ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XI, 1 (1969)

ALGORITHM 1

E. NEUMAN (Wrocław)

ELLIPTIC INTEGRALS OF THE SECOND AND THIRD KINDS

1. Procedure declaration.

real procedure *eiPi*(*fi*, *k2*, *rp*, *eiE*);
value *fi*, *k2*, *rp*;
real *fi*, *k2*, *rp*, *eiE*;
comment The function *eiPi* is a elliptic integral of the third kind

(1) $$\Pi(\varphi, k^2, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1-k^2\sin^2 t)^{3/2}}.$$

Data:
fi, *k2* — the arguments φ, k^2 of the integral,
rp — the relative machine precision.
Additional result:
eiE — the value of elliptic integral of the second kind

(2) $$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} (1-k^2\sin^2 t)^{1/2} dt.$$

Non-local procedure identifier:
arc sin — the principal value of the inverse sine;
begin
real *A*, *B*, *C*, *fi1*, *g*, *k1*, *m*;
if *k2* = 0
then *eiPi* := *eiE* := *fi*
else begin
rp := 3×*rp*/(1−*rp*);
rp := 1−(1+2.62×*rp*)×*rp*;
fi1 := *sin*(*fi*);
k1 := 1−*k2*;
g := *k2*×*fi1*;
m := *g*×*cos*(*fi*)/*sqrt*(1−*g*×*fi1*);

```
            A := 1;
            B := C := 0;
            for k2 := sqrt(k2), 2×sqrt(k2)/g while k2 < rp do
              begin
                g := 1+k2;
                fi1 := k2×sin(fi);
                B := A×(1−k2)+2×B/g;
                C := C+A×fi1;
                A := A×g;
                fi := .5×(fi+arcsin(fi1))
              end k2;
            fi1 := sin(fi);
            eiE := A×fi1+B×ln((1+fi1)/cos(fi))−C;
            eiPi := (eiE−m)/k1
          end k2 > 0
    end eiPi
```

2. Method used. The method used in the algorithm is presented in the author's paper [2]. At present we shall describe the criterion for ending the iteration according to equations (4)-(6), (13), (14) from [2]. The criterion is connected with the rounding errors occurred in the calculation of k_{n+1}. Let us assume that the relative error of rounding a number is r and the relative error of calculation $\sqrt{k_n}$ is $2r$. Then the absolute error of k_{n+1} is

$$\delta = \frac{2\Delta\sqrt{k_n}+\dfrac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}\Delta(1+k_n)}{1+k_n-\Delta(1+k_n)} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}\cdot\frac{3r}{1-r} \leqslant \frac{3r}{1-r},$$

where Δx denotes the absolute error of x. The value of the absolute error δ may effect the convergence of sequence $\{k_n\}$. It may slow down the convergence, it may shift the limit to a number different from 1 or even make the sequence to be divergent. It is easy to see that every machine sequence $\{k_n\}$ (i.e. created with possible rounding errors) can be estimated from below by a sequence $\{l_n\}$ where

$$l_0 = k, \quad l_{n+1} = \frac{2\sqrt{l_n}}{1+l_n} - \delta \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

If $\delta < 1/2$, then the equation

$$l = \frac{2\sqrt{l}}{1+l} - \delta$$

with unknown l has two real roots: $l_{\min} \approx \frac{1}{4}\delta^2$, and $l_{\max} > 1-\delta-2{,}62\,\delta^2$

for $\delta > 0$. If $k > l_{\min}$, then the sequence $\{l_n\}$ has the limit $l_{\max}$. Hence it follows that the sequence $\{k_n\}$ must have elements not smaller than $1-\delta-2{,}62\,\delta^2$ where $\delta = 3r/(1-r)$. Therefore in the procedure *eiPi* the iteration is stopped as soon as such an element k_{n+1} is obtained.

3. Certification. The procedure *eiPi* has been verified on the Elliott 803 ($rp = 2^{-29}$) and the Odra 1204 ($rp = 2^{-37}$) computers. Results of computations were compared with the values from [1] (see tables 1 and 2). The calculation time on Elliott 803 for one integral is 5,2 seconds.

TABLE 1. $\Pi(\varphi, k^2, k)$

φ	k^2	[1]	Elliott 803	Odra 1204
$\pi/6$	.5	.5611886	.561188618	.5611885948
	.6	.5697025	.569702423	.5697024643
	.7	.5786068	.578606891	.5786068494
	.8	.5879323	.587932283	.5879323079
	.9	.5977128	.597712653	.5977128402
$\pi/3$	.5	1.382180	1.38218031	1.382180358
	.6	1.491384	1.49138434	1.491384429
	.7	1.627646	1.62764640	1.627646434
	.8	1.803739	1.80373918	1.803739432
	.9	2.042593	2.04259194	2.042592776

TABLE 2. $E(\varphi, k)$

φ	k^2	[1]	Elliott 803	Odra 1204
$\pi/6$	.5	.5120493	.512049335	.5120493224
	.6	.5096819	.509681898	.5096819167
	.7	.5072940	.507293972	.5072939611
	.8	.5048848	.504884789	.5048847962
	.9	.5024537	.502453702	.5024537232
$\pi/3$	.5	.9649515	.964951428	.9649514578
	.6	.9468783	.946878257	.9468782967
	.7	.9280905	.928090515	.9280905341
	.8	.9084704	.908470380	.9084704440
	.9	.8878584	.887858244	.8878583504

References

[1] В. М. Беляков, Р. И. Кравцова и М. Г. Раппопорт, *Таблицы эллиптических интегралов*, т. 1, Москва 1962.

[2] E. Neuman, *On the calculation of elliptic integrals of the second and third kinds*, Zastosow. Matem. 11 (1969), pp. 91-94.

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS
UNIVERSITY OF WROCŁAW

Received on 28. 3. 1968

ALGORYTM 1

E. NEUMAN (Wrocław)

CAŁKI ELIPTYCZNE DRUGIEGO I TRZECIEGO RODZAJU

STRESZCZENIE

Funkcja *eiPi* jest całką eliptyczną trzeciego rodzaju (1).
Dane:
fi, k2 — argumenty φ, k^2 całki,
rp — dokładność względna działań na liczbach rzeczywistych.
Dodatkowy wynik:
eiE — wartość całki eliptycznej drugiego rodzaju (2).
Nielokalna nazwa funkcji niestandardowej:
arc sin — arcus sinus.

W algorytmie zastosowano metodę opisaną w pracy autora [2]. Procedurę *eiPi* sprawdzono na maszynach cyfrowych Elliott 803 ($rp = 2^{-29}$) i Odra 1204 ($rp = 2^{-37}$). Wyniki obliczeń porównuje się w tablicach 1 i 2 z wartościami stablicowanymi w [1]. Czas obliczenia jednej całki na maszynie Elliott 803 wynosi 5,2 sek.

АЛГОРИТМ 1

Э. НЕЙМАН (Вроцлав)

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

РЕЗЮМЕ

Функция *eiPi* является эллиптическим интегралом третьего рода (1).
Входные данные:
fi, k2 — аргументы φ, k^2 интеграла,
rp — относительная машинная точность.
Добавочный результат:
eiE — значение эллиптического интеграла второго рода (2).
Нелокальный идентификатор нестандартной функции:
arc sin — главное значение арксинуса.

В алгоритме применяется метод описанный в работе автора [2]. Процедура *eiPi* была проверена на вычислительных машинах Эллиотт 803 ($rp = 2^{-29}$) и Одра 1204 ($rp = 2^{-37}$). Таблицы 1 и 2 содержат результаты вычислений и табличные значения из [1]. Время вычисления одного интеграла на ЭВМ Эллиотт 803 равно 5,2 сек.