ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1971)

L'équivalence et les comitantes algébriques des objets géométriques attachés

par M. PUNICKA (Kraków)

En continuant les considérations des notes [1] et [3], d'où nous puisons les notions ainsi que les notations, nous nous occupons dans cette note de la notion du comitant algébrique et de l'équivalence des objets géométriques attachés.

1. Tout d'abord nous montrons que l'identité des décompositions de l'ensemble Z déterminées par deux objets géométriques attachés, qui sont équivalents dans ce cas (voir [2]), ne suffit pas pour obtenir l'identité des points d'attache de ces objets.

Nous remarquons qu'un p-objet, qui fait correspondre la suite $(\lambda\underset{p}{\xi}^1, \lambda\underset{p}{\xi}^2)$ à la transformation identique, détermine dans le groupe des transformations centro-affines un sous-groupe indépendant de λ. Il résulte du théorème 3 de la note [1] que nous pouvons former à l'aide de ce sous-groupe une décomposition $\{B_j\}_{j\in I}$ du groupe centro-affine invariant par rapport à l'opération $\circ$ (voir [1]) et que nous pouvons déterminer sur ce groupe centro-affine des objets géométriques attaché, en des points différents $(\lambda\underset{p}{\xi}^1, \lambda\underset{p}{\xi}^2)$ et déterminant la décomposition $\{B_j\}_{j\in I}$. Cependant, comme les objets géométriques attachés déterminent les décompositions identiques de l'ensemble sur lequel ils sont définis, ils peuvent être considérés comme des objets attachés au même point.

2. Soient f et g des objets géométriques définis sur l'ensemble des transformations Z et attachés au même point p. Si f est un comitant algébrique de g, alors la g-décomposition de l'ensemble Z est contenue dans la f-décomposition de l'ensemble Z (voir [2]), donc l'intersection de la g-décomposition avec la p-décomposition est contenue dans l'intersection de la f-décomposition avec la p-décomposition. Il en résulte que si les objets f et g étaient équivalents, alors ces intersections seraient identiques. On sait de plus (voir [1]) que ces intersections sont des décompositions invariantes par rapport à la superposition des transformations.

Dans le cas où les objets f et g sont définis sur le groupe des transformations G, nous constatons que les intersections sousdites sont des classes d'équivalence à gauche par rapport aux sous-groupes G_f ou G_g du groupe G.

Il en résulte que

si l'objet f est un comitant algébrique de l'objet g, on a $G_g \subset G_f$;

si les objets f et g sont équivalents, on a $G_g = G_f$.

Les conditions dans ces théorèmes *ne sont pas suffisantes* pour que deux objets géométriques attachés f et g définis sur G soient équivalents ou pour que l'objet f soit un comitant algébrique de l'objet g (dans le cas des objets géométriques ces conditions sont nécessaires et suffisantes; voir [2]).

En effet, considérons une droite, métrisée par la métrique simple, comme une variété topologique. Soit G le groupe des transformations affines de cette droite:

$$T_{ab}\colon \ \xi' = a\xi + b, \qquad \text{où } a \neq 0.$$

Soit p un point de cette droite ayant la coordonnée $\underset{0}{\xi} = 0$ dans un système primitif.

Nous déterminons les objets f et g sur le groupe G de la façon suivante:

$$f(T_{ab}) = \begin{cases} b & \text{pour } a > 0, \\ b+1 & \text{pour } a < 0, \end{cases}$$

et

$$g(T_{ab}) = \begin{cases} (0, b) & \text{pour } a > 0, \\ (1, b) & \text{pour } a < 0. \end{cases}$$

La décomposition du groupe G déterminée par l'objet f a la forme

$$G = \bigcup_{\omega \in R} f^{-1}(\{\omega\}) = \bigcup_{\omega \in R} \{T_{ab};\, b = \omega \text{ et } a > 0 \text{ ou } b = \omega - 1 \text{ et } a < 0\},$$

où R est l'ensemble des nombres réels.

La décomposition du groupe G déterminée par l'objet g a la forme

$$G = \bigcup_{\omega \in R^*} g^{-1}(\{\omega\}), \qquad \text{où } R^* = \{0, 1\} \times R,$$

et

$$g^{-1}\big(\{(0, b)\}\big) = \{T_{ac};\, c = b \text{ et } a > 0\}$$

et

$$g^{-1}\big(\{(1, b)\}\big) = \{T_{ac};\, c = b \text{ et } a < 0\}.$$

Dans les deux cas le sous-groupe de p-décomposition constitue le groupe

$$G_1 = \{T_{ab};\ a \neq 0 \ \text{et}\ b = 0\},$$

tandis que les sous-groupes G_f et G_g du groupe G sont les suivantes:

$$G_2 = \{T_{ab};\ a > 0 \ \text{et}\ b = 0\}.$$

Puisque les décompositions du groupe G déterminées par les objets f et g sont différentes, ceux-ci ne sont pas équivalents. Pourtant l'objet f est un comitant algébrique de l'objet g, car la g-décomposition est contenue dans la f-décomposition.

A l'aide des sous-groupes G_1 et G_2 nous pouvons construire une décomposition invariante du groupe G par rapport à l'opération $\circ$ de la manière suivante:

$$G = \bigcup_{\omega\in R} \{T_{ab};\ b = \omega \ \text{et}\ a > 0 \ \text{ou}\ b = \omega+1 \ \text{et}\ a < 0\}.$$

L'objet h qui détermine cette décomposition du groupe G a, par exemple, la forme suivante:

$$h(T_{ab}) = \begin{cases} b & \text{pour } a > 0, \\ b-1 & \text{pour } a < 0. \end{cases}$$

Nous voyons que les objets f et h ne sont pas équivalents, bien que $G_h = G_f$, qu'aucun d'eux ne constitue le comitant algébrique de autre; cependant l'objet h est un comitant algébrique de l'objet g.

Travaux cités

[1] A. Krupińska et Z. Moszner, *Sur la notion d'objet géométrique attaché, II*, Ann. Polon. Math. 22 (1969), p. 101-106.

[2] S. Midura et Z. Moszner, *Quelques remarques au sujet de la notion de l'objet et de l'objet géométrique*, ibidem 18 (1966), p. 223-338.

[3] Z. Moszner, *Sur la notion d'objet géométrique attaché, I*, ibidem 20 (1968), p. 251-257.

Reçu par la Rédaction le 25. 6. 1969