S. TRYBUŁA (Wrocław)

ESTYMACJA Z UWZGLĘDNIENIEM BŁĘDÓW KONTROLERA

Fabryka produkuje pewne przedmioty ze stałą, lecz nieznaną wadliwością w. Zbadano n przedmiotów i zauważono m braków. Jak na podstawie tego wyniku ocenić liczbę w? — Zagadnienie nie jest nowe i było już wielokrotnie badane. Na ogół jednak zakładało się, że jeżeli zauważono m braków, to w próbce naprawdę jest m braków. W praktyce sytuacja wygląda często inaczej. Niekiedy robi się błędy przy badaniu i otrzymany wynik często nie jest identyczny z prawdziwą ilością braków w próbie. Niniejsza praca zajmuje się estymacją parametru w z uwzględnieniem błędów przy badaniu próbki.

Załóżmy, że p_1 jest prawdopodobieństwem uznania sztuki dobrej za złą, a p_2 jest prawdopodobieństwem uznania sztuki złej za dobrą. Wtedy prawdopodobieństwo p, że sztuka, którą właśnie teraz produkuje automat, zostanie po zbadaniu uznana za złą jest równe

$$p = w(1-p_2)+(1-w)p_1 = p_1+w(1-p_1-p_2). \tag{1}$$

Parametr p Oderfeld [2] nazywa *pozorną wadliwością*.

Jeżeli prawdopodobieństwo, że dana sztuka jest brakiem, nie zależy od tego, czy inne sztuki pobrane do próbki są dobre czy też złe, i jeżeli to samo założenie jest prawdziwe dla wyników badania, to prawdopodobieństwo, że wśród n zbadanych próbnych sztuk m zostanie uznanych za złe, jest równe

$$P(X = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, \tag{2}$$

gdzie p jest dane wzorem (1).

Załóżmy, że p_1 i p_2 są znane. Chcemy na podstawie otrzymanej wartości zmiennej losowej X ocenić wartość parametru w. Zauważmy, że jeżeli $1-p_1-p_2 = 0$, to rozkład (2) zmiennej losowej X nie zależy od w. Stąd wynika, że wynik badania próbki $X = m$ nie daje w tym przypadku żadnych informacji o wartości w; opierając się tylko na tym wyniku nie mamy żadnych probabilistycznych podstaw do twierdzenia, że wartość w jest ta, a nie inna. W dalszej części pracy będziemy zakładali, że $1-p_1-p_2 \neq 0$.

Jak dobrze wiadomo, najefektywniejszym estymatorem parametru p jest $f(X) = X/n$(¹). Z drugiej strony, z wzoru (1) wynika, że jeżeli $1-p_1-p_2 \neq 0$, to wadliwość w wyraża się liniowo przez p:

$$w = \frac{p-p_1}{1-p_1-p_2}. \tag{3}$$

Stąd więc wynika, że najefektywniejszym estymoatrem $f_1(X)$ parametru w jest

$$f_1(X) = \frac{1}{1-p_1-p_2}(X/n-p_1). \tag{4}$$

Estymator ten ma jednak pewną zasadniczą wadę. Ponieważ X może przyjmować wartości całkowite od 0 do n, więc jeżeli nie zachodzi równocześnie $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, to dla niektórych wartości zmiennej X $f_1(X)$ jest ujemne lub większe od jedności. Kładąc np. $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0$ otrzymujemy $f_1(0) = -1/9$. Jest to oczywiście nonsens i prowadzi do wniosku, iż w tym przypadku zawodzi zasada, żeby ograniczać się tylko do estymatorów nieobciążonych i z dwóch takich estymatorów ten uważać za lepszy, który ma mniejszą wariancję. Należy więc poszukać innej zasady wyboru.

Sytuacja zmienia się w sposób istotny, jeżeli mamy informację, która dla każdego t daje nam aprioryczne prawdopodobieństwo $\varphi(t)dt$, iż wartość parametru w znajdzie się w przedziale $(t, t+dt)$. Wtedy, zgodnie z ogólną zasadą najmniejszych kwadratów, za optymalny będziemy uważać ten estymator $f_2(X)$, który minimizuje oczekiwany błąd kwadratowy

$$\begin{aligned} E[w-f(X)]^2 &= E\{E[(w-f(X))^2|w]\} = \\ &= \int_0^1 E[(w-f(X))^2|w]\varphi(w)dw = \\ &= \int_0^1 \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m(1-p)^{n-m}[w-f(m)]^2\varphi(w)dw. \end{aligned} \tag{5}$$

(¹) *Najefektywniejszym estymatorem* parametru w nazywa się taką funkcję $g_1(X)$ określoną na próbce X, która wśród wszystkich funkcji $g(X)$ spełniających pewne warunki typu regularności i takich, że $E[g(X)] \equiv w$, ma najmniejszą wariancję $E[g(X)-E(g(X))]^2$. Jeżeli dla jakiejś funkcji $h(X)$ zachodzi $E[h(X)] \equiv w$, to h nazywamy *nieobciążonym estymatorem* parametru w. ($E(Y)$ oznacza tu wartość oczekiwaną zmiennej losowej Y.)

Jak wiadomo, (5) przyjmuje minimum dla

$$f_2(m) = E[w|X = m] = \frac{\int\limits_0^1 wp^m(1-p)^{n-m}\varphi(w)\,dw}{\int\limits_0^1 p^m(1-p)^{n-m}\varphi(w)\,dw}. \tag{6}$$

Można to zresztą bezpośrednio stwierdzić różniczkując wyrażenie pod całką we wzorze (5) względem $f(m)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$.

Pokażemy, że $0 \leqslant f_2(m) \leqslant 1$ i że $f_2(m)$ jest niemalejącą lub nierosnącą funkcją zmiennej m, w zależności od tego, czy $1-p_1-p_2$ jest większe czy mniejsze od 0. Pierwsza część twierdzenia wynika z tego faktu, że we wzorze (6) funkcja w liczniku pod całką jest dla każdego $0 \leqslant w \leqslant 1$ niewiększa od funkcji pod całką w mianowniku i że obie są nieujemne. Aby udowodnić drugą część twierdzenia, oznaczmy

$$\hat{E}_m[h(w)] = \frac{\int\limits_0^1 h(w)p^m(1-p)^{n-m-1}\varphi(w)\,dw}{\int\limits_0^1 p^m(1-p)^{n-m-1}\varphi(w)\,dw} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Wtedy

$$f_2(m+1)-f_2(m) = \frac{\hat{E}_m(wp)}{\hat{E}_m(p)} - \frac{\hat{E}_m[w(1-p)]}{\hat{E}_m(1-p)} = \frac{\hat{E}_m(wp)-\hat{E}_m(w)\hat{E}_m(p)}{\hat{E}_m(p)\hat{E}_m(1-p)} =$$

$$= \frac{(1-p_1-p_2)[\hat{E}_m(w^2)-\hat{E}_m^2(w)]}{\hat{E}_m(p)\hat{E}_m(1-p)} = \frac{(1-p_1-p_2)\hat{E}_m\left[\left(w-\hat{E}_m(w)\right)^2\right]}{\hat{E}_m(p)\hat{E}_m(1-p)}.$$

Ponieważ

$$\frac{\hat{E}_m\left[\left(w-\hat{E}_m(w)\right)^2\right]}{\hat{E}_m(p)\hat{E}_m(1-p)} \geqslant 0,$$

więc $f_2(m)$ jest niemalejąca, gdy $1-p_1-p_2 > 0$, i nierosnąca, gdy $1-p_1-p_2 < 0$. W dalszej części pracy będziemy zakładali, że $1-p_1-p_2 > 0$. Wszystkie dalsze rozważania łatwo jednak uogólnić na drugi przypadek.

Przyjmijmy teraz postulat Bayesa, że wszystkie wartości parametru w są a priori jednako prawdopodobne, tj. że $\varphi(w) \equiv 1$. Wtedy korzystając z wzoru (6) otrzymujemy

(7)
$$f_2(m) = \frac{\int\limits_0^1 wp^m(1-p)^{n-m}dw}{\int\limits_0^1 p^m(1-p)^{n-m}dw} = \frac{1}{1-p_1-p_2}\left[\frac{\int\limits_{p_1}^{1-p_2} p^{m+1}(1-p)^{n-m}dp}{\int\limits_{p_1}^{1-p_2} p^m(1-p)^{n-m}dp} - p_1\right] =$$

$$= \frac{1}{1-p_1-p_2}\left\{\frac{\dfrac{\Gamma(m+2)\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+3)}}{\dfrac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+2)}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{[I_{1-p_2}(m+2,\, n-m+1)-I_{p_1}(m+2,\, n-m+1)]}{[I_{1-p_2}(m+1,\, n-m+1)-I_{p_1}(m+1,\, n-m+1)]} - p_1\right\} =$$

$$= \frac{1}{1-p_1-p_2}\left[\frac{m+1}{n+2}\cdot\frac{I_{1-p_2}(m+2,n-m+1)-I_{p_1}(m+2,n-m+1)}{I_{1-p_2}(m+1,n-m+1)-I_{p_1}(m+1,n-m+1)} - p_1\right],$$

gdzie $I_r(s,t)$ jest niekompletną funkcją beta

$$I_r(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}\int\limits_0^r x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx.$$

Tablice tej funkcji znajdzie czytelnik w [3]. Gdy n jest duże, można tu wykorzystać fakt, że rozkład beta $I_r(\alpha n, \beta n)$ jest asymptotycznie normalny. Dokładniej: dla dużych n

$$I_r(\alpha n, \beta n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{(r-m)/\sigma} e^{-x^2/2}dx,$$

gdzie

$$m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \sigma = \frac{1}{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{n\alpha+n\beta+1}}$$

(patrz [1]). Dla $p_1 = p_2 = 0$, $f_2(m) = (m+1)/(n+2)$ wzór ten podał Laplace.

Poniżej dla przykładu podajemy wartości estymatora $f_2(m)$ dla $p_1 = 0{,}01$, $p_2 = 0{,}1$, $n = 20$ oraz, dla porównania, wartości $f_1(m)$ dla tych samych p_1, p_2, n i $f_2^0(m) = (m+1)/(n+2)$ (tablica 1).

Jak widzimy, wartości estymatora $f_2(m)$ są na ogół większe od odpowiednich wartości $f_2^0(m)$. Odpowiada to temu, że dla $p_1 = 0{,}01$, $p_2 = 0{,}1$ wynik badania m powinien być na ogół mniejszy od prawdziwej ilości

TABLICA 1

m	$f_1(m)$	$f_2(m)$	$f_2^0(m)$	m	$f_1(m)$	$f_2(m)$	$f_2^0(m)$
0	−0,0112	0,0506	0,0455	11	0,6067	0,6016	0,5455
1	0,0449	0,0927	0,0909	12	0,6629	0,6527	0,5909
2	0,1011	0,1422	0,1364	13	0,7191	0,7036	0,6364
3	0,1573	0,1932	0,1818	14	0,7753	0,7540	0,6818
4	0,2135	0,2441	0,2273	15	0,8315	0,8028	0,7273
5	0,2697	0,2952	0,2727	16	0,8876	0,8479	0,7727
6	0,3258	0,3469	0,3182	17	0,9438	0,8864	0,8182
7	0,3820	0,3973	0,3636	18	1,0000	0,9187	0,8636
8	0,4382	0,4484	0,4091	19	1,0562	0,9387	0,9091
9	0,4944	0,4995	0,4545	20	1,1124	0,9540	0,9545
10	0,5516	0,5506	0,5000				

braków w próbie, a więc podawać nam tendencyjnie fałszywe informacje o prawdziwej wadliwości w. Nierówność $f_2(m) > f_2^0(m)$ każe nam przypuszczać niwelację tej tendencji.

Prace cytowane

[1] H. Cramér, *Mathematical methods of statistics*, Princeton 1946, str. 179.

[2] J. Oderfeld i K. Wiśniewski, *Odbiór statystyczny z uwzględnieniem błędów kontrolera*, Zast. Mat. 2 (1955), str. 312-327.

[3] K. Pearson, *Tables of the incomplete beta-function*, Cambridge 1948.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 24. 9. 1957

С. ТРЫБУЛА (Вроцлав)

ОЦЕНКА С УЧЕТОМ ОШИБОК БРАКОВЩИКА

РЕЗЮМЕ

Браковщик допускает ошибки при квалифицировании предметов из выборки. Обозначим соответственно через p_1 и p_2 вероятность принятия исправного предмета за брак и брака за исправный. В статье рассматривается вопрос оценки доли брака совокупности, из которой взята выборка. Самая эффективная оценка (4) непригодна, главным образом потому, что для некоторых выборок принимает значения отрицательные или больше единицы. Автор предлагает оценку (7), являющуюся байесовским решением в предположении равномерного распределения *a priori*.

S. TRYBUŁA (Wrocław)

ESTIMATION TAKING INTO ACCOUNT THE ERROR OF THE CONTROLLER

SUMMARY

The controller commits errors in qualifying items of a sample. Let us denote by p_1 and p_2 the probability of recognizing a good item as a bad one and a bad item as a good one. The author considers the problem of estimating the per cent defective in the lot from which the sample has been taken. The most effective estimator defined by formula (4) is not suitable, mainly because for some values of the sample it assumes negative values or values greater than unity. The author proposes the estimator (7), which is a Bayes solution, under the assumption that the prior distribution is uniform.