ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXV (1971)

Sur un système d'inégalités différentielles partielles du second ordre à argument fonctionnel

par A. SOBOLEWSKA (Rzeszów)

Le but de ce travail est de généraliser les résultats établis dans les publications [1], [2], [3] et [5] au cas des inégalités différentialles partielles à argument fonctionnel. Nous y utilisons la méthode que J. Szarski a exposée dans la monographie [4], ainsi que la méthode, convenablement modifiée, contenue dans les travaux [2] et [3].

1. Notations et définitions. Désignons par $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un point de l'espace euclidien à n dimensions. Soit encore D un ensemble ouvert et borné contenu dans cet espace et $F(D)$ la frontière de cet ensemble.

Nous admettrons les notations suivantes:

(i) $\Sigma = F(D)\times[0, T)$; $\Omega = D\times[0, T)$, où $0 < T \leqslant +\infty$, $\Omega_a = D\times \times(a, 0]$, où a est un nombre fixé de l'intervalle $(-\infty, 0]$: $\Omega^t = D\times[0, t)$, $\overline{\Omega}^t = D\times[0, t]$ pour $0 \leqslant t < T$.

(ii) Si $\beta(t, X)$ est une fonction définie sur l'ensemble Σ, $\Sigma_\beta \overset{\text{def}}{=} \{(t, X)\colon (t, X)\in\Sigma$ et $\beta(t, X) > 0\}$.

Nous utiliserons aussi les notations suivantes, admises dans [4] pour les fonctions et les dérivées partielles:

(iii) $Z(t, X) = \{z^1(t, X), z^2(t, X), \ldots, z^m(t, X)\}$, $z_x^i = \{z_{x_1}^i, z_{x_2}^i, \ldots, z_{x_n}^i\}$, $z_{xx}^i = \{z_{x_1x_1}^i, z_{x_1x_2}^i, \ldots, z_{x_nx_n}^i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

(j) Par $A^j(t, Z) = \{A_1^j(t, Z), A_2^j(t, Z), \ldots, A_r^j(t, Z)\}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ nous entendrons un système d'opérations définies sur l'ensemble $[0, T)\times\Phi$, où Φ désigne l'ensemble des fonctions vectorielles $Z(t, X)$ définies sur l'ensemble $\Omega_a\cup\Omega$. De plus, $A_s^j\colon [0, T)\times\Phi\to R_1$.

DÉFINITION D'UNE OPÉRATION DU TYPE DE VOLTERRA. L'opération $A^j(t, Z)$, définie sur l'ensemble $[0, T)\times\Phi$, sera dite *opération de Volterra* si la relation $Z(t, X)\equiv\tilde{Z}(t, X)$ sur l'ensemble $\Omega_a\cup\Omega^{t_0}$ entraîne $A^j(t_0, Z) = A^j(t_0, \tilde{Z})$. Nous admettons que les opérations $A^j(t, Z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ sont croissantes dans le sens que voici:

(jj) Si l'inégalité $z^i(t, X) \leqslant \tilde{z}^i(t, X)$ pour $(i = 1, 2, \ldots, m)$ (ce que nous noterons en abrégé $Z(t, X) \leqslant \tilde{Z}(t, X)$) a lieu dans l'ensemble $\Omega_a \cup \Omega^{t_0}$, on a $A^j(t_0, Z) \leqslant A^j(t_0, \tilde{Z})$ (c'est-à-dire $A_1^j(t_0, Z) \leqslant A_1^j(t_0, \tilde{Z}), \ldots, A_r^j(t_0, Z) \leqslant A_r^j(t_0, \tilde{Z})$).

Nous admettons encore que les opérations $A^j(t, Z)$ satisfont à la condition suivante de Lipschitz:

(jjj) $\|A^j(t, Z) - A^j(t, \tilde{Z})\| \leqslant K \sup_{\Omega_a \cup \Omega^t} \|Z - \tilde{Z}\|$

pour tous les t de l'intervalle $(0, T)$ et les $Z, \tilde{Z}$ de l'ensemble Φ.

Ici et dans la suite nous utilisons la norme suivante:

$$\|Y\| = \max_{(\nu=1,\ldots,l)} |y_\nu|, \quad \text{où } Y = (y_1, y_2, \ldots, y_l).$$

2. Hypothèses et théorème. Supposons données les fonctions

$$f^i(t, X, Z, P, Q, R) = f^i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, z^1, z^2, \ldots, z^m, p_1, p_2, \ldots$$
$$\ldots, p_r, q_1, q_2, \ldots, q_n, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

de $(1+n)^2+m+r$ variables, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° Les fonctions $f^i(t, X, Z, P, Q, R)$ sont définies pour Z, P, Q, R quelconques et pour $(t, X) \in \Omega$. Elles sont non décroissantes par rapport à l'ensemble des variables $P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$, tandis que par rapport à l'ensemble des variables $Z = (Z^1, Z^2, \ldots, Z^m)$ elles satisfont à la „condition W^+" ([2], déf. 4), c'est-à-dire que les relations $z^1 \geqslant \tilde{z}^1, z^2 \geqslant \tilde{z}^2, \ldots, z^{i-1} \geqslant \tilde{z}^{i-1}, z^i = \tilde{z}^i, z^{i+1} \geqslant \tilde{z}^{i+1}, \ldots, z^m \geqslant \tilde{z}^m$ entraînent $f^i(t, X, z, P, Q, R) \geqslant f^i(t, X, \tilde{Z}, P, Q, R)$ pour $(t, X) \in \Omega$ et P, Q, R quelconques.

2° Il existe une fonction $\sigma(t, s)$, continue et non négative dans l'ensemble $[0, T) \times [0, +\infty)$, non décroissante par rapport à la variable s, telle que la solution unique de l'équation $ds/dt = \sigma(t, (1+K)s)$ avec la condition $s(0) = 0$ est la fonction $s(t) \equiv 0$ et que l'on a, de plus,

$$f^i(t, X, \tilde{Z}, \tilde{P}, Q, R) - f^i(T, X, Z, P, Q, R) \leqslant \sigma(t, \|Z-\tilde{Z}\| + \|P-\tilde{P}\|)$$
$$(i = 1, \ldots, m)$$

pour $Z \leqslant \tilde{Z}, P \leqslant \tilde{P}, (t, X) \in \Omega,\ Q, R$ quelconques.

Nous admettons encore que les deux fonctions vectorielles

$$U(t, X) = \{u^1(t, X), \ldots, u^m(t, X)\}, \qquad V(t, X) = \{v^1(t, X), \ldots, v^m(t, X)\}$$

satisfont aux conditions:

3° Les fonctions $U(t, X)$ et $V(t, X)$ sont continues dans la fermeture $\Omega_a \cup \Omega$, de classe C^1 dans Ω et admettent des dérivées partielles du second ordre par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ continues dans Ω.

4° Les fonctions $f^i(t, X, Z, P, Q, R)$ sont elliptiques par rapport à la suite de fonctions $\{u^1(t, X), u^2(t, X), \ldots, u^m(t, X)\}$ dans l'opération A^i, c'est-à-dire que

$$f^i\big(t, X, U(t, X), A^i(t, U(t, X)), u_x^i(t, X), R\big) \leqslant f^i\big(t, X, U(t, X), A^i(t, U(t, X)), u_x^i(t, X), \tilde{R}\big)$$

pour $R = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$, $\tilde{R} = (\tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{12}, \ldots, \tilde{r}_{nn})$ tels que la forme quadratique $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} (r_{\mu\nu} - \tilde{r}_{\mu\nu})\lambda_\mu \lambda_\nu$ soit non positive, $(t, X) \in \Omega$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

5° Les fonctions $U(t, X)$ et $V(t, X)$ vérifient les inégalités initiales

$$U(t, X) \leqslant V(t, X) \quad \text{pour } (t, X) \in \Omega_a,$$

ainsi que les inégalités différentielles suivantes:

6° $u^i(t, X) \leqslant f^i\big(t, X, U(t, X), A^i(t, U(t, X)), u_x^i, u_{xx}^i\big)$,

6°' $v^i(t, X) \geqslant f^i\big(t, X, V(t, X), A^i(t, V(t, X)), v_x^i, v_{xx}^i\big)$ pour $(i = 1, 2, \ldots, m)$ et $(t, X) \in \Omega$, les opérations A^i satisfaisant à (jj) et (jjj).

7° Il existe des fonctions $\beta^i(t, X)$, non négatives sur Σ, et $\varphi^i(t, X, z)$, définies pour $(t, X) \in \Sigma$ et z quelconques, strictement croissantes par rapport à z et telles que soient vérifiées les inégalités:

$$\varphi^i\big(t, X, u^i(t, X)\big) - \varphi^i\big((t, X, v^i(t, X)\big) \leqslant \beta^i(t, X) \frac{\partial [u^i(t, X) - v^i(t, X)]}{\partial l_i}$$

pour $(t, X) \in \Sigma_{\beta_i}$, où l^i désigne une demi-droite issue du point (t, X), orthogonale à l'axe des t et dirigée vers l'intérieur de Ω,

$$\varphi^i\big(t, X, u^i(t, X)\big) - \varphi^i\big(t, X, v^i(t, X)\big) \leqslant 0 \quad \text{pour } (t, X) \in \Sigma - \Sigma_{\beta_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

THÉORÈME SUR LE PROLONGEMENT DE L'INÉGALITÉ INITIALE. *Si les hypothèses* 1°-7° *sont vérifiées, l'inégalité* $U(t, X) \leqslant V(t, X)$ *a lieu dans l'ensemble* $\Omega_a \cup \bar{\Omega}$.

3. Démonstration du théorème. Posons — $M^i(t) = \sup_{(t,x)\in\bar{\Omega}^t} [u^i(t, X) - v^i(t, X)]$ et $M(t) = \max_{(i=1,\ldots,m)} M^i(t)$. Soit encore $\tilde{M}(t) = \max_{(i=1,\ldots,m)} [0, M(t)]$.

Notre théorème sera établi lorsque nous aurons prouvé que pour $t \in [0, T)$ on $\tilde{M}(t) = 0$.

La fonction $\tilde{M}(t)$ satisfait aux conditions suivantes:

A. $\tilde{M}(0) = 0$, ce qui résulte directement de l'hypothèse 5.

B. $\tilde{M}(t) \geqslant 0$ pour $t \in [0, T)$.

C. $\tilde{M}(t)$ est continue dans $[0, T)$.

Supposons que l'on ait $\tilde{M}(\bar{t}) > 0$ pour un $\bar{t} \in (0, T)$. Alors il existe un indice i_0 et un point $(t_0, X_0) \in \bar{\Omega}^{\bar{t}}$ tels que

$$\tilde{M}(\bar{t}) = u^{i_0}(t_0, X_0) - v^{i_0}(t_0, X_0).$$

La définition de la fonction $M(t)$ entraîne $\tilde{M}(\bar{t}) = \tilde{M}(t_0)$. Nous avons donc

$$\tag{1} \tilde{M}(t_0) = u^{i_0}(t_0, X_0) - v^{i_0}(t_0, X_0) > 0.$$

De l'hypothèse 7° il résulte que le point (t_0, X_0) est un point intérieur. La démonstration de ce fait est identique à celle qui est donnée dans le travail [2].

Pour $t < t_0$ on a $\tilde{M}(t) \geqslant u^{i_0}(t, X_0) - v^{i_0}(t, X_0)$, ce qui résulte de la définition de la fonction $\tilde{M}(t)$. D'où

$$\frac{\tilde{M}(t) - \tilde{M}(t_0)}{t - t_0} \leqslant \frac{[u^{i_0}(t, X_0) - v^{i_0}(t, X_0)] - [u^{i_0}(t_0, X_0) - v^{i_0}(t_0, X_0)]}{t - t_0}$$

et, en passant à la limite,

$$\tag{2} D_-\tilde{M}(t_0) \leqslant u_t^{i_0}(t_0, X_0) - v_t^{i_0}(t_0, X_0).$$

D'autre part, comme (t_0, X_0) est un point intérieur de l'ensemble Ω, la fonction $u^{i_0}(t_0, X) - v^{i_0}(t_0, X)$ admet pour $X = X_0$ un maximum local. De là et de l'hypothèse 3° on tire

$$\tag{3} u_x^{i_0}(t_0, X_0) = v_x^{i_0}(t_0, X_0)$$

et

$$\tag{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} [u^{i_0}_{x_\mu x_\nu}(t_0, X_0) - v^{i_0}_{x_\mu x_\nu}(t_0, X_0)] \lambda_\mu \lambda_\nu \leqslant 0$$

pour λ_μ, λ_ν quelconques.

Les hypothèses 6°, 6°' et l'égalité (3) entraînent l'inégalité

$$D_-\tilde{M}(t_0) \leqslant f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, U), u_x^{i_0}(t_0, X_0), u_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, V), v_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big)$$

et ensuite

$$D_-\tilde{M}(t_0) \leqslant f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, U), u_x^{i_0}(t_0, X_0), u_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, U), u_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big) + \\ + f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, U), u_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, V), v_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big).$$

Puisque les fonctions f^i sont elliptiques en vertu de l'hypothèse 4° et que l'on a (4), on peut rejeter les deux premiers termes du second membre de la dernière inégalité sans en changer le sens. Nous obtenons ainsi l'inégalité:

$$(5)\qquad D_-\tilde{M}(t_0) \leqslant f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, U), v_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, V), v_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big).$$

Nous avons de plus $u^i(t_0, X_0) - v^i(t_0, X_0) \leqslant \tilde{M}(t_0)$, d'où

$$(6)\qquad u^i(t_0, X_0) \leqslant v^i(t_0, X_0) + M(t_0)$$

(où l'égalité a lieu pour $i = i_0$).

La condition suivante est aussi vérifiée:

$$(7)\qquad U(t, X) \leqslant V(t, X) + M(t) \quad \text{pour } (t, X) \in \Omega_a \cup \Omega^{i_0}.$$

En vertu de l'hypothèse (jj) on aura donc

$$(8)\qquad A^{i_0}(t_0, U) \leqslant A^{i_0}(t_0, V + \tilde{M}).$$

L'hypothèse 1° et les formules (5), (7) et (8) entraînent l'inégalité:

$$D_-\tilde{M}(t_0) \\ \leqslant f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0) + \tilde{M}(t_0), A^{i_0}(t_0, V + \tilde{M}), v_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), A^{i_0}(t_0, V), v_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0 t, X_0)\big).$$

En profitant des hypothèses 1° et 2° on obtient

$$D_-\tilde{M}(t_0) \leqslant \sigma\big(t_0, (1+K)\tilde{M}(t_0)\big) \quad \text{et} \quad \tilde{M}(0) = 0.$$

Cette inégalité, rapprochée du théorème de comparaison ([4], p. 44) mène à une contradiction avec l'hypothèse que $\tilde{M}(t_0) = \tilde{M}(\bar{t}) > 0$. La démonstration du théorème est donc achevée.

4. Cas particuliers. Le théorème que nous venons d'etablir constitue une généralisation des théorèmes contenus dans les travaux [1], [2] et [3].

Si $A^i(t, Z) = Z$, on obtient le théorème énoncé et démontré dans le travail [2] (p.17). Alors a peut être un nombre non positif quelconque.

Si $A^i(t, Z) = \xi(Z)$, on obtient le théorème établi dans le travail [3].

Si $A^i(t, Z) = \int_{\Omega_a \cup \Omega^i} Z(t, X)\, d_{\mu_z}(t, X)$, on retrouve le cas étudié dans le travail [1].

Considérons encore un quatrième cas particulier de l'opérateur $A^i(t, Z)$, à savoir

$$A^i\big(t, Z(t, X)\big) = Z\big(t - a^i(t), X\big),$$

où $a^i(t)$ est la fonction vectorielle $\{a^{i1}(t), a^{i2}(t), \ldots, a^{im}(t)\}$, $Z\big(t - a^i(t), X\big) = \big\{Z^1\big(t - a^{i1}(t), X\big), \ldots, z^m\big(t - a^{im}(t), X\big)\big\}$.

Les fonctions $a^{ij}(t)$ sont supposées définies pour $t \in [0, T)$, continues et non négatives. Dans ce $a = -\max_{i,j} \{\sup_t a^{ij}(t)\}$.

On voit anssitôt que c'est alors l'opérateur qui intervient dans un théorème sur les inégalités différentielles fortes du premier ordre établi dans le travail [5].

Références

[1] I. Łojczyk-Królikiewicz and J. Szarski, *On a non-linear system of parabolic integro-differential inequalities in an unbounded region*, Ann. Polon. Math. 19 (1967), p. 61-67.

[2] J. Szarski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques*, ibidem 15 (1964), p. 15-22.

[3] — *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques contenant des fonctionnelles*, Coll. Math. 16 (1967), p. 141-145.

[4] — *Differential inequalities*, Warszawa 1967.

[5] K. Zima, *On a differential inequality with a lagging argument*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), p. 227-233.

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1970