ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1965)

Principe d'extremum relatif aux solutions de l'équation intégro-différentielle du processus stochastique markovien mixte

par M. Krzyżański (Kraków)

À la mémoire de Witold Pogorzelski

1. J'ai exposé dans le travail [3] un théorème concernant le principe d'extremum relatif aux solutions de l'équation intégro-différentielle du processus stochastique markovien purement discontinu. Dans le présent travail j'établis un théorème analogue relatif à l'équation intégro-différentielle du processus stochastique markovien mixte. Cette équation, ainsi que son équation adjointe, ont été étudiées par W. Feller dans le travail [1]. L'équation adjointe apparaît aussi dans le travail [2] de A. Kolmogorov (équation (179)).

D'une façon générale, considérons l'équation de la forme

$$(1)\quad \mathcal{F}(u) = u'_t(t,X) - \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,X)u''_{x_ix_j}(t,X) - \sum_{i=1}^{m} b_i(t,X)u'_{x_i}(t,X) - \\ -c(t,X)u(t,X) = p(t,X)\int_{\bar{S}_0}[u(t,Z)-u(t,X)]P(t,X;dZ),$$

$\bar{S}_0$ étant la fermeture d'un domaine S_0, en général non borné, de l'espace $\mathcal{E}^m$ des variables $x_1, \dots, x_m$. Nous supposons que les coefficients de l'opérateur $\mathcal{F}(u)$, ainsi que la fonction $p(t,X)$, sont définis dans un domaine $D = (0, T_0)\times S_0$ de l'espace-temps $\mathcal{E}^{m+1}$ des variables $t, x_1, \dots, x_m$, T_0 étant un nombre positif (on peut admettre d'ailleurs que $T_0 = \infty$) et que la forme

$$\mathfrak{A}(\Lambda) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,X)\lambda_i\lambda_j$$

y est définie ou semi-définie positive. On va préciser dans la suite les autres hypothèses sur les coefficients de $\mathcal{F}(u)$ et sur la fonction $p(t,X)$. Enfin, $P(t,X;E)$ est une mesure non négative, complétement additive, définie sur les ensembles mesurables (B) (boreliens) de $\mathcal{E}^m$, dépendant du point (t, X) de D. On suppose enfin que

$$P(t, X; \bar{S}_0) = 1 . \tag{2}$$

2. Dans la suite nous aurons recours à un lemme concernant certaines propriétés d'une fonction définie et bornée dans un domaine non borné. Soit maintenant, D un domaine non borné, dont la frontière $F(D)$ est formée par les domaines S_0 et S_T des plans $t = 0$ et $t = T$, en général non bornés, et par une surface latérale $\mathfrak{S}$ (non nécessairement cylindrique). Soit $\Sigma = S_0 \cup \mathfrak{S}$ (on admet que $\mathfrak{S}$ est un ensemble fermé). Nous allons démontrer le lemme suivant:

LEMME. *On suppose que les fonctions $a_{ij}(t, X)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ sont définies et bornées dans l'ensemble $D^* = \bar{D} \backslash \Sigma$, $\bar{D}$ étant la fermeture du domaine $\bar{D}$* [1] *et que la forme*

$$\mathfrak{A}(\Lambda) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X) \lambda_i \lambda_j$$

est définie ou semi-définie positive. Soit $u(t, X)$ une fonction continue et bornée supérieurement dans $\bar{D}$, admettant des dérivées $u'_t, u'_{x_i}, u''_{x_i x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ continues dans D^*. Nous supposons qu'on a

$$M = \sup_{\Sigma} u(t, X) < \sup_{\bar{D}} u(t, X) = \bar{M} . \tag{3}$$

Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un point $(\tilde{t}, \tilde{X}) \in D^*$ tel qu'on a

$$u(\tilde{t}, \tilde{X}) > \bar{M} - \varepsilon, \quad u'_t(\tilde{t}, \tilde{X}) > -\varepsilon, \quad |u'_{x_i}(t, X)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\tilde{t}, \tilde{X}) u''_{x_i x_j}(\tilde{t}, \tilde{X}) < \varepsilon .$$

Démonstration. Soit ϱ un nombre positif arbitraire (indépendant de ε) et soit $\bar{D}_\varrho$ l'ensemble des points (t, X) de $\mathcal{E}^{m+1}$ dont la distance à l'ensemble $\bar{D}$ est non supérieure à 2ϱ et tels que $t \leqslant T$. Nous prolongeons le domaine d'existence de la fonction $u(t, X)$ à l'ensemble $\bar{D}_\varrho$ de telle façon qu'elle y soit continue et qu'on ait $u(t, X) \leqslant M$ pour $(t, X) \in \bar{D}_\varrho \backslash D^*$. Soit η un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}(\bar{M} - M)$. Il résulte de (3) qu'il existe un point $(\bar{t}, \bar{X}) \in D^*$ tel qu'on a

$$u(\bar{t}, \bar{X}) > \bar{M} - \eta . \tag{5}$$

Soit

$$\bar{u}(t, X) = u(t, X) + \eta \Phi(t, X) \quad \text{pour} \quad (t, X) \in \bar{D}_\varrho , \tag{6}$$

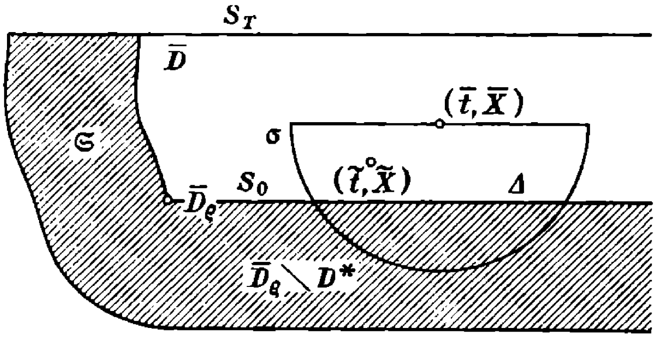
[1] On désigne par $E_1 \backslash E_2$ l'ensemble des points de l'ensemble E_1 n'appartenant pas à E_2.

où

$$\Phi(t, X) = \vartheta(r), \qquad r = \Big[\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x}_i)^2+(t-\bar{t})^2\Big]^{1/2},$$

$$\vartheta(r) = \begin{cases} \exp\Big[-\dfrac{r^2}{\varrho^2-r^2}\Big] & \text{pour} \quad 0 \leqslant r < \varrho, \\ 0 \quad \text{pour} \quad r \geqslant \varrho. \end{cases}$$

Il est évident que la fonction $\vartheta(r)$ est continue et bornée, ainsi que ses dérivées d'ordre quelconque, pour $r \geqslant 0$ et qu'on a $0 \leqslant \vartheta(r) \leqslant 1$, $\vartheta(0) = 1$, $\vartheta(\varrho) = 0$. Il en résulte que la fonction $\Phi(t, X)$ est continue et bornée, ainsi que ses dérivées d'ordre quelconque, d'une manière indépendante du point $(\bar{t}, \bar{X})$.



Considérons la demi-sphère S: $\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x}_i)^2+(t-\bar{t})^2 \leqslant \varrho^2$, $t \leqslant \bar{t}$ et soit $\Delta = S \cap D^*$. On a, d'après (6) et (5), $\bar{u}(\bar{t}, \bar{X}) > \bar{M}$ et d'autre part, $\bar{u}(t, X) = u(t, X) \leqslant \bar{M}$ sur la surface sphérique σ de $F(S)$ (c'est-à-dire pour $r = \varrho$). Il en résulte que $\bar{u}(t, X)$ atteint un maximum supérieur à $\bar{M}$ en un point $(\tilde{t}, \tilde{X})$ de S. Or le point $(\tilde{t}, \tilde{X})$ est situé dans l'ensemble Δ. En effet, dans $S \setminus \Delta$ on a $\bar{u}(t, X) \leqslant u(t, X)+\eta \leqslant M+\eta < \frac{1}{2}(\bar{M}+M) < \bar{M}$. Donc au point $(\tilde{t}, \tilde{X})$ les dérivées $u'_t, u'_{x_i}, u''_{x_ix_j}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ existent et on a

$$\bar{u}'_t(\tilde{t}, \tilde{X}) \geqslant 0, \qquad \bar{u}'_{x_i}(\tilde{t}, \tilde{X}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

(7)

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\tilde{t}, \tilde{X})\,\bar{u}''_{x_ix_j}(\tilde{t}, \tilde{X}) \leqslant 0.$$

Posons

$$A = \max_{i,j \leqslant m}[\sup_{D^*} a_{ij}(t, X)],$$

$$K = \max[\sup_{r\geqslant 0}|\Phi'_t|, \sup_{r\geqslant 0}|\Phi'_{x_i}|, \sup_{r\geqslant 0}|\Phi''_{x_ix_j}|] \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, nous choisissons le nombre η de façon qu'on ait

$$\eta < \min\left[\frac{1}{2}(\bar{M}-M), \frac{\varepsilon}{(Am^2+1)(K+1)}\right].$$

Il est aisé de voir que les inégalités (7) entraînent alors les inégalités (4). Le lemme est ainsi démontré.

3. Nous revenons aux considérations concernant l'équation (1). Soit $D = (0, T_0)\times S_0$ le domaine défini au N° 1. On désigne par $\widetilde{\mathfrak{S}}$ la surface latérale $[0, T_0)\times F(S_0)$ de D, par $\widetilde{\Sigma}$ l'ensemble $S_0 \cup \widetilde{\mathfrak{S}}$, par $\widetilde{D}$ l'ensemble $[0, T_0)\times \bar{S}_0$.

Nous dirons qu'une fonction $u(t, X)$ est régulière (par rapport à l'équation (1)) dans un ensemble G de $\mathcal{E}^{m+1}$, si elle est continue dans G et admet des dérivées $u'_t, u'_{x_i}, u''_{x_ix_j}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ continues à l'intérieur de G. Une fonction $u(t, X)$ constitue une solution de l'équation (1) régulière dans G, si elle est régulière dans G et satisfait à l'équation (1) à l'intérieur de G.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *On suppose que les coefficients $a_{ij}(t, X)$ et $b_i(t, X)$ de l'équation* (1) *sont bornés dans le domaine D et que la forme $\mathfrak{A}(\Lambda)$ y est définie ou semi-définie positive. On suppose de plus que $c(t, X)\leqslant 0$ et que la fonction $p(t, X)$ est bornée et non négative dans D.*

Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation (1) *régulière et bornée supérieurement* (*inférieurement*) *dans l'ensemble $\widetilde{D}$.*

Si $u(t, X)\leqslant M$ $(u(t, X)\geqslant -M)$ pour $(t, X)\in\widetilde{\Sigma}$, M étant un nombre non négatif, on a aussi $u(t, X)\leqslant M$ $(u(t, X)\geqslant -M)$ dans l'ensemble $\widetilde{D}$. Si $c(t, X)\equiv 0$, la restriction $M\geqslant 0$ n'est pas nécessaire.

Démonstration. Nous considérons d'abord un sous-ensemble $D_T = (0, T)\times S_0$ du domaine D, $T\leqslant T_0$ étant un nombre positif, inférieur à $(2p_0+1)^{-1}$, où $p_0 = \sup\limits_{D} p(t, X)$. Soit $\Sigma_T = \bar{S}_0 \cup \big([0, T]\times F(S_0)\big)$; posons $\bar{M} = \sup\limits_{\bar{D}_T} u(t, X)$.

Nous avons à démontrer que $\bar{M}\leqslant M$. Supposons que $\bar{M} > M$ et soit $\bar{M}-M = 3\lambda$ $(\lambda > 0)$. Posons

$$v(t, X) = u(t, X) - \frac{\lambda}{T}t.$$

On a $v(t, X)\leqslant M$ sur Σ_T, $\sup\limits_{\bar{D}_T} v(t, X)\geqslant \bar{M}-\lambda > 0$ et

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)+\frac{\lambda}{T}-c\frac{\lambda}{T}t\geqslant \mathcal{F}(v)+\frac{\lambda}{T}. \tag{8}$$

Il résulte du lemme du N° 2 qu'on peut choisir un point $(\tilde{t}, \tilde{X}) \in \bar{D}_T \backslash \Sigma_T$ tel que l'on ait

$$v(\tilde{t}, \tilde{X}) > \sup_{\bar{D}_T} v(t, X) - \lambda \geqslant \bar{M} - 2\lambda \tag{9}$$

et

$$\mathcal{F}(v) \geqslant -\lambda . \tag{10}$$

D'après la définition de la fonction $v(t, X)$ et les relations (1), (8) et (10), on a au point $(\tilde{t}, \tilde{X})$ l'inégalité

$$\lambda\left(\frac{1}{T}-1\right) \leqslant \mathcal{F}(v)+\frac{\lambda}{T} \leqslant \mathcal{F}(u) = p(\tilde{t}, \tilde{X}) \int_{\bar{S}_0} [v(\tilde{t}, Z) - v(\tilde{t}, \tilde{X})] P(\tilde{t}, \tilde{X}; dZ). \tag{11}$$

Comme $v(t, X) \leqslant \bar{M}$ dans $\bar{D}_T$, il résulte de (9) et (2) qu'on a

$$\int_{\bar{S}_0} [v(\tilde{t}, Z) - v(\tilde{t}, \tilde{X})] P(\tilde{t}, \tilde{X}; dZ) \leqslant 2\lambda . \tag{12}$$

On déduit de (11) et (12) l'inégalité

$$\frac{1}{T} - 1 \leqslant 2p_0 .$$

Or cette inégalité est contraire à l'hypothèse que $T < (2p_0+1)^{-1}$. On étend ensuite de proche en proche l'inégalité $u(t, X) \leqslant M$ à tout le domaine $\tilde{D}$.

4. On déduit du théorème 1 le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Les hypothèses du théorème* 1 *sur les coefficients* a_{ij}, b_i *et la forme* $\mathfrak{A}(\Lambda)$ *restant valablès, nous supposons que le coefficient* $c(t, X)$ *est borné supérieurement dans le domaine* D. *Ceci étant admis, la seule solution de l'équation* (1) *régulière et bornée dans le domaine* $\tilde{D}$ *et s'annulant sur* $\tilde{\Sigma} = S_0 \cup \tilde{\mathfrak{S}}$ *est* $u(t, X) \equiv 0$.

Pour la démonstration, nous appliquons le théorème 1 à la fonction $w(t, X) = u(t, X)\exp(-Ct)$, où $C = \sup_D c(t, X)$.

Le théorème 2 implique l'unicité, dans la classe des fonctions bornées dans $\tilde{D}$, de la solution du problème suivant: On cherche une solution de l'équation (1) régulière dans le domaine $\tilde{D}$ et satisfaisant aux conditions

$$u(0, X) = \varphi(X) \quad \text{pour} \quad X \in S_0 , \tag{13}$$

$$u(t, X) = \psi(t, X) \quad \text{pour} \quad (t, X) \in \tilde{\mathfrak{S}} , \tag{14}$$

$\varphi(X)$ et $\psi(t, X)$ étant des fonctions continues dans $\bar{S}_0$, resp. sur $\tilde{\mathfrak{S}}$ et satisfaisant à la condition de compatibilité $\psi(0, X) = \varphi(X)$ pour $X \in F(S_0)$.

Il est à remarquer que la condition (13) elle-même ne détermine pas la solution de l'équation (1) d'une manière univoque dans le domaine $\tilde{D}$ (1). À ce point de vue, l'équation (1) est analogue à l'équation aux dérivées partielles du type parabolique (normale). Il en est tout autrement dans le cas de l'équation intégro-différentielle du processus stochastique purement discontinu (voir [3]), dont les solutions sont déterminées univoquement par les conditions initiales.

(1) Une solution d'une équation particulière de la forme (1) satisfaisant aux conditions de la forme (13) et (14) a été déterminée récemment par W. Bodanko (ce résultat n'est pas encore publié).

Travaux cités

[1] W. Feller, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse,* Math. Annalen 113 (1936), p. 113-160.

[2] A. Kolmogoroff, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Math. Annalen 104 (1931), p. 415-458.

[3] M. Krzyżański, *Principe d'extremum relatif aux solutions de l'équation intégro-différentielle du processus stochastique markovien purement discontinu,* Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences, Sér. Sc. Math., Astron. et Phys. 11 (8) (1963), p. 531-534.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 23. 1. 1964