqslant \int_{t_1}^{t} F(s, \varrho, 0)\,ds \leqslant x(t) - x(t_1) \leqslant \int_{t_1}^{t} F(s, 0, \varrho)\,ds \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } t \geqslant t_1 \geqslant t_\varepsilon$$

donc $\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi$ existe, $|\xi| \leqslant \varrho$.

D'une façon analogue on montre que η existe, $|\eta| \leqslant \varrho$ tel que $y(t) \to \eta$ pour $t \to \infty$.

Envisageons $\sigma(s)$ quelconque, continue pour $-h \leqslant s \leqslant 0$, il existe $\varrho > 0$ et deux fonctions telles que

(16) $$\varrho \geqslant \varphi(s) \geqslant 0 \geqslant \psi(s) \geqslant -\varrho \quad \text{pour } -h \leqslant s \leqslant 0$$

et

(17) $$\varphi(s) \geqslant \sigma(s) \geqslant \psi(s) \quad \text{pour } -h \leqslant s \leqslant 0.$$

Posons

$$x(t) = x(t, 0, \varphi), \quad y(t) = x(t, 0, \psi), \quad z(t) = x(t, 0, \sigma).$$

On a

(18) $$x(t) \geqslant z(t) \geqslant y(t) \quad \text{pour } -h \leqslant t$$

et

$$\varrho \geqslant x(t) \geqslant 0 \geqslant y(t) \geqslant -\varrho \quad \text{pour } -h \leqslant t < \infty.$$

Nous avons démontré qu'il existe un couple ξ, η tel que

(19) $$\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \eta$$

donc pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $t_\varepsilon > 0$ tel que

(20) $$x(t) \leqslant \xi + \varepsilon \quad \text{pour } t \geqslant t_\varepsilon > 0,$$

(21) $$y(t) \geqslant \eta - \varepsilon \quad \text{pour } t \geqslant t_\varepsilon > 0.$$

En vertu de (20) et (21)

$$F\big(t, x(t), y_t\big) \leqslant z'(t) = F\big(t, z(t), z_t\big) \leqslant F\big(t, y(t), x_t\big),$$

et, en vertu de (20),

$$F(t, \xi+\varepsilon, \eta-\varepsilon) \leqslant z'(t) \leqslant F(t, \eta-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \quad \text{pour } t \geqslant t_\varepsilon > 0$$

d'où

$$\int_{\tau}^{t} F(s, \xi+\varepsilon, \eta-\varepsilon)\,ds \leqslant z(t) - z(\tau) \leqslant \int_{\tau}^{t} F(s, \eta-\varepsilon, \xi+\varepsilon)\,ds.$$

L'intégrale $\int_0^\infty F(s, \varrho, \mu)\,ds$ étant convergent pour chaque ϱ, μ il existe pour chaque $\varepsilon > 0$, $T_\varepsilon \geqslant t_\varepsilon$ tel que

$$-\varepsilon \leqslant \int_\tau^t F(s, \xi+\varepsilon, \eta-\varepsilon)\,ds \leqslant z(t)-z(\tau) \leqslant \int_\tau^t F(s, \eta-\varepsilon, \xi+\varepsilon)\,ds \leqslant \varepsilon$$

$$\text{pour } t \geqslant \tau \geqslant T_\varepsilon.$$

Ainsi nous avons établi l'existence d'un ζ, $|\zeta| \leqslant \varrho$ tel que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \zeta.$$

Comme $z(t)$ est quelconque, notre théorème T_1 est démontré.

THÉORÈME T_2. *Sous les hypothèses* H *chaque solution* $z(t)$ *de l'équation* (1) *oscillante autour de* 0 *tend vers zéro pour* $t \to \infty$ *(c'est-à-dire elle est amortie).*

Démonstration. Envisageons une solution $z(t)$ quelconque, oscillante autour de 0. Il existe donc une suite $\{t_n\} \to \infty$, telle que $z(t_n) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ mais en vertu du théorème T_1

$$0 = \lim_{n\to\infty} z(t_n) = \lim_{t\to\infty} z(t) = \xi$$

donc $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Remarque R_1. Les hypothèses H sont satisfaites par exemple dans le cas où

$$F(t, x, \varphi) = \alpha(t)\varphi(-1) - \beta(t)x$$

et $\alpha(t)$, $\beta(t)$ sont deux fonctions continues dans $-h \leqslant t < \infty$ telles que

$$\beta(t) > \alpha(t) > 0 \qquad \text{pour } t \geqslant 0$$

et

$$\int_0^\infty \beta(s)\,ds = k$$

on a

$$\int_0^\infty \alpha(s)\,ds = \bar{k} < k.$$

Dans le cas envisagé l'équation (1) a la forme

$$x'(t) = \alpha(t)x(t-1) - \beta(t)x(t), \tag{1'}$$

$$\int_0^\infty F(s, \varrho, \mu)\,ds = \int_0^\infty \alpha(s)\,ds\varrho - \int_0^\infty \beta(s)\,ds\mu = \bar{k}\varrho - k\mu = K_{\varrho\mu},$$

$$|K_{\varrho\mu}| \leqslant \bar{k}\varrho + k\mu < \infty, \qquad \varrho F(t, \varrho, \varrho) = [\alpha(t) - \beta(t)]\varrho^2 < 0.$$

Du théorème T_2 il résulte que chaque solution oscillante de l'équation (1') converge vers zéro.

Remarque R_2. Le théorème T_2 n'entraîne pas l'existence d'une solution oscillante de l'équation (1). Par exemple dans le cas où

$$F(t, x, \varphi) = -\beta(t)x$$

chaque solution de (1) a la forme

$$x(t, 0, \varphi) = \varphi(0)\exp\left[-\int_0^t \beta(s)\,ds\right.$$

et par suite il n'existe pas de solution oscillantes autour de 0 (different de $x(t) \equiv 0$) tendique dans le cas où $\int_0^\infty \beta(s)\,ds = k < \infty$

$$\lim_{t\to\infty} x(t, 0, \varphi) = \varphi(0)e^{-k} \neq 0 \quad \text{est finie.}$$

Remarque R_3. Dans le cas où

$$F(t, x, \varphi) = \alpha(t-1)\varphi(-1) - \alpha(t)x$$

où $0 < \alpha(t-1) < \alpha(t)$ et $\int_0^\infty \alpha(t)\,dt = k < \infty$ chaque solution $x(t)$ de l'équation

$$(P_1) \qquad x'(t) = \alpha(t-1)x(t-1) - \alpha(t)x(t)$$

converge vers une limite finie pour $t \to \infty$ et chaque solution oscillante satisfait à la condition $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. D'après un théorème de O. Arino et P. Sérguier [2] (cf. le théorème T_{34}) chaque solution $x(t)$ telle que

$$(Q) \qquad x(0) + \int_{-1}^{0} \alpha(s)\,ds = 0$$

est oscillante autour de 0. De notre théorème T_2 il résulte donc que chaque solution de (P_1) satisfaisante à (Q) tend vers zéro pour $t \to \infty$.

Remarque R_4. Il est évidente que l'hypothèse 6° peut être remplacée par l'hypothèse 6°: chaque solution $x(t, t_0, \varphi)$ de l'équation (1) est bornée (pour $t \geqslant t_0 - h$).

Par exemple (cf. [3]) dans le cas où l'équation (1) a la forme

$$(\bar{1}) \qquad x'(t) = f\big(t-1, x(t-1)\big) + g\big(t, x(t)\big)$$

où les hypothèses suivantes sont satisfaites.

HYPOTHÈSES A. $f(t, x)$ et $g(t, x)$ sont continues par rapport à t, x, $f(t, x)$ est croissante par rapport à x,

$$(\bar{6}) \qquad x\cdot[f(t, x) + g(t, x)] < 0 \quad \text{pour } x \neq 0,\ f(t, 0) \equiv 0$$

et l'éqution (1) satisfait à l'unicité des solutions satisfaisant la condition initiale (5). On obtient donc dans le cas envisagé le Théorème $\bar{T}_2$, admettons les Hypothèses B:

1° $g(t, x)$ est décroissante par rapport à x,

2° pour chaque ϱ, μ on a

$$(\bar{7}) \qquad \int_0^\infty [f(s-1, \varrho)+g(s, \mu)]\,ds = K_{\varrho\mu}, \qquad |K_{\varrho\mu}| < \infty.$$

Sous les hypothèses A et B chaque solution oscillante de l'équation (1) tend vers zéro.

De la remarque R_4 il s'ensuit que dans le cas de l'équation (P_1) envisagé dans la remarque R_3 on peut remplacer l'inégalité $(\bar{6})$ par

$$(\bar{\bar{6}}) \qquad 0 < \alpha(t), \qquad \int_0^\infty \alpha(t)\,dt = k < \infty.$$

Références

[1] V. Laksmikanthan, S. Leela, *Differential and integral inequalities*, Vol. II. Academic Press, New York and London 1969.

[2] O. Arino et P. Sérguier, Thèse de doctorat d'état. Publications Mathématiques, Université de Pau et du Pays l'Adour (1980).

[3] Z. Mikołajska, *Une remarque sur les solutions bornées d'une équation différentielle à retard*, Ann. Polon. Math. 47 (1986), 105–114.

Reçu par la Rédaction le 1981.06.18